プライザッハ分布関数の対称化とヒステリシス特性のシミュレーション

正員 奥村 浩士 (京 都 大)
 非会員 加藤 千 詞 (中部電力)
 正員 木 嶋 昭 (京 都 大)

1. は し が き

強磁性体のヒステリシス特性をプライザッハ分布関数⁽¹⁾を用いて模擬する方法⁽²⁾では、その分布関数の格子間隔はできる限り細かいほうが滑らかなヒステリシス曲線を得るのに都合が良い。ところが、下降または上昇磁化曲線群の実測結果から求められる分布関数は格子間隔が粗すぎ、デジタルシミュレーションに用いる分布関数としては適切ではない。更に、このようにして求められたプライザッハ分布関数には不安定性および負の関数値を与える領域の存在⁽³⁾⁻⁽⁵⁾など、シミュレーションとその応用において不都合な点が生じる。

そこで本論文では、まず実測された分布関数を二次元補間により滑らかな分布関数に再構成する方法を述べる。次いで、磁化に比例する相互作用を導入することにより、上記の不都合な点が取除かれる⁽³⁾⁽⁴⁾ことを利用して、プライザッハ分布関数を対称化する方法を述べる。この場合、磁化との相互作用の強さを定める補正係数のおおよその値を、マイナーループから定める方法についても言及する。更に、このようにして定めた分布関数を用いて外部磁界に対するヒステリシス特性を模擬することは、非線形方程式の解法に帰着することを示し、そのアルゴリズムを与える。最後に、このアルゴリズムにより模擬されたヒステリシス特性は、マイナーループも含めて実測のヒステリシス特性と

かなり良く一致することを示す。

2. プライザッハ分布関数

強磁性体は、図1の角形ヒステリシス特性を示す磁気双極子の集合体とみなし、そのヒステリシス特性は、強磁性体に加わる有効磁界 H の増減に応じて、正、負の双極子の数を増減することにより生成されると考える。図1の磁気双極子は、磁界 H が増加して $H=x$ になると、磁化 J は $-1/2$ から $1/2$ へ跳躍し、減少して $H=y$ になるとその逆の過程をたどるものとする。区間 $[x, x+dx]$ と $[y, y+dy]$ に属する双極子の数は $K(x, y)dx dy$ により定まるものとし、 $K(x, y)$ をプライザッハ分布関数と呼ぶ⁽¹⁾。ここに、変数 x, y は互いに独立であり、分布関数 $K(x, y)$ は磁界 H には依存しないものとする。正、負の飽和磁界の強さを $+H_s, -H_s$ で表すと、逆方向に回る角形ヒステリシス特性はないものとして $K(x, y)$ の定義域 I は

$$I = \{(x, y) | y \leq x, |x| \leq H_s, |y| \leq H_s\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

で表される三角領域となる。従って、磁化 J と磁界

図1 磁気双極子のヒステリシス特性

Fig. 1. Hysteretic characteristics of magnetic dipole.

Symmetrization of Preisach Distribution Function and Simulation of Hysteretic Characteristics. By Kohshi Okumura, Member, (Department of Electrical Engineering, Kyoto University), Senzi Kato, Non-member (Chubu Electric Power Co., Ltd.), & Akira Kishima, Member (Department of Electrical Engineering, Kyoto University).

奥村浩士：正員，京都大学工学部電気系教室
 加藤千詞：非会員，中部電力（株）
 木嶋 昭：正員，京都大学工学部電気系教室

H の関係は二重積分

$$J = \iint_{\Omega} K(x, y) dx dy, \quad \Omega = \Omega(H) \subseteq I \dots (2)$$

によって与えられる。ここに、積分領域 Ω は I の部分集合であり、磁界 H に応じて変化する。(2)式によりヒステリシス特性を模擬することができる⁽²⁾。

3. 分布関数の問題点

分布関数 $K(x, y)$ は強磁性体の下降磁化曲線などを用いて、離散分布関数として実験的に定めることができる⁽³⁾⁽⁴⁾。下降曲線を用いて定められる分布関数には次のような問題点がある。

