三次元場電界磁界解析のための 四面体要素自動作成の一方方法

正員 宮本 賢一 (シャープ)

正員 山下 英生 (広島大)

正員 中前 栄八郎 (広島大)

1. ま え が き

有限要素解析法は、場の数値解析手法として多くの分野において広く活用されており、電気工学の分野においても、二次元場や軸対称場モデルを用いた電気機器の電界、磁界解析を通して、機器の設計に広く利用されている。しかし、現実の電気機器は三次元構造をしており、より正確な場の現象を把握するためには三次元解析が必要であり、その研究も盛んになっている⁽¹⁾。ところで、三次元場有限要素解析を進めるには、まず解析対象領域を有限要素（通常、四面体要素が用いられる）に分割する必要がある。三次元解析領域の要素分割は、二次元場問題の場合⁽²⁾に比べ格段に複雑であり、三次元有限要素解析の実用化のネックの一つになっている。従って、できるだけ少ない入力データによって、計算機に要素データを自動作成させることが望ましい。電界・磁界の解析の場合、解析対象がコイル、鉄心、電極などの物体だけでなく、ときには無限遠まで広がる空気領域も含まれるから、適切な要素分割は構造力学系のそれに比べてより困難である。

適切な要素分割を自動的に行う条件として、次の点が挙げられる。

- (i) データ入力が簡単で少量であること
- (ii) 四面体要素の分布の粗密が容易に与えられる

こと

- (iii) 作成された四面体要素の形状ができる限り正四面体に近いこと

- (iv) 複雑な形状で構成される解析領域でも適用が容易なこと

これらの条件を満足することを目的とした幾つかの自動分割法が既に発表されている。一般に広く用いられている方法は、 xy 平面上の解析領域を三角形要素に分割し、これを z 方向の必要な位置に平行移動することにより三角柱群を作成し、それぞれの三角柱を3個の四面体に分割する方法である。この方法は、データの作成およびその処理が非常に簡単であるという利点をもつが、領域全体にわたって要素分布に適切な粗密を与えることができず、へん平な要素が生じる欠点がある。また、 xy 平面分割図を z 方向に平行移動する機能しかないため、複雑な形状の物体に適用できないなどの欠点をもつ。この欠点を改善する一方法として、中田ら⁽³⁾は xy 平面の三角形分割図を階層的に積上げるとき、必要に応じて徐々に面の分割を粗くしていく方法を提案し、これにより要素数、節点数が不必要に増えることを防いでいる。しかし、各々の xy 平面ごとに分割図を準備する必要があり、また複雑な形状の物体に適用しにくい点に変わりはない。

また著者らは、要素分布の粗密を与える一方法として、解析領域をあらかじめ独立な凸多角柱群からなる小領域に分割し、各小領域ごとに与えた分割数に従って四面体要素を作成する方法を提案した⁽⁴⁾。この方法は、マイコンのグラフィック機能を用いて会話形式により小領域のデータの作成ができるので、データ入力は簡単になり、使いやすい。しかし、小領域は xy 平面に平行な面と垂直な面に限定されているので、取扱える物体の形状に制限がある。また、小領域が他の領域に包含されるような関係（包含関係）が許されてい

An Automatic Finite Element Generation Method for Three Dimensional Magnetic and Electric Field Analysis. By Kenichi Miyamoto, Member (SHARP Co.), Hideo Yamashita, Member & Eikachiro Nakamae, Member (Faculty of Engineering, Hiroshima University).

宮本賢一：正員，シャープ(株)技術本部コンピュータシステム研究所
山下英生：正員，広島大学工学部第二類（電気系）
中前栄八郎：正員，広島大学工学部第二類（電気系）

