離散値形完全モデル追従コントローラの構成

正 員 神 谷 祐 二 (北見工大)

1. ま え が き

サーボ系設計法においては、定常ロバスト性が保証され、任意の動特性を実現できることのみならず、パラメータ変動や外乱の影響を受けにくい低感度特性を実現できることが要求される。さらに、これらの要求を満足させる1入力1出力連続値形制御対象に対するサーボ系設計法として、定常ロバスト性および動特性を満足している規範モデルの出力に、制御対象の出力を追従させることを基本原理としたモデル追従法⁽¹⁾を報告した。モデル追従法によって設計されるコントローラは、規範モデル、静的前向き補償器および安定化補償器から構成される。規範モデルは制御対象の入出力伝達特性を、安定化補償器は定常ロバスト性および感度特性をそれぞれ規定し、静的前向き補償器は制御対象の極配置を修正する。この結果、モデル追従系において、制御対象の入出力伝達特性と感度特性はそれぞれ独立に設定することが可能であり、二自由度系として知られている Conditional Feedback System⁽²⁾の拡張となっている。

しかし、入力信号が $(l-1)$ 次多項関数のとき、規範モデルに対する定常ロバスト性を実現するために、安定化補償器の伝達関数を l 形にする必要があったこと、静的前向き補償器によって制御対象の零点の修正は行われず、感度特性に影響を及ぼしていたこと、の二点が改良すべき点として残されていた。

本論文は文献(1)を離散値化すると共に、(i)規範モデルにフィードバック系を採用したこと、(ii)前向き補償器に動特性を持たせたこと、の二点において、文献(1)を改良している。(i)の結果、全系の定常ロバスト性をも規範モデルによって規定することが可能となり、安定化補償器を零形としてその次数を低減できること、および規範モデルのフィードバックループを感度特性の改善に利用できること、(ii)の結果、制

御対象の極および零点の双方の修正が可能となり、感度特性が著しく向上すること、が明らかにされている。

文献(1)において、安定化補償器は最適レギュレータ技法を用いて構成され、全系の感度特性と二次評価関数の関係はカルマン方程式から導かれた。しかし、離散値系においては、連続値形カルマン方程式に対応する関係式はまだ報告されていない。従って、離散値系の感度特性を論じる場合に、サンプル周期 T を十分小さくするとき、連続値形カルマン方程式は離散値系においても近似的に成立するとの直感から、連続値系であらかじめ安定化補償器を設計した後、これを離散値化することが考えられる。しかし、コントローラでの演算時間を制御対象に対するむだ時間として処理する場合、連続値系で安定化補償器を設計することは現実的ではない。このため、本論文では新たな離散値化の手法を提案して、直接離散値形近似カルマン方程式を導き、離散値形モデル追従系の感度特性を二次評価関数との関連で論じることを可能にしている。

本論文で提案されるモデル追従系と、Davison 氏の設計法によって得られた系⁽³⁾⁽⁴⁾は、構造において極めて類似している。すなわち、Davison 氏の系のコントローラは、サーボ補償器、前向き補償器および安定化補償器から構成され、サーボ補償器がモデル追従系における規範モデルに対応している。しかし、Davison 氏のサーボ補償器が定常ロバスト性を、安定化補償器が動特性をそれぞれ規定するのに対し、モデル追従系における規範モデルは定常ロバスト性および動特性を、安定化補償器は感度特性をそれぞれ規定しており、それぞれの機能の点において異なっている。

2. エラーシステム

可制御、可観測な1入力1出力制御対象

$$\left. \begin{aligned} X(k+1) &= PX(k) + qu(k) \\ y(k) &= rX(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

を考える。(1)式において、 $X(k)$ は n 次元状態ベクトル、 $u(k)$ はスカラー入力、 $y(k)$ はスカラー出力、

Construction of a Discrete Perfect Model Following Controller.
By Yuji Kamiya, Member (Department of Electrical Engineering, Kitami Institute of Technology).
神谷祐二：正員，北見工業大学電気工学科