〈3・1〉 不安定性 下降磁化曲線を用いて定めた分布関数と上昇磁化曲線により定められた分布関数は一般に異なる。このように、用いる磁化曲線によって異なった分布関数が得られることを、プライザッハ分布関数の不安定性という。

〈3・2〉 負領域の存在 下降磁化曲線により分布関数 $K(x, y)$ を定めることを考える。図2に示すような下降磁化曲線群を求め、微小量 ΔH に対し、 H_r , $H_r + \Delta H$ を始点とするそれぞれの下降曲線の H_t , $H_t + \Delta H$ に対応する磁化の値の差 $\Delta J_{rt}'$ と $\Delta J_{rt}''$ を求める。このとき、(2)式より、 $x = H_r$, $y = H_t$ における分布関数の値は

$$K(H_r, H_t) = \frac{\Delta J_{rt}'' - \Delta J_{rt}'}{(\Delta H)^2} \dots \dots \dots (3)$$

で与えられる。図3に示す下降曲線群で、それぞれの曲線上で dJ/dH が最大になる点を連ねると、破線のようなほぼ直線 l が得られる。この直線 l は一般に負のこう配をもっているので、下降曲線群で下方に位置する曲線ほど、 H の減少に対して J の減少が著しくなる。従って、磁界が同一の点での H の減少量に対する J の減少量が、下方に位置する曲線のほうが大

図2 負の関数値の存在を説明するための図
Fig. 2. Figure for explaining negative values of distribution function.

図3 下降磁化曲線の透磁率 (dJ/dH) がほぼ最大の点を結んだ直線 l

Fig. 3. Straight line l passing through points on which take almost maximal values of magnetic permeability (dJ/dH).

図4 マイナループの相似性

Fig. 4. Similarity of minor loops.

きくなる場合が生じ、(3)式で $\Delta J_{rt}' > \Delta J_{rt}''$ が成り立ち、 $K(H_r, H_t) < 0$ となる場合が生じる。

〈3・3〉 マイナループの相似性 プライザッハダイアグラム⁽¹⁾によりヒステリシス特性を描かせると、図4のように $H_b \leq H \leq H_c$ の範囲で生成されるマイナループ (a), (b), (c) はすべて相似になる。実際の強磁性体ではこのようなことは生じないから、このことはプライザッハ分布関数に修正の余地があることを示している。

4. 有効磁界の導入

以上のプライザッハ分布関数の不都合な点を取除いて、現実に近いヒステリシス特性を模擬するために、次のようなモデルを考える。すなわち、磁気双極子に作用する磁界は外部磁界 H と、磁化 J との相互作用による磁界 kJ とを重ね合せた磁界

$$H_e = H + kJ \dots \dots \dots (4)$$

であるとする。ここに、 H_e を有効磁界、 k を補正係数と呼ぶことにする。図3の直線 l 上では、有効磁界が一定であり、こう配が負である。従って、(4)式から $k > 0$ であることがわかる。後述するような方法で

補正係数 k が定まれば、有効磁界 H_e に対して決定されるプライザハ分布関数は、外部磁界 H に対する分布関数とは異なり、問題点は実験誤差の範囲内で解決されることが考えられる。

5. 補間法による分布関数の決定

下降磁化曲線により分布関数を定めることを考える。この場合、実測データの測定精度に限界があるため、(3)式の ΔH , ΔJ_{r1} , ΔJ_{r2} などが測定誤差に対して十分大きな値をもたなければならない。測定により得られた格子間隔の粗い分布関数をシミュレーションに適した分布関数にするためには、測定データを補間し平滑化する必要がある。そこで、下降曲線のデータそのものを補間し、その結果から滑らかな分布関数を定める方法を提案する。

(5.1) 磁化特性の無次元化 外部磁界 H , 有効磁界 H_e , 磁化 J および磁束密度 B の飽和値をそれぞれ H_s , H_{es} , J_s および B_s で表す。新しい変数 h , h_e , j および b を

$$\left. \begin{aligned} h &= H/H_s, \quad h_e = H_e/H_{es} \\ j &= J/J_s, \quad b = B/B_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