ないので、入力すべき小領域の数が比較的多くなる欠点がある。Phai は、三次元空間に分布した節点を与えると、これらの節点で構成される四面体要素が自動生成される方法⁽⁵⁾を提案している。この方法は、要素分布の粗密を考慮しながら節点の分布を人手により入力する必要があり、入力データが多く、実用的でない。一方、四面体要素に粗分割された空間を Delaunay のアルゴリズムにより順次細分割する方法として Coulomb らの方法⁽⁶⁾や Cavendish らの方法⁽⁷⁾がある。これらの方法は、正四面体に比較的近い形状の要素が作成できる利点をもっているが、次のような欠点がある。Coulomb らの方法は、初期状態の四面体要素の作成を物体ごとに順に行う方法であり、物体を定義する節点を1点ずつ人手により入力しなければならない。また、凹物体の場合、四面体要素が物体の外部にはみでることがあり、コンピュータグラフィックスの図形出力結果を用いてこの四面体を人間が確認しながら人手により除去しなければならない。また、Cavendish らは節点の入力方法を改善するために解析領域を複数の層に分割する面を考え、各面ごとにその面上の節点を入力する方法を提案している。しかし、各面ごとの節点は人手により与える必要がある。また、四面体要素ごとにその形状を判断して細分割する領域の指定を人間がしなければならない。

以上のように四面体要素自動作成のための幾つかの方法が提案されているが、前述の条件をすべて満足する方法はない。

本論文では、上記の条件を満たす分割法を提案する。すなわち、まず解析領域を媒質間（機器の部品間）の境界を含む凸多角柱状の小領域群に分割して入力し、これらの多角柱の各辺に要素分布の粗密を考慮して分割数を与える。このとき、空間領域（空気）の分割をしやすくするために、小領域間の包含関係を許

す。これらの入力データの的確性を視覚的に確認した後、各小領域内を自動的に適正な形状の四面体要素に分割する手法を提案する。

2. 定義および入力データ

次章で述べるアルゴリズムの説明を容易にするために、語句の定義と本手法における入力データの作成手順を示す。

〈2・1〉 語句の定義 xyz 直交座標系で与えられる三次元空間を考え、図1、図2および図3に従って、次の定義を与える。

(1) ブロック 四面体の分割数を与えるための最小単位として、解析空間を幾つかの凸多角柱群に分割し、これをブロックと呼ぶ。なお、ブロックは次の性質をもつ。(i) 上面と下面は xy 平面に平行である必要はないが、四辺形以上の多角形面とする。(ii) ブロック間に、包含関係を許す。ただし、ブロックを構成する線分が他のブロックの面を貫いてはならず、ブロックどうしが接するときは面接触でなければならない(図1、図2参照)。

図1 ブロック
Fig. 1. Blocks.

図2 面接触しているブロック
Fig. 2. Blocks in surface contact.

図3 ブロック辺とブロック線分
Fig.3. Block side and block segment.

以上で定義されたブロックは、次の利点をデータ作成者にもたらす。

(i) 解析領域に存在する物体（コイルや鉄心など）をブロックの集合により表現することにより、三次元データの作成を容易にする。

(ii) ブロックごとに分割数を与えることにより、解析空間の要素分布の粗密を与えやすくする。

(2) ブロックの第1面と第2面 ブロック（多角柱）の上面を第1面、下面を第2面と定義する。

(3) 基本節点と補助節点 一つのブロックを構成する基本となる節点として、第1面と第2面にそれぞれ4節点を与え、これをブロックの基本節点と呼び、その他の節点を補助節点と定義する。

従って、ブロックは第1面および第2面にそれぞれ4個の基本節点をもつ位相幾何学的な四角形で構成される多角柱である。なお、あるブロックの基本節点は、他のブロックの補助節点を共有することができる。また、相接するブロックどうしの辺との交点（例えば、図2(a)の節点C、D）は補助節点を構成する。この節点はデータ入力後に自動作成される。

(4) ブロック辺とブロック線分 第1面または第2面中の、二つの基本節点を両端とし、幾つかの補助節点を連ねた折れ線の集合をブロック辺と定義する。すなわち、第1面と第2面はそれぞれ四つのブロック辺から構成される。

ブロック辺上の隣合う2節点間は直線であり、これをブロック線分と定義する（図3参照）。

(5) ブロック面とサブブロック面 ブロックを構成する凸多角形面をブロック面（第1面、第2面も含む）と定義する。

ブロックAに属するブロック面aとブロックBに属するブロック面bが面接触している場合（図2参照）、ブロック面aとブロック面bは、両者の共有領域および独立領域に分割される。このように分割されたブロック面の各々の小領域をサブブロック面と定義する。