P, q, r はそれぞれ適当な大きさの定数行列で、入出力パルス伝達関数は

$$G_0(z) = \frac{q_n z^{n-1} + \dots + q_1}{z^n + p_n z^{n-1} + \dots + p_1} \dots\dots\dots (2)$$

で与えられ、(2)式の零点の絶対値は1より小さいとする。モデルと制御対象の出力追従誤差を論じるために、(1)式における n 次元状態ベクトル $X(k)$ を

$$\begin{aligned} y(k) &= y_1(k), y(k+1) = y_2(k), \dots, y(k+n-1) \\ &= y_n(k) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

として定義される n 次元ベクトル $\tilde{Y}(k) = (y_1(k) \dots y_n(k))'$ (' : 行列の転置) に変換することを考える。 $\tilde{Y}(k)$ に関するシステム方程式は、(2)式の入出力パルス伝達関数を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}(k+1) &= \tilde{P}\tilde{Y}(k) + \tilde{q}\tilde{U}(k) \\ y(k) &= \tilde{r}\tilde{Y}(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4a)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \tilde{U}(k) &= [q_1 \dots q_n] (u(k) \dots u(k+n-1))' \\ &\dots\dots\dots (4b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -p_1 & \dots & \dots & -p_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{r} &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \end{aligned}$$

として得られる。

次に、指定された定常ロバスト性および動特性をもった規範モデルを、図1に示されるフィードバック系で与え、 $G_m(z)$ は(5)式で記述されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} Z(k) &= AZ(k) + bv(k) \\ w(k) &= cZ(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $Z(k)$: m 次元状態ベクトル、 $v(k)$: スカラー入力、 $w(k)$: スカラー出力、 A, b, c : それぞれ適当な大きさの定数行列

入出力パルス伝達関数は

$$G_m(z) = \frac{b_m z^{m-1} + \dots + b_1}{z^m + a_m z^{m-1} + \dots + a_1} \dots\dots\dots (6)$$

で与えられ、(6)式の極は制御対象の零点を含まないものとする。制御対象に対すると同様に、(5)式の m 次元状態ベクトル $Z(k)$ を

$$\begin{aligned} w(k) &= w_1(k), w(k+1) = w_2(k), \dots, \\ w(k+n-1) &= w_n(k) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

図1 規範モデル

Fig. 1. Reference model.

として定義された n 次元ベクトル $\tilde{W}(k) = (w_1(k) \dots w_n(k))'$ に変換することを考える。この場合、 $\tilde{W}(k)$ に関するシステム方程式は、 n と m の大小関係にかかわらず

$$\left. \begin{aligned} \tilde{W}(k+1) &= \tilde{A}\tilde{W}(k) + \tilde{q}w_{n+1}(k) \\ w(k) &= \tilde{r}\tilde{W}(k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} w_{n+1}(k) &= w(k+n) \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

として表しておく。

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k) &= \tilde{W}(k) - \tilde{Y}(k) \\ f(k) &= w(k) - y(k) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

と定義すると、 $\tilde{F}(k), f(k)$ に関して(4), (8)式から

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k+1) &= \tilde{P}\tilde{F}(k) + (\tilde{A} - \tilde{P})\tilde{W}(k) \\ &\quad + \tilde{q}(w_{n+1}(k) - \tilde{U}(k)) \\ &= \tilde{P}\tilde{F}(k) + \tilde{q}([p_1 \dots p_n]\tilde{W}(k) \\ &\quad + w_{n+1}(k) - \tilde{U}(k)) \dots\dots\dots (10a) \end{aligned}$$

$$f(k) = \tilde{r}\tilde{F}(k) \dots\dots\dots (10b)$$

の関係を導くことができる。(10a)式の右辺第2項は $\tilde{F}(k)$ に関しては外乱とみなせる項であり、これらの外乱項を

$$u(k) = K_e Z(k) + h(k) + j(k) \dots\dots\dots (11)$$

の制御則によって消去することを考える。(11)式において $h(k)$ は

$$\begin{aligned} &[q_1 \dots q_n] [h(k) \dots h(k+n-1)]' \\ &= [k_1 \dots k_n] [v(k) \dots v(k+n-1)]' \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

