ペトリネットの構造分類と計数プレース付加による発火回数の計算法

正 員 丁 国 駿 (横浜国大)
正 員 関 口 隆 (横浜国大)

1. はじめに

CIM (Computer Integrated Manufacturing) では設計、試験、運転、保守を通じて一貫した表現法あるいは整合性の良い表現法が望ましい。上記の要求を満足させるためには、表現能力に富み、かつ解析性の優れた表現法が適している。このような観点からペトリネットが有望視されて、それを用いたシーケンス制御システムの動作と仕様の記述、設計や解析に関する研究が幅広く行われている^{(1)~(4)}。

本論文はシーケンス制御系に着目して、その動作解析において重要な役割を果たすペトリネットの可達問題を解くための基礎となる発火回数の計算法を示す。ペトリネットの可達問題は、ある初期状態から出発して与えられた状態に到達可能か否かを検討し、到達可能な場合にはその発火系列を求める問題である。

トランジションの発火系列を決定する問題には、各トランジションの発火回数の決定および発火順序の決定の二つの問題がある。

後者の問題に対しては、既に筆者らは遷移行列に基づく解法を提案している⁽⁵⁾。

トランジションの発火回数ベクトルを計算するには、ペトリネットの状態方程式を解くことにより求める方法がある⁽¹⁾。状態方程式により発火回数ベクトルを求める問題では、ペトリネットの構造および状態により、(i)唯一解が得られる場合、(ii)解が不定となる場合、(iii)解なしの場合とがある。従来の代数的方法では上記(ii)の場合、解を決定することが困難である。この問題を解決するために、本論文ではペトリ

ネットの構造をその接続行列の特性により三つに分類した。すなわち、サイクル構造、並列構造および正規構造([定義 6~8] 参照)である。ペトリネットの構造にサイクル構造または並列構造が含まれている場合、状態方程式の中に現れる接続行列の階数が下がるため、逆行列による代数的な計算が困難になる。

本論文では、発火回数ベクトルを求める問題に対して、計数プレースを用いる方法を提案する。ペトリネットに可達性を失わずに計数プレースを追加して、接続行列の階数を上げることにより、トランジションの発火回数ベクトルを代数的に計算する方法を提案し、その方法の妥当性を示す。更に、計算例を通じて、本論文が提案した方法が CIM にとって重要な、コンピュータによるシステム解析の一手法となり得ることを示す。

2. 諸 定 義

議論をしやすいするために、その基本となる定義を以下にまとめて与えておく。なお、本論文で取扱うペトリネットシステムは離散時間が導入されているものとする。

〔定義 1〕 マーキングベクトル: $p_i(k)$ を時刻 k でのプレース p_i にあるトークンの数とすると、トークンの分布を表すマーキングは列ベクトル

$$p(k) = [p_1(k), p_2(k), \dots, p_m(k)]^T \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 m : プレース数, 上添字 T : 転置によって表される。このマーキングベクトルはペトリネットの状態を示すことになる。

〔定義 2〕 発火ベクトル: $t_j(k)$ を時刻 k でのトランジション t_j の発火状況を示す変数とすれば (t_j が発火すれば 1, そうでないときは 0 の値を取る), トランジションの発火状況を示す発火ベクトルは

$$t(k) = [t_1(k), t_2(k), \dots, t_n(k)]^T \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 n : トランジション数

A Method to Determine the Number of Firings by Classification of Petri Net Structure and Addition of Counter Place.
By Guojun Ding, Member & Takashi Sekiguchi, Member
(Faculty of Engineering, Yokohama National University).

丁 国駿: 正員, 横浜国立大学工学部電子情報工学科
関口 隆: 正員, 横浜国立大学工学部電子情報工学科

によって表される。

〔定義 3〕 状態方程式：マーキングベクトルと発火ベクトルを用いて、ペトリネットの状態遷移を表す下記のような行列方程式を状態方程式と呼ぶ。

$$p(k+1) = p(k) + Bt(k) \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 B はプレースとトランジションの接続関係を表す行列で、 $B = B^+ - B^-$ と表される。 B^+ はトランジションからプレースへの、 B^- はプレースからトランジションへの接続関係を示し、各要素は 0 または正の整数である。