により定義する。外部磁界 H , 磁化 J および磁束密度 B の間には

$$\left. \begin{aligned} B &= \mu_0 H + J \\ J &= F(H_e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

の関係がある。ただし、 μ_0 は真空の透磁率、 F は(2)式の H と J の関数関係を表す。(5)式により(4), (6)式を無次元化すると

$$\left. \begin{aligned} h_e &= \alpha h + \beta j \\ b &= \gamma h + \delta j \\ j &= f(h_e) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \beta &= 1, \quad \gamma + \delta = 1 \\ \alpha &= H_s/(H_s + kJ_s), \quad \beta = kJ_s/(H_s + kJ_s) \\ \gamma &= \mu_0 H_s/(\mu_0 H_s + J_s), \quad \delta = J_s/(\mu_0 H_s + J_s) \\ H_{es} &= H_s + kJ_s, \quad f(h_e) = F(H_e)/J_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

図5に示す h - j 平面上の下降曲線群において、下降し始める点の座標を (h_x, j_x) とすれば、

$$j_x = f(h_x) \quad (|h_x| \leq 1, |j_x| \leq 1) \dots\dots\dots (9)$$

となる。また、点 (h_x, j_x) を始点とする下降曲線上の点の座標を (h_y, j_y) で表し、 j_y と h_y の関係を

$$j_y = f(h_y | h_x) \quad (|h_y| \leq 1, |j_y| \leq 1) \dots\dots\dots (10)$$

で表す。従って、 f の逆関数を g で表せば、

$$h_y = g(j_y | j_x) \quad (-1 \leq j_y \leq j_x \leq 1) \dots\dots\dots (11)$$

図5 下降磁化曲線の関数表示の説明図

Fig. 5. Figure for explaining the representation of descending magnetization by function.

図6 j_x - j_y 平面上での下降磁化曲線を表す関数の定義域

Fig. 6. Domain of function representing descending magnetization curves on j_x - j_y plane.

となる。関数 g の定義は図6に示す三角領域であり、図5に示したそれぞれ下降曲線は図6の j_y 軸に平行な太線に対応する。

ここで、変数変換

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2}(j_x + 1) \\ \bar{y} &= \frac{j_y + 1}{j_x + 1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

を行い、図6の三角領域を $[0, 1] \times [0, 1]$ の正方領域に変換する。この変換により、(11)式は

$$h_y = \bar{g}(\bar{y} | \bar{x}) \triangleq g(2\bar{x}\bar{y} - 1 | 2\bar{x} - 1) \dots\dots\dots (13)$$

となる。従って、 $\bar{x}$ - $\bar{y}$ 平面内の格子点における $\bar{g}$ の値から、 $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$ の平滑化された曲面を求めておく。この曲面 $\bar{g}$ に対し、(12)式を用いて逆変換すれば、(11)式より $g(j_y | j_x)$ を定めることができる。

このような手法により、(13)式の平滑化の式として B スプライン二次元平滑化式⁽⁶⁾を用いて、フェライト鉄心の下降磁化特性の測定データから下降曲線群を求めた。その結果を図7に示す。同図の▲印で示した点は補間に用いたサンプル点である。

図 7 補間した下降磁化曲線群 (i : 励磁電流, Φ : 磁束)

Fig. 7. Groups of descending magnetization curves obtained by interpolation.

6. 有効磁界に対する分布関数

〈6・1〉 補正係数の推定法 下降磁化曲線の一部が小マイナーループの一部を構成していることを利用して、正規化した補正係数 β (k に対応する) を図 7 の補間結果を用いて求めてみる。すなわち、有効磁界を考慮するとき、〈3・3〉節の小マイナーループの相似性は、直線 $\alpha h + \beta j = 0$ に平行な直線上では小マイナーループは同一の形をとると言い換えることができる。このことを利用して、小マイナーループを種々求めることにより補正係数 β の大略の値を定める。図 8 に示すような小マイナーループに対して、増分磁化 $2j_w$ を一定に保ち、小マイナーループの始点における磁化 j_r を $-1 + 2j_w \leq j_r \leq 1$ の範囲内で変化させ、各々の j_r に対する小マイナーループを求め、その増分磁界 h_w を定める。このとき、各 j_r に対して、 h_w が最小値 h_{w0} をとるときの始点の座標を (h_{r0}, j_{r0}) で表す。この場合、小マイナーループが増分磁化率を与える線分 PQ とその中心に関し上下左右対称であるとき、小マイナーループの中心の座標 (h_{c0}, j_{c0}) は