で与えられ、 $j(k)$ は新たな外部入力である。外乱項を状態 $Z(k)$ および入力項 $v(k+i)$ ($i=0, \dots, n-1$) で表すと

$$\begin{aligned} &[p_1 \dots p_n]\tilde{W}(k) + w_{n+1}(k) \\ &= [p_1 \dots p_n] [w_1(k) \dots w_{n+1}(k)]' \\ &= [p_1 \dots p_n] \left\{ \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} Z(k) \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ cb & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ cA^{n-1}b & \dots & cb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ \vdots \\ v(k+n-1) \end{bmatrix} \right\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

となる。一方、(4b)式の $\tilde{U}(k)$ に(11)式の $u(k)$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \tilde{U}(k) = [q_1 \cdots q_n] & \begin{bmatrix} K_z \\ K_z A \\ \vdots \\ K_z A^{n-1} \end{bmatrix} Z(k) \\ & + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ K_z b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ K_z A^{n-2} b & \cdots & K_z b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(k) \\ \vdots \\ v(k+n-2) \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} h(k) \\ \vdots \\ h(k+n-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j(k) \\ \vdots \\ j(k+n-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。(13)式と(14)式を比較して

$$[q_1 \cdots q_n] \begin{bmatrix} K_z \\ K_z A \\ \vdots \\ K_z A^{n-1} \end{bmatrix} = [p_1 \cdots p_n \ 1] \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^n \end{bmatrix} \quad (15)$$

から K_z を(16)式で与えるとき、

$$K_z = [p_1 \cdots p_n \ 1] \begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^n \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^n q_i A^{i-1} \right]^{-1} \quad (16)$$

(10a)式の外乱項から $Z(k)$ の項を消去することができる。(16)式における $\left[\sum_{i=1}^n q_i A^{i-1} \right]$ の逆行列は A の固有値が制御対象の零点を含まないとき、常に存在する⁽⁵⁾。次に、(12)式における k_i ($i=1, \dots, n$) を

$$[k_1 \cdots k_n] = [p_1 \cdots p_n \ 1] \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ cb & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ cA^{n-1}b & \cdots & cb \end{bmatrix}$$

$$- [q_1 \cdots q_n] \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ K_z b & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ K_z A^{n-2}b & \cdots & K_z b & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

で与えるとき、(13)、(14)式に存在する $v(k+i)$ ($i=0, \dots, n-1$) の項をすべて消去することができる。この結果、(10)式は

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k+1) &= \tilde{P} \tilde{F}(k) - \tilde{q} \tilde{J}(k) \\ f(k) &= \tilde{r} \tilde{F}(k) \end{aligned} \quad (18a)$$

ここで、

$$\tilde{J}(k) = [q_1 \cdots q_n] [j(k) \cdots j(k+n-1)]' \quad (18b)$$

として表すことができる。(18)式のシステム行列、制御行列および出力行列は(4a)式のそれらと同じであり、更に(18b)式の $\tilde{J}(k)$ と(4b)式の $\tilde{U}(k)$ は同じ表現となっている。従って、(1)式と(4a)式が相互に変換できることから、(18a)式を

$$\begin{aligned} E(k+1) &= PE(k) - qj(k) \\ f(k) &= rE(k) \end{aligned} \quad (19)$$

に変換することができる。(19)式をエラーシステムと呼ぶ。(19)式において $E(0)=0$, $j(k)=0$ とすると $f(k)=0$ となることは明らかである。これは、図2の系を構成して K_z を(16)式で、

$$G_h(z) = \frac{k_n z^{n-1} + \cdots + k_1}{q_n z^{n-1} + \cdots + q_1} \quad (20)$$

として k_i ($i=1, \dots, n$) を(17)式で与えるとき、 $v(k)$ を入力、 $y(k)$ を出力とするパルス伝達関数は $G_m(z)$ となっていることを意味する。次章においては初期外乱 $E(0)$ を考慮し、エラーシステムの最適レギュレータ問題を考える。

3. 安定化補償器

エラーシステムにおける状態 $E(k)$ を直接観測することは一般に不可能なので、エラーシステムの入力端に $(n-1)$ 個の T 秒のむだ時間要素 (T : サンプル周

図2 エラーシステム
Fig. 2. Error system.