〔定義 4〕 発火回数ベクトル：発火系列における各々のトランジションの発火回数を成分とするベクトルが発火回数ベクトルであり、各成分は非負の整数である。以下では T と書く。

マーキングが $p(0)$ 、 $p(1)$ 、 $\dots$ と推移する場合、発火ベクトルの系列 $t(0)$ 、 $t(1)$ 、 $\dots$ は

$$p(1) = p(0) + Bt(0)$$

$$p(2) = p(1) + Bt(1)$$

$$\vdots$$

$$p(k) = p(k-1) + Bt(k-1)$$

を解くことにより得られる。初期状態 $p(0)$ から最終状態 $p(r)$ に至るまでの発火ベクトルの和は次式で与えられる。

$$B \sum_{k=0}^{r-1} t(k) = p(r) - p(0) \dots\dots\dots (4)$$

上式の $\sum t(k)$ が発火回数ベクトル T となる。

$$P = p(r) - p(0)$$

と置けば、初期状態と最終状態のみが与えられた場合のトランジションの発火回数ベクトル T は下記のような連立一次方程式

$$BT = P \dots\dots\dots (5)$$

を解くことにより求められる。

〔定義 5〕 双対ペトリネット：ペトリネットのプレースの集合とトランジションの集合を交換して得られるペトリネットを双対ペトリネットという。双対ペトリネットの接続行列 B_{dual} と原ペトリネットの間には

$$B_{\text{dual}} = -B^T$$

という関係がある。

3. ペトリネットの構造分類と発火回数ベクトルの計算法

(5) 式の連立一次方程式を解くには、逆行列（一般的には擬似逆行列であるが、本論文では逆行列と区別せず、ともに B^{-1} と記す）を用いる方法があるが、逆行列を用いて代数的に解くためには、接続行列 B が

最大階数

$$\text{rank } B = \min(m, n)$$

をもつ必要がある。

更に、一意的な解が得られるためには

$$\text{rank } B = n$$

でなければならない。その場合、唯一解が存在すれば

$$T = B^{-1}P$$

によって、発火回数ベクトルを一意的に決定できる。

プレースの数がトランジション数より少ない ($m < n$) 場合については、接続行列 B が最大階数を有しても、 $\text{rank } B < n$ となるため、すなわち方程式の数が未知数より少ないため、求められる解は一意的に決定できない。

より一般的な場合

$$\text{rank } B < \min(m, n)$$

については、接続行列の階数がトランジション数とプレース数の関係にかかわらず n より小さくなるため、解は一意的に決定できない。

接続行列 B の階数が $r (< n)$ であるとき、(5) 式の一般解は

$$T = T_s + \sum_{i=1}^{n-r} k_i T_i \dots\dots\dots (6)$$

で表される⁽⁵⁾。ただし、 T_i は

$$BT = 0$$

を満たす $(n-r)$ 個の互いに線形独立な解であり、 T_s は(5)式を満足する特殊解である。

接続行列 B が $\text{rank } B < n$ であれば、発火ベクトル T の解は(6)式のように係数を含む形となる。従来の方では、このような場合において連立一次方程式のなかから線形独立な方程式を選び出さなければならぬから、代数的に(5)式を解くことは困難になる。

本論文では、接続行列の階数とペトリネット構造との間の関係に注目し、接続行列の階数がトランジション数より小さいペトリネットの基本構造について考察し、代数的に発火回数ベクトルを計算しやすくするための方法として、計数プレース付加による方法を提案する。

以下で論ずるペトリネットは、双対ペトリネット以外はすべて入出力をプレースで表したものとす。

〈3・1〉 ペトリネットの構造分類 接続行列の性質によって、以下のようなペトリネット基本構造を与えることができる。

(i) サイクル構造

〔定義 6〕 すべての成分が非負整数であるベクトル T によって

$$BT = 0$$

が満たされるとき、ペトリネットはサイクル構造をもつという。このようなペトリネットにおいては、ある初期状態から遷移して再びその状態に戻る発火系列が存在する。

(ii) 並列構造

〔定義 7〕 すべての成分の符号が同一でない整数からなるベクトル T によって

$$BT=0$$

が満たされるとき、ペトリネットは並列構造をもつという。 T の負の成分を 0 としたものを T_1 、 T の正の成分を 0 とし、負の成分の符号を反転したものを T_2 とすれば、

