Torque Expressions and Equivalent Circuits for Salient Pole Synchronous Machines

Minoru Kondo Member (Railway Technical Research Institute)

Keywords: salient pole synchronous machine, interior permanent magnet synchronous machine, torque expression, equivalent circuit

Two different torque expressions are proposed for salient pole synchronous machines. One expression is the traditional voltage-torque equation.

$$T = \frac{p}{\omega} \frac{EV}{X_d} \sin \delta + \frac{p}{\omega} \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \quad (1)$$

T : Torque; p : number of pole pairs; ω : angular frequency; X_d : d-axis reactance; X_q : q-axis reactance; δ : load angle; E : no-load terminal voltage; V : terminal voltage.

The other expression is a current-torque equation, which has been recently used for permanent-magnet synchronous motors.

$$T = \frac{p}{\omega} EI_q + \frac{p}{\omega} (X_d - X_q) I_d I_q \quad (2)$$

I_d : d-axis current; I_q : q-axis current.

Both these expressions have two terms. It has often been stated that the first term in these expressions represents the magnet torque and the second term represent the reluctance torque. However, the corresponding terms in these two expressions do not give the same value when the expressions are used for an interior permanent-magnet synchronous motor (Fig. 1).

The aim of this study is to demonstrate the reason for the above-mentioned disagreement. I have obtained two equivalent circuits for this purpose. One is a parallel circuit (Fig. 2.) corresponding to equation (1) and the other is a series circuit (Fig. 3.) corresponding to equation (2). In the parallel circuit, the current is divided

into three components, whereas in the series circuit the voltage is divided. Therefore, distribution of the active power is different in these two circuits. This is the reason for the above mentioned disagreement.

$$\dot{I} = G_r \dot{V} - jB_r \dot{V} + \dot{I}_m \quad (3)$$

$$\dot{I}_m = j(E_1/X_d) e^{j\omega t} \quad (4)$$

$$G_r = \frac{(X_d - X_q) \sin 2\delta}{2X_d X_q} \quad (5)$$

$$B_r = \frac{X_d + X_q - (X_d - X_q) \cos 2\delta}{2X_d X_q} \quad (6)$$

$$\dot{V} = R_s \dot{I} + jX_s \dot{I} + \dot{E} \quad (7)$$

$$R_s = \frac{X_q - X_d}{2} \sin 2\beta \quad (8)$$

$$X_s = \frac{X_d + X_q}{2} - \frac{X_d - X_q}{2} \cos 2\beta \quad (9)$$

Fig. 1. Evaluation result of torque expressions

Fig. 2. Equivalent circuit with admittances in parallel

Fig. 3. Equivalent circuit with impedances in series

突極同期機のトルク式と等価回路

正 員 近藤 稔*

Torque Expressions and Equivalent Circuits for Salient Pole Synchronous Machines

Minoru Kondo*, Member

Two different torque expressions are proposed for salient pole synchronous machines. One is the traditional torque-voltage equation. The other is a torque-current equation and has been recently used for permanent magnet synchronous motors. Both these expressions have two terms. According to a general interpretation, one of the terms represents the magnet torque and the second term represents the reluctance torque. However, the corresponding terms in these two expressions do not give the same value when the expressions are used for an interior permanent-magnet synchronous motor. The aim of this study is to demonstrate this disagreement and identify the reason for the same by using two different equivalent circuits for salient pole synchronous machines.

キーワード：突極同期機，永久磁石同期機，トルク式，等価回路

Keywords: salient pole synchronous machine, interior permanent magnet synchronous machine, torque expression, equivalent circuit

1. はじめに

永久磁石同期機のトルク式には、二反作用法に基づき d 軸電流と q 軸電流でトルクを表した式⁽¹⁾（電流表現のトルク式と呼ぶ）が用いられている。一方、突極性が生じる設計がなされた永久磁石同期機は突極同期機の一つでもあるが、突極同期機のトルク式には、電圧と負荷角でトルクを表した式⁽²⁾（電圧表現のトルク式と呼ぶ）が従来から用いられている。