期)を付加した $(2n-1)$ 次の拡大系に対し、最適レギュレータ技法を適用し、最終的に $f(k)$ を入力、 $j(k)$ を出力とする安定化補償器を構成する。第4章で感度特性を論じる際、感度と二次評価関数を関連づける必要から、最初に連続値系の近似離散化について考える。

〈3・1〉 近似離散値系 (19)式の離散値形エラーシステムは

$$\dot{E} = P_c E - q_c j \quad \dots\dots\dots (21)$$

なる連続値形エラーシステムをサンプル周期 T でサンプルし、零次ホールドして得られた系と考える。すなわち、 P と P_c 、 q と q_c の間には

$$P = \exp[P_c T] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$q = \int_0^T \exp[P_c T] dt q_c \quad \dots\dots\dots (23)$$

の関係が満足されている。いま、(21)式の系の入力側に1個の積分器を付加した合成系を考えると、合成系の状態方程式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{j}_1 \\ \dot{E} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -q_c & P_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_0 \\ &= P_c^{(1)} \begin{bmatrix} j_1 \\ E \end{bmatrix} + q_c^{(1)} u_0 \quad \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

と書ける。(24)式の系を周期 T でサンプルし、零次ホールドした離散値系は、 T の二次以上の項を無視すると

$$P^{(1)} = \exp[P_c^{(1)} T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q_c^{(1)} & P \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\begin{aligned} q^{(1)} &= \int_0^T \exp[P_c^{(1)} T] dt q_c^{(1)} \\ &= \left[\frac{T}{(I/2! + P_c^{(1)} T/3! + \dots) q_c^{(1)} T^2} \right] \\ &\doteq \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

の関係から

$$\begin{bmatrix} j_1(k+1) \\ E(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -q_c^{(1)} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1(k) \\ E(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} u_0(k) \quad \dots\dots\dots (27)$$

と表すことができ、その構成図は図3となる。(21)式の系の入力側に $(n-2)$ 個の積分器を付加した合成系の状態方程式を

図3 $(n+1)$ 次近似離散値系

Fig. 3. $(n+1)$ th approximated discrete system.

$$\begin{bmatrix} j_{n-2} \\ \vdots \\ j_1 \\ E \end{bmatrix} = P_c^{(n-2)} \begin{bmatrix} j_{n-2} \\ \vdots \\ j_1 \\ E \end{bmatrix} + q_c^{(n-2)} u_0 \quad \dots\dots (28)$$

と表すと、 $(n-1)$ 個の積分器を付加した合成系は

$$\begin{bmatrix} j_{n-1} \\ j_{n-2} \\ \vdots \\ j_1 \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_c^{(n-2)} & P_c^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{n-1} \\ j_{n-2} \\ \vdots \\ j_1 \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

と書くことができる。(24)式から(27)式を導いたと同様に、(29)式の系を周期 T でサンプルし、零次ホールドした離散値系は、 T の二次以上の項を無視すると

$$\begin{bmatrix} j_{n-1}(k+1) \\ j_{n-2}(k+1) \\ \vdots \\ j_1(k+1) \\ E(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_c^{(n-2)} & P^{(n-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{n-1}(k) \\ j_{n-2}(k) \\ \vdots \\ j_1(k) \\ E(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} u_0(k) \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで、

$$P^{(i+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_c^{(i)} & P^{(i)} \end{bmatrix}, \quad q_c^{(i+1)} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (i=1, \dots, n-2)$$