$$h_{c0} = h_{r0} - h_{w0}, \quad j_{c0} = j_{r0} - j_{w0} \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる。この中心において、 $h_c = 0$ が成り立つものとするれば、補正係数 β は近似的に

$$\beta = - \left(\frac{j_{c0}}{h_{c0}} \right)^{-1} \quad \dots\dots\dots (15)$$

により与えられる。ただし、 $|j_{c0}| > h_{c0}$ とする。

この方法により、 $5.0 \times 10^{-4} \leq j_w \leq 7.0 \times 10^{-1}$ の j_w に対し β を計算した。その結果を図 9 に示す。(a) 図は中心 (h_{c0}, j_{c0}) の移動の様相を示し、(b) 図は β の値の変化の様相である。 j_w が小さい場合には h_w も小さいため、それから定まる中心の座標にもかなりの誤差を伴う。また、 j_w が大きくなり 1 に近い値をとる場合には、小マイナーループが非対称になり補正係数 β

図 8 小マイナーループ群からの補正係数の推定

Fig. 8. Estimation of correction factor from groups of small minor loops.

(a) 小マイナーループ中心の移動の様相

(a) The transfer state of centers of small minor loops.

(b) 補正係数 β の変化の様相(b) The state of variation of correction factor β .

図 9

Fig. 9.

の推定は、この方法では精度良く行えない。これらの理由から、図9(b)で β の値がほぼ落ち着く $0.05 < j_w < 0.6$ を有効な範囲にとれば、 β は $0.03 < \beta < 0.08$ の範囲内に存在するものと考えられる。この方法のほかに、〈3・3〉節の小マイナーループの相似性を利用して β を推定する方法も考えられる。すなわち、メジャー・ループの下降部で生成される小マイナーループの上側部分が、始点を含めた下降曲線の一部にちょうど重なる下降曲線を、下降曲線群のなかから見だし、小マイナーループをその下降曲線に重ねる。この小マイナーループの移動を平行移動と考え、その移動の方向から β の大略の値を推定する。この方法によれば、 $\beta \approx 0.06$ となった。以上の結果をまとめると β は $0.05 \sim 0.06$ 程度と推定できる。

〈6・2〉 分布関数の決定 h - j 平面上の磁化曲線上の二点 (h_x, j_x) および (h_y, j_y) に対する無次元化された有効磁界をそれぞれ u, v とすれば、

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha h_x + \beta j_x \\ v &= \alpha h_y + \beta j_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

が成り立つ。従って、(9)~(11)式により

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha q(j_x | j_x) + \beta j_x \\ v &= \alpha q(j_y | j_x) + \beta j_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

となる。(17)式の第1式を j_x について解き、第2式に代入した式を j_y について解くと

$$j_y = \hat{F}(u, v) \dots\dots\dots (18)$$

と表すことができる。

従って、有効磁界 h_e に対する分布関数 $\hat{K}(u, v)$ が求められているとき、点 (u_0, v_0) の周りの微小面分 $\Delta u \Delta v$ に対する増分磁化 Δj は(18)式により、

$$\Delta j = \{ \hat{F}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \hat{F}(u_0 + \Delta u, v_0) \} - \{ \hat{F}(u_0, v_0 + \Delta v) - \hat{F}(u_0, v_0) \} \dots\dots (19)$$