これらの理論の基礎となる二反作用法は Brondel が考案したものであるが、Doherty⁽³⁾ らがそれを拡張して電圧表現のトルク式やリラクタンス出力の考え方を導入し、以後、同期機の解析法として広く用いられるようになったようである。電圧表現の式は Doherty らによって示されたが、電流表現の式も同時期に Langsdorf⁽⁴⁾ により導出されている。インバータが登場する前は、同期機は電圧一定・周波数一定の電源に接続されて用いられることが普通であり、電圧表現の方が実用上の利点があったが、永久磁石同期機では電圧形インバータで電流ベクトルを制御して駆動することが多いため、出力やトルクを電流の関数として表現する方が使いやすく、現在では電流表現の式が広く用いられているものと考えられる。

これらの式では、回転子の界磁に起因するトルク（永久

磁石同期機では磁石トルクと呼ばれる）と突極性に起因するリラクタンストルクの和としてトルクが表現されている。しかし、これら 2 つの式を同一電動機の同一運転点に対して適用したときに、計算されるリラクタンストルクの大きさが全く一致しないことが中村⁽⁵⁾ により示されている。

本論文では、この不一致の原因を明らかにするため、2 つの式を比較するとともに、それらの式に対応する等価回路を示し、トルク式の各項の意味について考察する。

2. 突極同期機のトルク式

〈2・1〉 電流表現のトルク式 永久磁石同期機に対して良く用いられる電流表現のトルク式は次式で表される⁽¹⁾。

$$T = p \{ \varphi_a I_q + (L_d - L_q) I_d I_q \} \cdots \cdots \cdots (1)$$

T：トルク，p：極対数， φ_a ：永久磁石による電機子鎖交磁束， I_d ：d 軸電流， I_q ：q 軸電流， L_d ：d 軸インダクタンス， L_q ：q 軸インダクタンス

さらに無負荷誘導起電力を用いた表現にこの式を書き換えると次式となる。

$$T = \frac{p}{\omega} E I_q + \frac{p}{\omega} (X_d - X_q) I_d I_q \cdots \cdots \cdots (2)$$

ω ：角周波数，E：無負荷誘導起電力（端子電圧実効値）， X_d ：d 軸リアクタンス， X_q ：q 軸リアクタンス

この式の右辺第 1 項は無負荷誘導起電力に比例しており永久磁石同期機においては磁石トルクと呼ばれている，そ

* (財) 鉄道総合技術研究所
〒185-8540 国分寺市光町 2-8-38
Railway Technical Research Institute
2-8-38, Hikari-cho, Kokubunji 185-8540

図1 永久磁石同期機のベクトル図

Fig.1. Vector diagram of a permanent magnet synchronous machine.

して、第2項はd軸とq軸のリアクタンスの差に比例しておりリラクタンストルクを表現しているとされている⁽¹⁾。

以下ではこの第1項を T_{mag} 、第2項を T_{rel} とする。

$$T_{mag} = \frac{p}{\omega} E I_q \dots\dots\dots (3)$$

$$T_{rel} = \frac{p}{\omega} (X_d - X_q) I_d I_q \dots\dots\dots (4)$$

図1に永久磁石同期機のベクトル図を示す。図1のベクトル図に示す電流位相角 β (電流と無負荷誘導起電力の位相差) を用いると、d軸電流、q軸電流は次式で表される。

$$I_d = -I \sin \beta \dots\dots\dots (5)$$

$$I_q = I \cos \beta \dots\dots\dots (6)$$

I : 電流ベクトルの大きさ

この関係を用いて(3)、(4)式を書き換えると、次式となる。

$$T_{mag} = \frac{p}{\omega} E I \cos \beta \dots\dots\dots (7)$$

$$T_{rel} = \frac{p}{2\omega} (X_q - X_d) I^2 \sin 2\beta \dots\dots\dots (8)$$

これらの式から、 T_{mag} は電流位相角に対し正弦波状に変化し、 T_{rel} はその2倍の周波数で正弦波状に変化することが分かる。

〈2・2〉 電圧表現のトルク式 一方、突極同期機のトルク式は次式で表される⁽²⁾。

$$T = \frac{p}{\omega} \left\{ \frac{3E_{0a}V_a}{X_d} \sin \delta + \frac{3V_a^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \right\} \dots\dots\dots (9)$$

E_{0a} : 無負荷誘導起電力 (1相あたり実効値)、 V_a : 相電圧実効値、 δ : 負荷角 (無負荷誘導起電力と電圧の位相差)

ただし、この式では巻線抵抗や鉄損は無視しており、相数は3相を前提としている。この式をさらに線間電圧を用いた表現に書き換えると次式となる。

$$T = \frac{p}{\omega} \frac{EV}{X_d} \sin \delta + \frac{p}{\omega} \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \dots\dots\dots (10)$$