$$BT_1=BT_2(\neq 0)$$

が満たされる。このようなペトリネットにおいては、ある初期状態からの遷移の結果が同一になるような異なる発火系列が存在する。

(iii) 正規構造

〔定義 8〕 行列方程式

$$BT=0$$

を満たす発火回数ベクトル T の解が零解以外に存在しないとき、そのようなペトリネット構造を正規構造をなすという。このようなペトリネットにおいて、発火回数ベクトルの解が存在すれば

$$T=B^{-1}P$$

により一意的に求められる。

これらの定義に基づいて、接続行列の階数とペトリネットの構造の間の関係を以下のように与えることができる。

(1) $m \geq n$ の場合 プレース数が多い場合は下記の定理が成り立つ。

〔定理 1〕 プレース数がトランジション数以上あるペトリネットにおいて、その接続行列が最大階数を有しないとき、サイクルまたは並列構造をもつ。またその逆も成り立つ。

(証明) 接続行列 B を列ベクトルに分解して

$$B=[b_1, b_2, \dots, b_n]$$

と表しておく、 B が最大階数をもたないならば、列ベクトル $b_1, b_2, \dots, b_n$ が線形従属となる。従って、整数からなる係数の組 $k_1, k_2, \dots, k_n$ が存在して、

$$k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。これを行列式の形式に書くと、すなわち

$$B \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = 0 \quad (8)$$

が成り立つ。係数の組 $k_1, k_2, \dots, k_n$ の構成に関して、次の二つの場合が考えられる。

(i) すべての係数が非負である場合：このとき、 $k_1, k_2, \dots, k_n$ を成分とする発火回数ベクトル

$$T=[k_1, k_2, \dots, k_n]^T$$

について、

$$BT=0$$

となることを意味し、〔定義 6〕により、このようなペトリネットはサイクル構造をもつ。

(ii) すべての係数の符号が同一でない場合：係数 $k_1, k_2, \dots, k_n$ のうち、負の整数を 0 とした列ベクトルを K_+ 、正の整数を 0 とした列ベクトルを K_- で表して(8)式を書き直すと、

$$B(K_+ + K_-) = 0$$

$$BK_+ = B(-K_-)$$

となる。従って、

$$T_1 = K_+, T_2 = -K_-$$

とおいたとき、発火回数ベクトル T_1, T_2 がもたらす遷移の結果が同じになる。すなわち、ペトリネットの状態遷移において、二つ以上の遷移経路が存在することになる。〔定義 7〕により、このようなペトリネットは並列構造をもつ。

サイクルまたは並列構造をもつペトリネットの接続行列が最大階数をもたないことについての証明は、今の証明の手順の逆をたどれば、同様に証明できる。

(証明終)

(iii) $m < n$ の場合：トランジション数がプレース数より多いペトリネットが構造的にサイクル構造または並列構造をもつことは自明である。更に、接続行列が最大階数をもたないとき、接続行列 B を行ベクトルに分解して

$$B=[\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_m]^T$$

と表しておく、整係数の組 $k_1, k_2, \dots, k_m$ が存在して

$$k_1 \bar{b}_1 + k_2 \bar{b}_2 + \dots + k_m \bar{b}_m = 0 \quad (9)$$

が成り立つ。すなわち、

$$[k_1, k_2, \dots, k_m]B=0$$

これを転置して、負号を付けければ

$$-B^T \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

上式の $-B^T$ は原ペトリネットに対する双対ペトリネットの接続行列を示している、〔定理 1〕より双対ペトリネットがサイクル構造または並列構造をもつことがわかる。従って、もとのペトリネットもサイク

ル構造または並列構造をもつ。ただし、その逆は成立しない。すなわち、ペトリネットがサイクル構造または並列構造をもっている場合、トランジションの数が多い場合、接続行列が最大階数をもつこともあり得る。

〈3・2〉 計数プレース付加による発火回数ベクトルの計算法 以上の議論から、ペトリネットがサイクル構造または並列構造をもっている場合、それらの構造に対してプレースを付加して、そのような構造を消去して正規構造に変換してやれば、逆行列を用いて発火回数ベクトルを求めることが可能になる。