と表すことができ、その構成図は図4となる。以後の議論を簡単にするため、 $\Gamma = (j_{n-1} \dots j_1; E)'$ として(29)式、(30)式をそれぞれ

$$\dot{\Gamma} = \hat{P}_c \Gamma + \hat{q}_c u_0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

$$\Gamma(k+1) = \hat{P} \Gamma(k) + \hat{q} u_0(k) \quad \dots\dots\dots (32)$$

と書き改めておく。(22)、(23)式において T の二次以上の項を無視して、それぞれ

$$P \doteq I + P_c T \quad \dots\dots\dots (33)$$

$$q \doteq q_c T \quad \dots\dots\dots (34)$$

と近似するとき、(31)式と(32)式のシステム行列およ

図4 $(2n-1)$ 次近似離散値系

Fig. 4. $(2n-1)$ th approximated discrete system.

び制御行列の間においても、それぞれ

$$\hat{P} \doteq I + \hat{P}_c T \dots\dots\dots (35)$$

$$\hat{q} \doteq \hat{q}_c T \dots\dots\dots (36)$$

の関係が成立している。

〈3・2〉 離散値形近似カルマン方程式 (31)式の連続値系に対し、二次評価関数

$$PI = \int_0^{\infty} [\Gamma' \theta \theta' \Gamma + \rho u_0^2] dt \dots\dots\dots (37)$$

を最小にする最適解は、よく知られているように

$$u_0 = -K_c \Gamma \dots\dots\dots (38)$$

$$K_c = \rho^{-1} \hat{q}_c' R_c \dots\dots\dots (39)$$

$$R_c \hat{P}_c + \hat{P}_c' R_c - R_c' \hat{q}_c \rho^{-1} \hat{q}_c' R_c + \theta \theta' = 0 \dots\dots\dots (40)$$

として得られ、更にカルマン方程式

$$|1 + K_c(sI - \hat{P}_c)^{-1} \hat{q}_c|^2 = 1 + \rho^{-1} |\theta'(sI - \hat{P}_c)^{-1} \hat{q}_c|^2 \dots\dots\dots (41)$$

が導かれる。次に、(32)式の離散値系に対して(37)式と同じ重み行列からなる二次評価関数

$$PI = \sum_{k=0}^{\infty} [\Gamma''(k) \theta \theta' \Gamma(k) + \rho u_0^2(k)] \dots\dots\dots (42)$$

を最小にする最適解を求めると

$$u_0(k) = -K \Gamma(k) \dots\dots\dots (43)$$

$$K = (\rho + \hat{q}' R \hat{q})^{-1} \hat{q}' R \hat{P} \dots\dots\dots (44)$$

$$R = \theta \theta' + \hat{P}' R \hat{P} - \hat{P}' R \hat{q} (\rho + \hat{q}' R \hat{q})^{-1} \hat{q}' R \hat{P} \dots\dots\dots (45)$$

として得られる。(35)、(36)の近似式を(45)式に代入し、 T の二次以上の項を無視すると、 $RT = R_c$ として(40)式を得、更に

$$K = K_c \dots\dots\dots (46)$$

を導くことができる⁽⁶⁾。一方、(35)、(36)式および

$$z = \exp[sT] \doteq 1 + sT \dots\dots\dots (47)$$

の近似を用いると

$$(sI - \hat{P}_c)^{-1} \hat{q}_c \doteq [(1 + sT)I - \hat{P}]^{-1} \hat{q} = (zI - \hat{P})^{-1} \hat{q} \dots\dots\dots (48)$$

の関係が導かれ、(46)式を考慮すると(41)式の連続値形カルマン方程式から、離散値形近似カルマン方程式として

$$|1 + K(zI - \hat{P})^{-1} \hat{q}|_{z=1+j\omega}^2 \doteq 1 + \rho^{-1} |\theta'(zI - \hat{P})^{-1} \hat{q}|_{z=1+j\omega}^2 \dots\dots\dots (49)$$