$V (= \sqrt{3}V_a)$: 端子電圧実効値

この式の右辺第1項は無負荷誘導起電力に比例する項であり、回転子の界磁に起因するトルク (磁石トルク) を表現している。そして、右辺第2項がd軸とq軸のリアクタンスの差に起因する項であり、 T_{rel} と同様にリラクタンストルクを表現しているとされている⁽²⁾⁽³⁾。以下ではこの第1項を T_1 、第2項を T_2 とする。

$$T_1 = \frac{p}{\omega} \frac{EV}{X_d} \sin \delta \dots\dots\dots (11)$$

$$T_2 = \frac{p}{\omega} \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \dots\dots\dots (12)$$

これらの式から明らかなように、 T_1 は負荷角に対し正弦波状に変化し、 T_2 はその2倍の周波数で正弦波状に変化する。よって、電流位相角に対する T_{mag} や T_{rel} の特性と同様に、 T_1 と T_2 は負荷角に対して変化する。

このように、 T_1 と T_{mag} はともに界磁によって生じ、 T_2 と T_{rel} は突極性によって生じ、電流や電圧の位相角に対する変化も同じである。よって、一見、 T_1 と T_{mag} 、および、 T_2 と T_{rel} は同じトルクを表現しているように見える。しかし、一般には、次章以下で述べるように、それらは全く異なるトルクを表現している。

3. トルク式の比較

〈3・1〉 トルク式による計算結果例 ここで、2種類のトルク式を比較するため、文献(5)に示されている45kWの永久磁石同期機について、それぞれの式を用いてトルクを計算した結果を比較する。

電動機の諸元を表1に、定格点におけるトルク計算結果を図2に示す。なお、文献(5)では電動機の巻線抵抗も考慮しているが、本論文では簡単化のため巻線抵抗を無視している。そのため、定格電流の値が文献(5)と若干異なっている。

図2から分かるように電圧表現のトルク式と電流表現のトルク式による全トルクの計算結果は一致し、以下の関係が成立する。

$$T = T_1 + T_2 = T_{mag} + T_{rel} \dots\dots\dots (13)$$

しかし、 T_1 と T_{mag} 、および、 T_2 と T_{rel} の値は一致せず、全く異なる値となっており、 T_2 と T_{rel} に関しては正負すら逆である。永久磁石同期機ではリラクタンストルクを有効利用するため、弱め磁束制御を行うのが普通であり、この電動機の定格点においても弱め磁束制御が行われている想定である (電流位相角 β は 52.8°)。そして、実際に電流表

表 1 電動機の諸元

Table 1. Motor specifications.

Number of pole pair	p	3
Rated power	P_r	45kW
Rated rotational speed	n_r	1200/min
Rated torque	T_r	358.1Nm
Rated frequency	f_r	60Hz
Rated angular frequency	ω_r	377rad/s
No-load magneto motive force	E	339.3V
d-axis inductance	L_d	4mH
q-axis inductance	L_q	12mH
d-axis reactance	X_d	1.51Ω
q-axis reactance	X_q	4.52Ω
Rated terminal voltage	V_r	380V
Rated current vector	I_r	119.1A
Rated phase current	I_a	68.8A

図 2 トルク式による計算結果

Fig. 2. Evaluation result of torque expressions.

現のトルク式におけるリラクタンストルクの値 T_{rel} は正になっている。しかし、電圧表現のトルク式におけるリラクタンストルク T_2 の値は負になっており、これがリラクタンストルクだとすると、リラクタンストルクは出力を減じる方向に作用することになってしまう。以下ではこのような不一致が起きる理由について考察する。

まず、トルク特性を比較するため、文献(5)の電動機について、電圧を定格電圧に固定した場合の負荷角に対する各トルク成分の特性を図3に、電流を定格電流に固定した場合の電流位相角に対する特性を図4に示す。図3と図4では T_1 と T_{mag} が負荷角や電流位相角に対して同様に正弦波状に変化している。一方、図3において T_2 はその2倍周波数で変化しているが、 T_{rel} はそのような変化はしていない。これに対し、図4では、 T_{rel} が2倍周波数で変化しているが、 T_2 はそのような変化はしていない。一般にインダクタンスの変化は界磁束の2倍周波数となることからリ

図 3 電圧一定条件でのトルク特性

Fig. 3. Torque characteristics under constant voltage condition.