本論文では、原ペトリネットの可到達性の性質を損なうことなく、(6)式において発火回数ベクトルの解に表れる係数を、付加したプレースのトークンにもたせることによって形式的に接続行列の階数を上げ、逆行列を用いて解く方法を提案する⁽⁶⁾。後述するように、このようにして導入したプレースは周期的発火の繰返し回数あるいは並列する発火系列の発火回数を計数する役割をもつので、以下では計数プレースと呼ぶ。計数プレースの与え方は次のようになる。

(1) 計数プレースの追加方法 ペトリネットがサイクル構造をもつ場合に関しては、それぞれのサイクルに対して、サイクルを構成するトランジションの集合のなかから、そのサイクルにしか含まれないトランジションを任意に一つ選び出し、そのトランジションのみの出力プレースとなる計数プレースを付加すればよい。このようにして追加された計数プレースはサイクルの繰返し回数を計数する役割を果たし、計数プレースにあるトークンの変化がサイクルの繰返し回数を表すことになる(図1参照)。

ペトリネットが並列構造をもつ場合に関しては、それぞれの並列構造に対して、並行する二つの遷移経路のうちの一つの経路上からトランジションを一つ選び

図1 サイクル構造をもつペトリネットへの計数プレースの付加法

Fig. 1. A method to add a dummy place to the Petri Net with cyclic structure.

図2 並列構造をもつペトリネットへの計数プレースの付加法

Fig. 2. A method to add a dummy place to the Petri Net with parallel structure.

出し、そのトランジションのみの出力プレースとなる計数プレースを付加すればよい。この場合に付加された計数プレースは、それが含まれているほうの遷移経路の発火回数を計数する役割をもつ(図2を参照)。

計数プレースを付加すれば、接続行列の階数を上げることができることは以下の定理によって保証される。

〔定理2〕 ペトリネットのサイクル構造や並列構造に対して、上記の方法でそれらに計数プレース1個を付加すれば、接続行列のランクを1だけ上げることができる。

〔証明〕 ペトリネットにおいて、トランジション $t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{sn}$ を含む部分ペトリネットがサイクル構造または並列構造を構成するとき、接続行列

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$$

に対して、〔定理1〕より

$$b_{s1}, b_{s2}, \dots, b_{sn}$$

が線形従属となる。それらの構造に含まれるトランジション、例えば t_{s1} に対して出力プレースとなる計数プレースを付加したとすると、新しく得られるペトリネットの接続行列において、 $t_{s1}, t_{s2}, \dots, t_{sn}$ に対応する列ベクトルは

$$\begin{bmatrix} b_{s1} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{s2} \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} b_{sn} \\ 0 \end{bmatrix}$$

になり、これらは明らかに線形独立である。ゆえに、接続行列の階数は1だけ上がる。(証明終)

このようにして導入した計数プレースはペトリネットのトランジションの発火に対して、なんら寄与していないので、新しく得られたペトリネットにおいては、原ペトリネットの可到達性を失わせることはない。

4. 計算例

上述のペトリネット構造の分類法および計数プレース

図 3 サイクル構造に対する計数プレースの付加の例

Fig. 3. An example of adding the counter place to the cyclic structure.

スの追加による発火回数ベクトルの計算方法を簡単な例に適用して、その有効性を示す。

〈4.1〉 サイクル構造 図 3 (a) に示したペトリネットにおいて、接続行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

であり、 $T = (1 \ 1)^T$ とすると $BT = 0$ となるので、〔定義 6〕より、サイクル構造であることがわかる。明らかに、 $\text{rank } B = 1$ であるから、逆行列が存在しない。そこで、計数プレースを (b) 図のように追加すると、

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{rank } B = 2$$

となり、接続行列 B については左側逆行列が存在し、

$$B^{-1} = (B^T B)^{-1} B^T \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。従って、(b) 図に示したペトリネットに関しては、発火回数ベクトル T は

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} P$$

で与えられる。初期マーキングが $(0 \ 1)^T$ 、最終マーキングが $(1 \ 0)^T$ である場合の発火回数ベクトルは

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X+1 \end{bmatrix}$$

になる。ただし、 X は $X = 0, 1, 2, \dots$ の値を取り、計数プレースにあるトークンの変化分を示す。

X が 0 の場合

図 4 並列構造に対する計数プレースの付加の例

Fig. 4. An example of adding the counter place to the parallel structure.