(6) ブロックの分割数 l, m, n 第1面、第2

面は、位相幾何学的には基本節点を頂点とした四角形である。第1面を構成する四つのブロック辺のうち、隣接する二辺に与える分割数を l, m と定義する。第2面のブロック辺にも第1面に対応して同じ分割数が割当てられる。第1面と第2面の間の分割数を n と定義する。なお、ブロック線分の分割数はブロック辺に指定された分割数 l, m を、そのブロック辺を構成するブロック線分の長さの比に従って分け、各ブロック線分に割当てる。ただし、最小1は割当てるものとする。

(7) 基準面積 ブロックの各面の面積を、その面の二辺に与えられた分割数の積で除し、これを基準面積と定義し、ブロック面を三角形に分割するとき、三角形の細分割の可否についての基準値として使用する。

なお、サブブロック面に割当てられる基準面積は、そのサブブロック面が属する複数のブロック面の基準面積中の最小値とする。

〈2・2〉 入力データの作成手順 まず、解析対象物体を含む解析空間全体を幾つかの適切なブロックに分割し、各々のブロックに番号を付ける。

ブロックは第1面と第2面が位相幾何学的に四角形とみなせる多角柱であればよい。ここでは、入力データをできるだけ簡単にするために、ブロックを次の4タイプに分けて取扱う（図4参照）。

(i) 平行六面体 (Parahexa)

(ii) 任意形状の六面体 (Hexahedron)

(iii) 円筒状に配置された複数の平行六面体 (Cylinder) [図4(c)の場合、3個のブロックが一度に入力される]

(iv) 任意の凸多角柱 (Polyhedron)

次に、各ブロックについて以下のデータを入力する。

なお、座標データは各ブロックにおける局所座標系の値とする。

(1) ブロックのタイプを指定する。

(2) (iv)の場合のみ第1面を構成する節点数を入力する。

(3) 第1面を構成する節点列の座標値 (x, y, z) を入力する。ただし、点列の回転方向は任意の方向が許される。

(4) (i)の場合：第1面を掃引するベクトル $P_1 P_3$ を入力する。

(ii), (iv)の場合：第2面を構成する節点列の座標値 (x, y, z) を入力する。ただし、点列の回転方向は(3)項とは逆方向とする。

図 4 ブロックのタイプ
Fig. 4. Types of block.

(iii)の場合：円筒軸の軸ベクトル(oz)，一つのブロックあたりの回転角(θ)，ブロックの個数を入力する。

(5) 分割数 l, m, n を入力する。

(6) 全体座標系に対する P_1 の座標値 (x', y', z') を入力する。

(7) (iv)の場合のみ第1面の基本節点番号を入力する。ここで節点番号とは，(3)項で入力した順に1から付けられる番号である。

すべてのブロックデータを入力後，各ブロックの包含関係を入力する。図1の場合は次のように与える。

4>3

3>2, 1

3. 四面体要素自動分割アルゴリズム

〈3・1〉四面体要素自動分割処理の概要 提案手法の処理手順の概略を図5に示す。各処理の機能は以下のとおりである。

(1) 前処理 〈2・2〉節で述べたデータ入力を行う，以下のデータを自動作成する。

(i) 各ブロックのブロック面を構成する節点列を求める。

(ii) 各ブロック面の補助節点を求めるために，隣接するブロックどうしの交点(例えば図2(a)の節点C, D)を求める。

(2) 入力データのチェック 入力したブロック

図 5 処理の概略

Fig. 5. Flowchart of the generation strategy.

を透視投影法により CRT に表示し，ブロックの形状に誤りがないか視覚的に確認する。確認を容易にするために，以下の機能が準備されている。

- * 視点，注視点の設定と変更。
- * 任意の場所の拡大表示。
- * ブロックごとの表示と分割数の確認。

(3) 四面体要素の自動作成 各ブロック内に四面体要素を自動作成する (〈3・2〉節参照)。

(4) 要素形状の修正 作成された四面体要素の中にへん平な形状のものがあるかどうかを調べ，へん平な要素が存在する場合，その形状を自動修正する。この手法は文献(7)の方法により行う。