図 4 電流一定条件でのトルク特性

Fig. 4. Torque characteristics under constant current condition.

ラクタンストルクは2倍周波数で変化するとされている。その観点からは、電圧一定条件下では T_2 が、電流一定条件下では T_{rel} が、リラクタンストルクの特徴を持ったトルク特性を有している。

〈3・2〉 数式表現の比較 次に数式表現の比較により、2つの式を比較するため、電圧表現のトルク式を dq 軸法による表現に変形する。d 軸電圧 V_d 、q 軸電圧 V_q は次式で表現される。

$$V_d = -V \sin \delta = -X_q I_q \dots\dots\dots (14)$$

$$V_q = V \cos \delta = E + X_d I_d \dots\dots\dots (15)$$

この関係を用いて (11) 式を変形すると次式が得られる。

$$T_1 = \frac{p}{\omega} \frac{E(-V_d)}{X_d} = \frac{p}{\omega} \frac{X_q}{X_d} E I_q \dots\dots\dots (16)$$

すなわち、 T_1 は T_{mag} に X_q/X_d を乗じたものとなっている。

このことから明らかなように、突極比が1の円筒機では T_1 と T_{mag} が一致する。そして、(4), (12) 式から明らかなように、円筒機では T_2 と T_{rel} の値は0となる。よって、2つのトルク式の間に矛盾は生じない。

さらに、(14), (15) 式を用いて (12) 式を変形すると次式が得られる

$$T_2 = \frac{P}{\omega} (X_d - X_q) \left(\frac{E}{X_d} + I_d \right) I_q \dots\dots\dots (17)$$

よって、 T_2 は T_{rel} の式において d 軸電流 I_d に E/X_d を加えたもので d 軸電流 I_d を置き換えた形になっている。

この式から明らかなように、界磁が無く無負荷誘導起電力 E が0となる純粋なリラクタンスモータでは、 T_2 と T_{rel} は一致する。そして T_1 と T_{mag} の値は0となる。よって、この場合には、2つのトルク式は矛盾しない。

しかし、式からも明らかなように界磁と突極性が同時に存在する場合には2つのトルク式の各項は一致しなくなる。この関係を式でまとめると以下の通りとなる。

$$\begin{aligned} E = 0 &\Rightarrow T_1 = T_{mag} = 0, \quad T_2 = T_{rel} \\ X_d = X_q &\Rightarrow T_1 = T_{mag}, \quad T_2 = T_{rel} = 0 \\ E \neq 0 \wedge X_d \neq X_q &\Rightarrow T_1 \neq T_{mag} \wedge T_2 \neq T_{rel} \\ &\dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

よって、今回問題としている不一致は、トルクを2つの成分に分解する場合にのみ生じる。

この原因についての結論を先に述べると、そもそも、実際に発生するトルクは一つであり、それを二つに分解する際の考え方が異なるためこのような不一致が生じる。具体的には、電圧（磁束）を固定して電流を分解することによりトルクを分解するか、電流を固定して磁束を分解することでトルクを分解するかの違いに起因して不一致が生じる。次章ではこのことを説明するため、等価回路を用いて考察を行う。

4. 突極同期機の等価回路

〈4・1〉 一般的な等価回路の考え方 一般に回転機を等価回路で表現する方法としては、有効電力を表現する抵抗と無効電力を表現するリアクタンス等の回路要素の組み合わせで表現する方法がある。そして、その場合に、それらの回路要素を直列に結合して表現する方法と並列に結合する方法が考えられる。

直列結合の回路においては各要素に流れる電流は同じであり、各要素で発生する電圧を足し合わせたものが端子電圧となる。すなわち、この回路は電流を基準として電圧を有効成分と無効成分に分解する解析方法に対応する。

逆に並列結合の回路では各要素に印加される電圧は同じであり、各要素を流れる電流を足し合わせたものが相電流となる。この回路は、電圧を基準として電流を有効成分と無効成分に分解する解析方法に対応する。

突極同期機や永久磁石同期機に関しては、前者の例として、

図5 インピーダンスによる等価回路

Fig. 5. Equivalent circuit composed of impedances in series.