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり、これは繰返しを含まないときの発火回数ベクトルを示し、実際の発火系列は t_2 である。

1 回の繰返しを含む場合は発火系列が $t_2 \rightarrow t_1 \rightarrow t_2$ となり、発火回数ベクトルが

$$T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となる。繰返し回数 X が与えられれば発火回数ベクトルは一意的に定まる。

初期マーキングが $(0 \ 1)^T$ 、最終マーキングが $(2 \ 0)^T$ である場合の発火回数ベクトルは

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X+3/2 \end{bmatrix}$$

となるため整数解が得られないので、初期マーキング $(0 \ 1)^T$ から最終マーキング $(2 \ 0)^T$ へは非可達であることを意味する。

〈4.2〉 並列構造 トランジション数がプレース数より多い場合についての例を図 4 (a) に示す。この場合、ペトリネットの接続行列は

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

であり、 $T = (1 \ -2 \ 1)^T$ とすると、 $BT = 0$ となる。よって、〔定義 7〕より並列構造であることがわかる。

図 4 (b) のように計数プレースを追加すると、

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。

ゆえに、発火回数ベクトル T は

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} P$$

で与えられる。マーキングが $[2 \ 0]^T$ から $[0 \ 4]^T$ へと遷移した場合の発火回数ベクトルは

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ 2-2X \\ X \end{bmatrix}$$

非負整数解として、 $[0 \ 2 \ 0]^T$ 、 $[1 \ 0 \ 1]^T$ の二つありの解が得られ、この場合は $t_2 \rightarrow t_2$ 、 $t_1 \rightarrow t_3$ の二つの発火経路が存在する。

初期マーキングが $[2 \ 0]^T$ 、最終マーキング $[0 \ 1]^T$ である場合の発火回数ベクトルは

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ 5-2X \\ X-3 \end{bmatrix}$$

であるので非負整数解が存在しない。すなわち、与えられた初期状態から最終状態への発火系列が存在しない。

このように、接続行列が最大階数を有しない場合など、従来の代数的方法では計算困難だった不定解の場合においても、計数プレースを付加すれば簡単に解くことができる。ゆえに、本論文で提案した計数プレース付加による発火回数ベクトルの計算法は非常に有効であると言える。

5. 終りに

本論文で提案した方法を用いれば、状態方程式によ

りトランジションの発火回数ベクトルを求める場合、接続行列が最大階数を有しない場合においても、追加する計数プレースがベトリネットの構造上から容易に決定でき、逆行列により発火回数ベクトルを求めることができる。

シーケンス制御システムをベトリネットを用いて表現したとき、故障診断や設計の修正などにおいて、故障状態に至る発火系列を知ることが重要である。このような場合、本論文で与えた発火回数の計算法が特に有効であると考えられる。これとトランジションの発火順序の決定アルゴリズムを合せることによって完結した可達問題の解法が得られる⁽⁸⁾。

これらの成果は CIM システムの設計や解析において十分活用し得るものである。

(昭和 63 年 9 月 6 日受付, 同 63 年 12 月 27 日再受付)

文 献

- (1) J.L. Peterson: Petri Net Theory and the Modeling of Systems (1981) Prentice Hall
- (2) 市川:「事象駆動形システムの表現と制御」, 計測と制御, 21, 929 (昭 57-10)
- (3) 市川:「事象駆動形システムの制御」, 計測自動制御学論, 21, 324 (昭 60-4)
- (4) 村田・廣田・松本:「ベトリネットに基づく高フレキシブル FA 制御システム」, 同上, 20, 844 (昭 59-9)
- (5) 児玉・須田:「システム制御のためのマトリクス理論」, 昭 53 計測自動制御学会
- (6) 丁・関口:「ベトリネットにおける発火回数ベクトルの計算法」, 第 14 回システムシンポジウム講演論文集, p. 143 (昭 63)
- (7) 丁・関口:「ベトリネットの到達問題に関する一考察」, 第 13 回同上, p. 203 (昭 62)
- (8) 丁・関口:「ベトリネットの発火系列決定法」, 計測自動制御学論 (投稿中)