を得ることができる。

〈3・3〉 離散値形最適動的補償器 (44)式の最適フィードバック係数 K を分割して、 $K = [K_J : K_E]$ とし、(43)式を

$$u_0(k) = K_J J(k) + K_E E(k) \dots\dots\dots (50)$$

ここで、

$$J(k) = [j_{n-1}(k) \cdots j_1(k)]'$$

と書き改め、更にエラーシステムの出力項 $f(k+j)$ ($j=0, \dots, n-1$) を用いて

$$u_0(k) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i j_{i+1}(k) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j f(k+j) \dots\dots\dots (51)$$

と表現することを考える。このとき、 K_J 、 K_E と α_i 、 β_j の間には

$$[\beta_0 \cdots \beta_{n-1}] \begin{bmatrix} r \\ \vdots \\ r P^{n-1} \end{bmatrix} = K_E \dots\dots\dots (52)$$

$$\sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i j_{i+1}(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \sum_{l=1}^i h_l j_l(k) = K_J J(k) \dots\dots\dots (53)$$

ここで、

$$[h_1 \cdots h_{n-1}] = [r P^{n-2} q \cdots r q] \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & T & 0 & \cdots & \cdots \\ 1 & 2T & T^2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & 3T & 3T^2 & T^3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & 4T & 6T^2 & 4T^3 & T^4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \dots\dots\dots (54)$$

の関係が成立し、制御対象が可観測のとき、 β_j ($j=0, \dots, n-1$) は(52)式から、 α_i ($i=0, \dots, n-2$) は(53)式から、それぞれ一意に K_E 、 K_J に対応して求めることができる。すなわち、図4に示される合成系の $u_0(k)$ を(51)式で与えて $f(k)$ を入力、 $j_1(k)$ を出力とすると最適動適補償器が得られ、そのパルス伝達関数は

$$G_c(z) = \frac{T^{n-1}(\beta_{n-1} z^{n-1} + \cdots + \beta_0)}{(z-1)^{n-1} + T \alpha_{n-2} (z-1)^{n-2} + \cdots + T^{n-1} \alpha_0} \dots\dots\dots (55)$$

と書くことができる。

最適動適補償器 $G_c(z)$ を安定化補償器として図5の

図5 完全モデル追従系

Fig. 5. Perfect model following system.

系を構成するとき、 $v(z)$ から $y(z)$ までのパルス伝達関数が $G_m(z)$ となっていることから、 $v(z)$ から $y(z)$ までのパルス伝達関数は図1の規範モデルのそれに完全に一致し、規範モデルが有する定常ロバスト性および動特性はそのまま図5の系に保存される。図5の系を完全モデル追従系と呼ぶ。次章において、安定化補償器と完全モデル追従系の感度特性との関係を論ずる。

4. 感度特性

制御対象のパラメータ感度を

$$\int_p^{G_0}(z) = \frac{\partial |n G_0(z)|}{\partial |n p|} \dots\dots\dots (56)$$

で定義すると、完全モデル追従系のパラメータ感度は

$$\int_p^{G_f}(z) = \frac{1}{(1+G_m(z))(1+G_0(z)G_c(z))} \int_p^{G_0}(z) \dots\dots\dots (57)$$

として得られる。安定化補償器の係数が最適フィードバック係数 K_f , K_E に一意に対応していることから、(49)式の近似カルマン方程式が成立し、

$$\begin{aligned} |1+G_0(z)G_c(z)| &\doteq \sqrt{1+\rho^{-1}|\theta'(zI-\hat{P})^{-1}\hat{q}|^2} \\ &\times \left| \frac{(z-1)^{n-1}}{(z-1)^{n-1}+T\alpha_{n-2}(z-1)^{n-2}+\dots+T^{n-1}\alpha_0} \right| \end{aligned} \dots\dots\dots (58)$$

の関係を導くことができる。

(58)式は感度特性と評価関数の近似的な関係を示しており、一般に感度特性の劣下する高周波領域において

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(z-1)^{n-1}}{(z-1)^{n-1}+T\alpha_{n-2}(z-1)^{n-2}+\dots} \right| * \\ &* \frac{1}{1+T^{n-1}\alpha_0} \Big|_{z=\exp[j\omega]} \doteq 1 \dots\dots\dots (59) \end{aligned}$$