山村⁽⁶⁾が示したスパイラルベクトル法の特特性式、Langsdorf⁽⁴⁾が示した等価インピーダンス、執行⁽⁷⁾が示した等価回路があり、後者の例としてはHonsinger⁽⁸⁾が示したアドミタンス法による解析がある。そして、電流表現のトルク式は前者の回路に対応し、電圧表現のトルク式は後者の回路に対応する。以下では、まず、それらの等価回路について示し、次にトルクの分解について考察する。

〈4・2〉 電流基準の等価回路 まず、電流基準の等価回路に対応する等価インピーダンスを用いた電圧特性式は次式で表される⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$\dot{V} = R_s \dot{I} + jX_s \dot{I} + \dot{E} \dots\dots\dots (19)$$

$$R_s = \frac{X_q - X_d}{2} \sin 2\beta \dots\dots\dots (20)$$

$$X_s = \frac{X_d + X_q}{2} - \frac{X_d - X_q}{2} \cos 2\beta \dots\dots\dots (21)$$

これに対応する等価回路は図5のようになる⁽⁷⁾。なお、巻線抵抗や鉄損抵抗は簡単のため省略している。

なお、(19)~(21)式において、 $\dot{V}$, $\dot{I}$, $\dot{E}$ は相電圧、相電流、相あたりの無負荷誘導起電力のベクトル量であり、無負荷誘導起電力を基準にすると時間 t における各ベクトル量は次式で表される。

$$\dot{V} = V_1 e^{j(\omega t + \delta)} \dots\dots\dots (22)$$

$$\dot{I} = I_1 e^{j(\omega t + \beta)} \dots\dots\dots (23)$$

$$\dot{E} = E_1 e^{j\omega t} \dots\dots\dots (24)$$

ただし、 V_1 , I_1 , E_1 は1相あたりの電圧、電流、無負荷誘導起電力のベクトルの大きさである。

この等価回路では、回転子の界磁によって生じる無負荷誘導起電力に、固定子電流によって生じる電機子反作用磁束による起電力を加えたものが相電圧と等しくなることが表現されている。

そして出力を等価回路の有効電力から計算すると次式となり、電流表現のトルク式に対応するものとなっている。

$$\begin{aligned} P &= 3 \left(\operatorname{Re} (\dot{E} \dot{I}^*) + R_s |\dot{I}|^2 \right) \\ &= EI \cos \beta + \frac{X_q - X_d}{2} I^2 \sin 2\beta \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

〈4・3〉 電圧基準の等価回路 電流基準の等価回路は等価インピーダンスが直列に連なったものとなっていた。これに対して、特性をアドミタンスの形で表現する解析方法が Honsinger⁽⁸⁾ により示されている。Honsinger が示したアドミタンスは巻線抵抗や鉄損抵抗も考慮したもので複雑であるため、ここではそれらの抵抗を 0 とした式を以下に示す。

$$\dot{I} = G\dot{V} - jB\dot{V} \dots\dots\dots (26)$$

$$G = \frac{(X_d - X_q) \sin 2\delta}{2X_d X_q} + \frac{(E/V) \sin \delta}{X_d} \dots\dots\dots (27)$$

$$B = \frac{X_d + X_q - (X_d - X_q) \cos 2\delta}{2X_d X_q} - \frac{(E/V) \cos \delta}{X_d} \dots\dots\dots (28)$$

この表現では界磁による起電力がアドミタンスの中に組み込まれている。電流基準の等価回路の場合と同様に界磁による効果を分離しようとした場合、電圧基準の方法においては電流を各要素に対応する電流成分に分解するため、界磁の効果を電圧として表現するのではなく電流として表現した方が良く、そのような表現方法による永久磁石同期機の等価回路も存在する⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。永久磁石は磁束源というよりは起磁力源として作用することを考えると、こちらの表現の方が永久磁石界磁の表現として適切な場合もある。例えば、この表現であれば d 軸インダクタンスの飽和により永久磁石による磁束が変化する効果も考慮することができると考えられる。

この表現方法を突極同期機に適用するには、界磁の効果を次式の電流ベクトルで表現すればよい。この電流ベクトルは三相短絡試験時の短絡電流に相当する。

$$\dot{I}_m = j(E_1/X_d)e^{j\omega t} \dots\dots\dots (29)$$

これを用いると電流特性式は以下のように書くことができる。

$$\dot{I} = G_r\dot{V} - jB_r\dot{V} + \dot{I}_m \dots\dots\dots (30)$$

$$G_r = \frac{(X_d - X_q) \sin 2\delta}{2X_d X_q} \dots\dots\dots (31)$$

$$B_r = \frac{X_d + X_q - (X_d - X_q) \cos 2\delta}{2X_d X_q} \dots\dots\dots (32)$$