となるから、分布関数 $\hat{K}(u_0, v_0)$ は

$$\hat{K}(u_0, v_0) = \Delta j / \Delta u \Delta v \dots\dots\dots (20)$$

により近似的に定められる。

〈6・3〉 分布関数の補間結果 図7に示した補間結果を用いて、上述の方法により求めた分布関数 $\hat{K}(u, v)$ を図10に示す。ただし、同図においては、 u - v 平面内の三角領域のうち、 $u, v > 0$ および $u, v < 0$ の領域では分布関数の値が小さいので、 $u > 0, v < 0$ の領域のみについて $\hat{K}(u, v)$ の様相を等高線を用いて示す。補正係数を $\beta = 0, 0.02, 0.05$ として、その各々に対する分布関数 $\hat{K}(u, v)$ を示す。(a)図は $\beta = 0$ の場合、すなわち相互作用を考慮しない場合で、 $v = -u$ に関し対称性は良くない。斜線部は分布関数の値が負になる領域である。これに対し、(b), (c)図のよう

に β が大きくなるにつれて対称性も良くなり、分布関数が負の値をとる領域も狭くなり消滅している。

しかしながら、これらの図で最も対称性が良いと考えられる $\beta = 0.05$ の図10(c)においても、分布関数は完全に対称にはなっていない。これは、モデルの簡単さ、 β の算定法、測定誤差などによると考えられる。従って、ヒステリシスモデルとしてこの分布関数を用いるには、ヒステリシス特性のメジャー・ループが原点对称であることを考え合せると、この分布関数ではいまいち不十分である。そこで、 $\beta = 0.05$ の場合のように最も対称性が良いとみなされる補正係数 β に対して、直線 $v = -u$ に関して対称な位置にある分布関数の値の相加平均をとり、その平均値を対称な点の分布関数の値とする。このようにして分布関数の対称化を行った結果を図10(d)に示す。以上のように、相互作用磁界を考慮し補間法による平滑化を施して得られた、対称化された分布関数をヒステリシス特性のシミュレーションに用いる。

7. シミュレーションのアルゴリズム

上記のようにして定められた分布関数 $\hat{K}(u, v)$ から、(7)式の第3式は定められる。(7)式から h_e, j を消去すると

$$b - \gamma h = \delta f[\{ (\alpha \delta - \beta \gamma) h + \beta b \} / \delta] \dots (21)$$

となる。従って、与えられた外部磁界 h に対する磁束密度 b は、(21)式の方根方程式を解くことにより定められる。いま、時点列を t_p ($p = 0, 1, \dots$) で表し、時刻 $t = t_p$ における磁界と磁束密度をそれぞれ $h_{(p)}, b_{(p)}$ で表す。与えられた磁界の時点系列 $\{h_{(p)}\}$ に対する磁束密度の時点系列 $\{b_{(p)}\}$ を求めるアルゴリズムは次のようになる。ここに、 $t = t_p$ における微分透磁率を $g_{(p)}$ で表す。また、 $b_{(p-1)}, h_{(p-1)}, g_{(p-1)}$ が既知であるものとする。

《アルゴリズム》

$$S 0 : k \leftarrow 1, h^{(0)} \leftarrow h_{(p-1)}, b^{(0)} \leftarrow b_{(p-1)}, g^{(0)} \leftarrow g_{(p-1)},$$

収束半径 ε を与える。

$$S 1 : b_{(p)} \leftarrow b^{(k-1)} + g^{(k-1)}(h_{(p)} - h^{(k-1)}).$$

$$S 2 : h_e^{(k)} \leftarrow \{ (\alpha \delta - \beta \gamma) h_{(p)} + \beta b_{(p)} \} / \delta.$$

$$S 3 : j^{(k)} \leftarrow f(h_e^{(k)}), \quad g^{(k)} \leftarrow (\partial f / \partial h)_{h_e = h_e^{(k)}}$$

(この計算は文献(2)のアルゴリズムAによる)。

S 4 : 連立方程式

$$\left. \begin{aligned} h_e^{(k)} &= (\alpha \delta - \beta \gamma) h^{(k)} / \delta + \beta b^{(k)} / \delta \\ j^{(k)} &= (b^{(k)} - \gamma h^{(k)}) / \delta \end{aligned} \right\}$$

を解いて $h^{(k)}, b^{(k)}$ を求める。更に、

$$g^{(k)} \leftarrow (\partial b / \partial h)_{h = h^{(k)}} \text{を求める。}$$

 図 10 分布関数 $\bar{K}(u, v)$

 Fig. 10. Distribution function $\bar{K}(u, v)$.