(5) 四面体要素の表示 要素分割図を透視投影法により CRT に表示して視覚的に確認する。確認を容易にするために以下の機能がある。

- * 視点，注視点の設定と変更。
- * 任意の場所の拡大表示。
- * 解析領域の境界面のみの表示。

〈3・2〉 四面体要素自動作成処理 以下に示す3ステップにより領域を四面体要素に分割する。

〔ステップ 1〕 ブロック面上に節点を作成する。

〔ステップ 2〕 ブロックに与えられた分割数 l, m, n のすべてが2以上のときブロック内部に節点を作成する。

〔ステップ 3〕 〔ステップ 1, 2〕で作成した節点を用いてブロックごとに四面体要素を作成する。

以下に各ステップの処理について述べる。

(1) ブロック面上の節点の作成 ブロック面に割当てられた分割数に従って、各々のブロック面を三角形に分割することにより、すべての面上に節点を作成する。その処理は次の三段階の処理からなる。

(i) 三角形粗分割：同一面上に存在する複数のブロック面の集合（グループ）を抽出し（図2(b)のグループの一例を図6(a)に示す）、これらを構成する基本節点と補助節点のみを用いて、次の手順により各々の面を三角形に分割する。

〔ステップ 1〕 グループに属する節点（基本節点、補助節点）のうち、2節点を結ぶ線分がブロック辺と交差しないような任意の2節点を取り出す。

〔ステップ 2〕 2節点の一方の節点を取囲むようにその周囲の最適な第3番目の節点を捜査して三角形を作成する。なお、この場合の最適な条件は以下を満たすものをいう。

(a) 一つの節点を取囲むように三角形を作成するとき、その取囲みの回転方向を一定（反時計方向）とする。

(b) 作成済みの三角形と交差しない。

(c) ブロックの辺と交差しない。

(d) 作成しようとする三角形の内部に他の節点が存在しない。

(e) (a)～(d)を満たすもののうち、正三角形の形状にできるだけ近いもの、すなわち、

(三角形の内接円の半径)/(三角形の外接円の半径)

が最大となるもの。

図 6 サブブロック面の作成

Fig. 6. Generation of sub-block surface.

図6(b)に(a)図の三角形分割例を示す。このようにして作成された各々の三角形は一般に複数のブロック面に含まれる。例えば、三角形1, 2はブロック面 a と b に含まれる。次項で述べるサブブロック面の作成を行うために、三角形ごとにそれが含まれるブロック面番号を記憶する〔図6(c)参照〕。

(ii) サブブロック面の作成：(i)項で作成した一つのブロック面の三角形を幾つかのサブブロック面に分類する。すなわち、同一のブロック面番号の集合からなる三角形を抽出することにより、サブブロック面を構成する。

図6の例では、三角形1, 2と三角形3, 4, 5, 6の二つのサブブロック面が構成されている。

(iii) 三角形細分割：サブブロック面ごとに、(i)項で作成した三角形を、その面に与えられた基準面積より小さくなるように細分割する。細分割処理には、サブブロック面上に節点を一つずつ追加することのできる Delaunay のアルゴリズム⁽⁷⁾を用いる。節点の追加は次の2ステップにより行う。

〔ステップ 1〕 ブロック線分上の節点の追加

各ブロック線分に与えられた分割数に従って各線分を等分割することにより、節点を作成する。ブロック線分は通常複数のブロック面により共有されるが、それら複数の分割数のうち、最大の分割数を用いる。

このようにして作成された節点を、その節点の属するサブブロック面に挿入し、Delaunay のアルゴリズムによりサブブロック面上の三角形を細分割する。

〔ステップ 2〕 サブブロック面の内部の節点の追加

サブブロック面の基準面積よりも大きな三角形が存在すれば、その三角形の重心の位置に新しく節点を挿入し細分割する。この処理は、すべての三角形の面積が基準面積より小さくなるまで繰返す。

(2) ブロック内部の節点の作成 ブロックに与えられた分割数 l, m, n のすべてが2以上のときは、次の手順によりブロックの内部に節点を作成する。

〔ステップ 1〕 ブロックの第1面と第2面のブロック辺に与えられた分割数1を用いて向かい合う二辺を等分し、対応する点を線分で結ぶ〔図7(a)参照〕。

〔ステップ 2〕 この線分を分割数 m で等分割し第1面と第2面上に仮節点を作成する〔図7(b)参照〕。

〔ステップ 3〕 第1面と第2面の対応する仮節点を線分で結び、それを分割数 n で等分した位置に節点を作成する〔図7(c)参照〕。ただし、対象とするブロックがその内側に他のブロック、例えば B を包含

図 7 ブロック内部の節点の作成
Fig. 7. Generation of node inside of block.