このアドミタンス表現に対応する等価回路表現は要素を並列接続したものとなり、図 6 のようになる。

そして、出力をこの回路の有効電力から計算すると次式となり、電圧表現のトルク式に対応するものになっている。

$$\begin{aligned} P &= 3 \left(\operatorname{Re}(\dot{V} \dot{I}_m^*) + G_r |\dot{V}|^2 \right) \\ &= \frac{EV}{X_d} \sin \delta + \frac{V^2}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \sin 2\delta \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

図 6 の等価回路では回転子の起磁力は $\dot{I}_m$ によって打ち

図 6 アドミタンスによる等価回路

Fig. 6. Equivalent circuit composed of admittances in parallel.

消され、 B_r を流れる励磁電流により同期機が励磁される。よって、この等価回路は誘導機の T 形等価回路と類似の考え方を表現している。

〈4・4〉 トルク式の解釈 このように突極同期機の等価回路としては、インピーダンスを直列に結合して電圧を各成分に分解する電流基準の表現方法と、アドミタンスを並列に結合して電流を各成分に分解する電圧基準の表現方法が可能であり、電流表現のトルク式は前者に、電圧表現のトルク式は後者に対応する。

これらの等価回路や特性式を用いて、トルク式の各成分の意味を解釈すると以下ようになる。

T_{mag} : 界磁によって発生する磁束と固定子巻線に流れる電流によって発生するトルク。図 5 の等価回路において $\dot{E}$ で生じる有効電力に対応する。

T_{rel} : 突極性の存在により発生する有効磁束と固定子巻線に流れる電流によって発生するトルク。図 5 の等価回路中において R_s で生じる有効電力に対応する。

T_1 : 界磁による起磁力を打ち消すように固定子巻線に流れる電流 $\dot{I}_m$ と固定子巻線に鎖交する磁束によって発生するトルク。図 6 の等価回路において $\dot{I}_m$ で生じる有効電力に対応する。

T_2 : 突極性により生じる有効電流と固定子巻線に鎖交する磁束によって発生するトルク。図 6 の等価回路において G_r で生じる有効電力に対応する。

すなわち、トルクは磁束と電流によって発生すると考えられるが、それを界磁に起因するものと突極性に起因するものに分解する際に、磁束を分解するのか電流を分解するかによって、トルクの分解のされ方が異なる。

この相異は考え方の違いに基づくものであり、実験や電磁界解析によるトルク分離の場合にも発生し得る。例えば、永久磁石同期機において磁石有り無しの条件でトルクを測定・解析してトルク分離する場合に、電流条件を固定するか電圧条件を固定するかによって、異なる結果が得られることが想定される。この相異が、2 つのトルク式の相異に対応すると考えられる。

なお、永久磁石同期機のトルクを考える場合には電流表現のトルク式による解釈が一般的であるが、堺⁽¹¹⁾らにより

提案されている永久磁石式リラクタンスモータ (PRM) は異なった考え方をを用いており、結果的に電圧表現のトルク式における T_1 を利用する考え方をしている。

PRM では、磁石による磁束で d 軸電流による磁束を打ち消すように電動機が設計され、完全に打ち消している運転状態では次式が成り立つ。

$$I_d = -E/X_d = -|I_m| \dots\dots\dots (34)$$

この場合には q 軸電圧が 0 となり負荷角 δ が 90° となる。そして、その際には図 3 に示した様に T_2 が 0 となり T_1 が電圧一定条件下での最大値となる。よって、PRM は T_1 を利用する電動機であるといえる。

また、PRM の制御⁽¹²⁾では、永久磁石を表現する電流成分 I_m とそれ以外に電流を分解して制御しており、制御の点でもアドミタンスによる等価回路に近い考え方をしている。

T_1 は式の形からは磁石トルクに相当するようにも見えるが、(34) 式が成り立つ場合には (16) 式から次式が得られる。

$$T_1 = \frac{p}{\omega} \frac{X_q}{X_d} E I_q = p \frac{X_q I_q}{\omega} \frac{E}{X_d} = -p \Phi_q I_d \dots\dots\dots (35)$$