S5: $|h^{(k)} - h_{(p)}| < \epsilon$ ならば, S6 へ。そうでなければ, $k \leftarrow k+1$ として S1 に戻る。

S6: $b_{(p)} \leftarrow b^{(k)}$, $g_{(p)} \leftarrow g^{(k)}$ として文献(2)の補助配列 $D(i, j)$ を $h_{(p)}(l_p)$ に対応するように要素1の配置パターンを変更して終了する。

8. 実験結果とシミュレーションとの比較

図 10 に示した分布関数について, マイナループを含むヒステリシス特性をこのアルゴリズムにより計算した。ただし, 以下の例では $B = \mu_0 H + J \approx J$ とし, J の代りに磁束 Φ , H の代りに電流 i を用いる。

図 11 は, (a) 図 $\beta=0$ に対する分布関数〔図 10 (a)〕, (b) 図 $\beta=0.05$ に対する分布関数〔図 10 (c)〕, (c) 図 $\beta=0.05$ とおき, 更に対称化した分布関数〔図 10 (d)〕をそれぞれ用いて計算したヒステ

リシス曲線である。図 11 (a), (b) では, 曲線は磁束の負の値から始まっているのに対し, 同図(c)では原点から始まっている。これは, (a), (b) 図では分布関数が対称化されていないが(c)図では対称化されているからである。(b) 図のほうが(a) 図よりも曲線の出発点の原点からのずれが小さく, (b) 図の分布関数が(a) 図のそれより対称化されていると言える。図 12 に実測したヒステリシス曲線を示す。図 11 (c) と比較すると, 上下二つの小マイナループおよびメジャーループともかなり良く一致していることがわかる。

以上のことから, 最適な補正係数を定め, 有効磁界に対する分布関数を定めた後, その分布関数を対称化して新たに得られる分布関数をシミュレーションに用いることにすれば, 実測とかなり良く一致したヒステリシス特性が得られると言える。

(a) $\beta=0$ の場合

(b) $\beta=0.05$ の場合

(c) $\beta=0.05$ とし、対称化した分布関数を用いた場合

図 11 シミュレーションにより得られたヒステリシス曲線 (Φ : 磁束, i : 電流)

Fig. 11. Hysteretic curves obtained by simulation.

9. む す び

実測した磁化曲線から得られたプライザッハ分布関数から、ヒステリシス特性のシミュレーションに適した分布関数を再構成する方法を述べた。更に、この新

図 12 実測によるヒステリシス曲線 (Φ : 磁束, i : 電流)

Fig. 12. Hysteretic curve by measurement.

たに構成された分布関数を用いて、ヒステリシス特性を模擬するアルゴリズムを示した。例として、フェライト鉄心のヒステリシス特性をこのアルゴリズムにより模擬したところ、実測の特性とマイナーループまで含めて、かなり良く一致させることができた。

補正係数を推定する方法は、本論文で述べた方法以外に種々考えられる。しかし、磁化特性から推定された一定値をとるおおよその補正係数のみを用いて、有効磁界に対する分布関数を対称化することはかなり難しい。従って、推定した補正係数に対しある程度対称に近い分布関数が得られたとき、対称化の操作を行い、分布関数を完全に対称化してしまうのがよいと思われる。

(昭和 62 年 2 月 24 日受付)

文 献

- (1) F. R. Preisach: "Über die Magnetische Nachwirkung", *Zeitschrift für Physik*, **94**, 277 (1935)
- (2) 奥村・木嶋:「ヒステリシス特性のデジタルシミュレーションとその応用」, 電学論 B, **103**, 541 (昭 58-7)
- (3) 津屋・島野・東森:「角形履歴特性とプライザッハダイアグラム」, テレビジョン学会誌, **21**, 96 (昭 42)
- (4) 津屋・沢村:「角形履歴特性を有する磁性体の磁化過程」, 電子通信学会磁気記録研資, MR-67-8 (昭 42)
- (5) 田中・大坪:「磁気記録機構について」, 電学誌, **81**, 413 (昭 36-3)
- (6) 市田・吉本: スプライン関数とその応用, p. 29 (昭 54) 教育出版