となることから、高周波数領域においても

$$|1+G_0(z)G_c(z)| > 1 \dots\dots\dots (60)$$

が成立し、規範モデル自身の感度特性をも考慮すると(57), (58)式から

$$\left| \int_p^{G_f}(z) \right|_{z=\exp(j\omega)} < \left| \int_p^{G_0}(z) \right|_{z=\exp(j\omega)} \dots\dots\dots (61)$$

の関係を実現することができる。制御対象の出力端に外乱 d が加わるとき、外乱に対する完全モデル追従系の応答は

$$y(z) = \frac{1}{\{1+G_m(z)\} \{1+G_0(z)G_c(z)\}} d(z) \dots\dots\dots (62)$$

となり、(57)式のパラメータ感度特性は外乱感度特性

をも表している。

安定化補償器を設計する際、(58)式は感度特性と二次評価関数の重み係数との間のおおよその関係を知るだけにとどめ、具体的には $|(1+G_m(z))(1+G_0(z)G_c(z))|$ の周波数特性を直接監視しながら θ , ρ を逐次修正して所定の感度特性を満足させる $G_c(z)$ を得る手順となる。

5. 演算時間遅れ

コントローラでの演算時間遅れをサンプル周期 T とすると、演算時間遅れはエラーシステムに T 秒のむだ時間要素を付加することにより処理することができる。(19)式の離散値形エラーシステムの入力側に T 秒のむだ時間要素を付加した合成系の状態方程式は、

$$\begin{bmatrix} j_0(k+1) \\ E(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -q & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_0(k) \\ E(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} j_1(k) \dots\dots\dots (63)$$

と表すことができる。

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -q & P \end{bmatrix}$$

として、

$$P^{(0)} = I + P_c^{(0)} T \dots\dots\dots (64)$$

の関係から $P_c^{(0)}$ を求めると、

$$P_c^{(0)} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ -q/T & (P-I)/T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ -q_c & P_c \end{bmatrix} \dots\dots\dots (65)$$

となり、 $q^{(0)} = \{1 \ 0\}'$ として

$$q^{(0)} = q_c^{(0)} T \dots\dots\dots (66)$$

の関係から $q_c^{(0)}$ を求めると、

$$q_c^{(0)} = \begin{bmatrix} 1/T \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (67)$$

となる。従って、(64), (66)式の意味で(63)式の離散値系に対応する連続値形は

$$\begin{bmatrix} \dot{j}_0 \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T & 0 \\ -q_c & P_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_0 \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/T \\ 0 \end{bmatrix} j_1 \dots\dots\dots (68)$$

と書くことができ、(21)式の連続値形エラーシステムの入力側に

$$\exp(Ts) \doteq \frac{1}{1+Ts} \dots\dots\dots (69)$$

と近似したむだ時間要素を付加したことに等価となっている。(64), (66)式の関係を考慮すると、新たに連続値形エラーシステムとして(21)式の代わりに(68)式を用いて、第3章以降の議論を直接適用することができる。ただし、新たに付加したむだ時間要素のために、エラーシステムは $(n+1)$ 次となり、このため安定化補償器の次数は一次増加して

$$G_c(z) = \frac{T^{n-1}(\beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_0)}{z(z-1)^{n-1} + T\alpha_{n-1}z(z-1)^{n-2} + \dots + T^{n-2}\alpha_1z + T^{n-1}\alpha_0} \quad (70)$$

となる。(70)式において、 $\beta_j (j=0, \dots, n-1)$ は(52)式から、 $\alpha_i (i=0, \dots, n-1)$ は

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i j_i(k) + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \sum_{l=0}^i h_l j_i(k) = \bar{K}_J \bar{J}(k) \quad (71)$$