ただし、 Φ_q : q 軸磁束である。

すなわち T_1 は q 軸磁束と磁石磁束を打ち消す d 軸電流によって発生するトルクであり、電流表現の考え方におけるリラクタンストルクのイメージに近いトルク成分である。

このように、界磁と突極性が同時に存在する場合には、トルク式の各項の物理的意味は電圧表現と電流表現のトルク式において大きく異なる。ところが、それらのトルク式において、第 2 項はいずれもリラクタンストルクと呼ばれており、異なる概念が同じ言葉で呼ばれているので注意が必要である。しかし、ここまでで述べたように、この差異はトルクを分解するときの考え方の差によるものであり、どちらかが正しくてどちらかが間違っているというものではなく、単純に異なる考え方を表現しているにすぎない。

5. おわりに

永久磁石同期機のトルク式として用いられている電流表現のトルク式と、突極同期機のトルク式として用いられている電圧表現のトルク式を、同一電動機の同一運転状態に適用した場合に、全トルクの磁石トルクとリラクタンストルクへの分解が全く異なる結果となる理由を明らかにするため、双方の式を比較し、考察を加えた。

その結果、両トルク式は全トルクの計算においては常に一致するが、回転子の界磁と突極性が同時に存在する場合にはトルクを分解する際には不一致が生じることを確認した。さらに、等価回路を用いてトルクの分解について考察し、トルクを発生する電流と磁束のうち、電流を各成分に分けて考えるか磁束を各成分に分けて考えるかに起因して、トルク分解法の違いが生じることを述べた。

本論文は、従来から用いられていた突極同期機のトルク式と永久磁石同期機のトルク式との間に生じていた矛盾の原因を説明するものである。本論文が同期機に関わる技術

者の現象理解に役立ち、技術の発展に役立てば幸いである。
(平成 21 年 7 月 29 日受付, 平成 21 年 9 月 14 日再受付)

文 献

- (1) 武田洋次・松井信行・森本茂雄・本田幸雄：「埋込磁石同期モータの設計と制御」, p.17, オーム社 (2001)
- (2) 電気学会編：「電気学会大学講座 電気機器学」, p.127, オーム社 (2000)
- (3) R.E. Doherty and C.A. Nickle: "Synchronous Machines, Part I and II", Trans. A.I.E.E., Vol.45, pp.912-947 (1926)
- (4) A.S. Langsdorf: "Theory of Alternating-Current Machinery", pp.447-476, McGRAW-HILL (1937)
- (5) M. Nakamura: "A Study of Torque Calculation for PM motor", Toyo Denki Review, Vol.118, pp.1-10 (2008) (in Japanese)
- (6) 中村雅志：「PM モータのトルク算定に対する考察」, 東洋電機技報, 第 118 号, pp.1-10 (2008)
- (7) 山村 昌：「電気回路と回転機の解析と制御—スバイラルベクトル理論—」, p.111, オーム社 (1998)
- (8) 執行岩根：「電気機械設計論 3」, p.641, 丸善 (1951)
- (9) V.B. Honsinger: "Performance of Polyphase Permanent Magnet Machines", IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, Vol.PAS-99, No.4, pp.1510-1516 (1980)
- (10) T. Sebastian, G.R. Slemon, and M.A. Rahman: "Modelling of Permanent magnet Synchronous Motors", IEEE Trans. Magnetics, Vol.MAG-22, No.5, pp.1069-1071 (1986)
- (11) B.A. Welchko, T.M. Jahns, W.L. Soong, and J.M. Nagashima: "IPM Synchronous Machine Drive Response to Symmetrical and Asymmetrical Short Circuit Fault", IEEE Trans. Energy Conversion, Vol.18, No.2, pp.291-298 (2003)
- (12) K. Sakai, N. Takahashi, E. Shimomura, M. Arata, Y. Nakazawa, and T. Tajima: "Development of Permanent Magnet Reluctance Motor Suitable for Variable-Speed Drive for Electric Vehicle", IEEE Trans. IA, Vol.123, No.6, pp.681-688 (2003-6) (in Japanese)
- 堺 和人・高橋則雄・霜村英二・新 政憲・中沢洋介・田島敏伸：「可変速特性に優れた電気自動車用永久磁石式リラクタンスモータの開発」, 電学論 D, 123, 6, pp.681-688 (2003-6)
- (12) Y. Nakazawa, R. Kurosawa, K. Sakai, and M. Arata: "A Flux Weakening Control for Permanent Magnet Reluctance Motor", 2000 National Convention Record, IEE Japan, No.4-140 (2003) (in Japanese)
- 中沢洋介・黒沢良一・堺 和人・新 政憲：「永久磁石式リラクタンスモータの弱め磁束制御」, 平成 12 年電気学会全国大会, No.4-140 (2003)

付 録

1. 等価インピーダンスおよび等価アドミタンスの導出

本論文中で紹介している等価回路に対応する表現式 (19) ~ (21) および (26) ~ (28) の導出方法について述べる。

まず、(22) 式を変形し、(5), (6), (14), (15), (23), (24) 式を用いると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= V_1 e^{j(\omega t + \delta)} = (V / \sqrt{3}) e^{j\delta} e^{j\omega t} \\ &= (V \cos \delta + jV \sin \delta) (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\ &= (E + X_d I_d + jX_q I_q) (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\ &= \{E + (-X_d \sin \beta + jX_q \cos \beta) I\} (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\ &= \dot{E} + (-X_d \sin \beta + jX_q \cos \beta) e^{-j\beta} \dot{I} \\ &\dots\dots\dots \text{(付 1)} \end{aligned}$$

と変形できる。

ここで、電流ベクトルの係数部分を取り出して変形すると

$$\begin{aligned}
& (-X_d \sin \beta + jX_q \cos \beta) e^{-j\beta} \\
&= \left(-X_d \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{j2} + jX_q \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2} \right) e^{-j\beta} \\
&= jX_d \frac{1 - e^{-j2\beta}}{2} + jX_q \frac{1 + e^{-j2\beta}}{2} \\
&= j \frac{X_d + X_q}{2} + j \frac{X_q - X_d}{2} e^{-j2\beta} \\
&= \frac{X_q - X_d}{2} \sin 2\beta + j \left(\frac{X_d + X_q}{2} - \frac{X_d - X_q}{2} \cos 2\beta \right) \\
&= R_s + jX_s \dots\dots\dots (\text{付 2})
\end{aligned}$$

となり、等価インピーダンス表現が得られる。

同様に、(23) 式を変形し、(5)、(6)、(14)、(15)、(22)、(24)、(29) 式を用いると、

$$\begin{aligned}
i &= I_1 e^{j(\omega t + \beta)} = (I / \sqrt{3}) e^{j\beta} e^{j\omega t} \\
&= (I \cos \beta + jI \sin \beta) (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\
&= (I_q - jI_d) (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\
&= \left(-\frac{V_d}{X_q} - j \frac{V_q - E}{X_d} \right) (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\
&= \left\{ j \frac{E}{X_d} + \left(\frac{V \sin \delta}{X_q} - j \frac{V \cos \delta}{X_d} \right) \right\} (e^{j\omega t} / \sqrt{3}) \\
&= i_m + \left(\frac{\sin \delta}{X_q} - j \frac{\cos \delta}{X_d} \right) e^{-j\delta} V \dots\dots\dots (\text{付 3})
\end{aligned}$$

と変形できる。

ここで、電圧ベクトルの係数部分を取り出して変形すると

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin \delta}{X_q} - j \frac{\cos \delta}{X_d} \right) e^{-j\delta} \\
&= \left(\frac{e^{j\delta} - e^{-j\delta}}{j2X_q} - j \frac{e^{j\delta} + e^{-j\delta}}{2X_d} \right) e^{-j\delta} \\
&= -j \frac{1 - e^{-j2\delta}}{2X_q} - j \frac{1 + e^{-j2\delta}}{2X_d} \\
&= -j \left(\frac{X_d + X_q}{2X_d X_q} \right) - j \left(\frac{X_q - X_d}{2X_d X_q} \right) e^{-j2\delta} \\
&= \frac{X_d - X_q}{2X_d X_q} \sin 2\delta - j \frac{X_d + X_q - (X_d - X_q) \cos 2\delta}{2X_d X_q} \\
&= G_r - jB_r \dots\dots\dots (\text{付 4})
\end{aligned}$$

となり、等価アドミタンス表現が得られる。

近 藤 稔 (正員) 1972 年 8 月 18 日生。1997 年 3 月東京大学大学院機械工学専攻修士課程修了。現在、(財) 鉄道総合技術研究所にて鉄道車両の駆動用電動機の研究開発に従事。工学博士。