ここで、

$$\bar{J}(k) = \begin{bmatrix} J(k) \\ j_0(k) \end{bmatrix}$$

$\bar{K}_J$ は $\bar{J}(k)$ に対する最速フィードバック係数であり、

$$(h_0 \dots h_{n-1}) = (rP^{n-2}q \dots rq) \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 1 & 1 & T & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 2T & T^2 & 0 \\ 1 & 1 & 3T & 3T^2 & T^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (72)$$

から求めることができる。

6. 例 題

例題によって実際に感度特性を求める。制御対象を二次とし、

$$\begin{bmatrix} X_1(k+1) \\ X_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9.95 \times 10^{-4} \\ 0 & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(k) \\ X_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.998 \times 10^{-7} \\ 9.995 \times 10^{-4} \end{bmatrix} u(k) \quad (73)$$

で与える。これは連続値形制御対象

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (74)$$

を周期 $T=10^{-3}$ 秒でサンプルし、零次ホールドした離散値系である。この場合、図4の合成系に対応する状態方程式は

$$\begin{bmatrix} j_1(k+1) \\ E_1(k+1) \\ E_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4.998 \times 10^{-7} & 1 & 9.95 \times 10^{-4} \\ 9.995 \times 10^{-4} & 0 & 0.999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1(k) \\ E_1(k) \\ E_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_0(k) \quad (75)$$

となる。(58)式右辺の $\theta'(zI - \hat{P})^{-1} \hat{q}$ の項は $z=1+j\omega T=1+j10^{-3}\omega$, $\theta' = [\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$ とすると、

$$\begin{aligned} & \theta'(zI - \hat{P})^{-1} \hat{q} \Big|_{z=1+j\omega \times 10^{-3}} \\ &= \frac{(-10^{-9}\omega\theta_1 + 4.998 \times 10^{-4}\theta_2) + j(10^{-9}\theta_1 - \omega^2(1+j\omega))}{-\omega^2(1+j\omega)} \times \\ & \quad \times \frac{+4.998 \times 10^{-7}\theta_2 + 9.995 \times 10^{-7}\theta_3}{\omega} \times 10^{-9} \quad (76) \end{aligned}$$

として得られ、低周波領域における感度特性は主に θ_2 によって支配されることがわかる。この傾向は、図6に示された $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3]$ に対する $|1+G_0(z)G_c(z)|$ の周波数特性によっても証明されている。

以上の結果は、(58)式が θ , ρ を逐次修正して適正な感度特性を示す安定化補償器を得る際の、具体的な修正指針となることを意味している。

7. む す び

規範モデル、動的前向き補償器および安定化補償器

図6 $|1+G_0(z)G_c(z)|$ の周波数特性

Fig. 6. Frequency characteristics of $|1+G_0(z)G_c(z)|$.

から構成される離散値形完全モデル追従サーボコントローラについて論じ、全系の入出力伝達特性および定常ロバスト性は規範モデルによって、感度特性は安定化補償器によって、それぞれ独立に設定できることを示した。これまで離散値系において、連続値形カルマン方程式に対応した関係式は導かれておらず、離散値系で最適レギュレータ系を構成したとき、その感度特性と二次評価関数との関係を論じることはできなかった。新たに提案された離散値化の手法によって、連続値形カルマン方程式から離散値形近似カルマン方程式を導き、レギュレータ技法によって安定化補償器を設計する際、感度特性の観点から二次評価関数の重み係数の修正指針として、この離散値形近似カルマン方程

式を利用できることを例題で明らかにした。

(昭和 62 年 1 月 5 日受付)

文 献

- (1) Y. Kamiya: "Servo-system design technique utilising sensitivity as a design parameter", *IEE Proceedings*, Pt. D, **130**, 209 (1983)
- (2) G. Lang & J.M. Ham: "Conditional feedback systems-A new approach to feedback control", *AIEE Trans.*, **74**, 152 (1955)
- (3) E.J. Davison: "The feedforward control of linear multivariable time-invariant systems", *Automatica*, **9**, 561 (1973)
- (4) E.J. Davison: "The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-21**, 25 (1976)
- (5) S. Barnett: *Matrices control theory* (1971)
- (6) 美多: デジタル制御理論 (昭 53)