図 8 四面体要素の作成
Fig. 8. Generation of tetrahedron.

する場合は、ここで作成した節点がブロック B の内部に作られることがある。このような節点およびブロック B の近傍に作られた節点は次の方法により削除する。すなわち、ブロック B を構成する四面体の外接球の内側に作成される節点を削除する。

(3) 四面体要素作成 (1), (2) 項で作成した節点を用いて、各ブロックの内部に四面体要素を作成する手順について述べる。

入力したブロック間の包含関係を用いて、以下に述べるような要素作成処理を最も内側のブロックから行う。いま、処理中のブロックをブロック i とする。

〔ステップ 1〕 既に処理済みのブロック内に作成された四面体要素の節点のうち、ブロック i に属する任意の 3 節点を取り出す。この 3 節点からなる三角形を基本三角形 123 とする。なお、作成済みの四面体要素がない場合、または、このような 3 節点が存在しない場合には、(1) 項 (iii) で作成した三角形の一つを抽出する〔図 8 (a) 参照〕。

〔ステップ 2〕 基本三角形に第 4 番目の節点を追加して四面体要素を構成するために、同じブロックに属する節点の中から最適な第 4 番目の節点を捜査する〔最適な節点の条件については後述、図 8 (b) 参照〕。

〔ステップ 3〕 四面体要素とそれを構成する線分を登録する。

〔ステップ 4〕 三角形 124 を新たに基本三角形 123 とする〔図 8 (c) 参照〕。

〔ステップ 5〕 線分 12 が四面体要素に取囲まれるまでステップ 2~4 を繰返す〔図 8 (d) 参照〕。

〔ステップ 6〕 ブロック i に属する四面体要素を構成する線分の中から、四面体要素に囲まれていない新たな線分 12 を設定する。ブロック内の四面体要素の中から線分 12 をもつ三角形の一つを抽出し、これを基本三角形 123 とする。

〔ステップ 7〕 ブロック i に属するすべての線分が四面体要素に取囲まれるまで、〔ステップ 2~6〕を繰返す。

〔ステップ 2〕の最適条件とは、次のとおりである。

(i) 作成される四面体要素は同じブロック内部に存在すること。

(ii) 線分 12 を四面体要素により取囲むときの取囲みの回転方向は、図 8 に示すように一定（節点 1 から節点 2 を見て反時計方向）とする。

(iii) 作成された四面体要素が Delaunay の条件を満足すること。この場合の Delaunay の条件とは二次元場の拡張であり、“四面体の外接球の内側には他の節点が存在してはならない”ということである。

(iv) 作成済みの四面体要素と作成しようとする四面体要素が互いに干渉しないこと。すなわち、作成しようとする四面体要素を構成する稜線が他の四面体の稜線と交差したり、これらを構成する三角形を貫くことがないこと。

(v) 作成しようとする四面体要素がブロックの線分と交差しないこと。

(vi) (i)~(v) を満たす節点のうちで、形状が正四面体に最も近いこと。

形状が正四面体に最も近いものを選ぶ基準として、

(四面体の内接球の半径)/(四面体の外接球の半径)を用い、この値が最大となるものが正四面体に最も近いとする。

4. 適用例

提案した自動分割手法を磁界解析の次の二つのモデルに適用した。

〔モデルⅠ〕 柱状鉄心の周りにコイルのあるモデル

〔モデルⅡ〕 リアクトルモデル

図9, 図10にそれぞれのモデルの透視図, ブロックデータおよび要素分割結果を示す。また, 各々のモデルに関する入力ブロック数や得られた節点数, 四面体要素数などのデータを表1に示す。入力ブロック数

図9 柱状鉄心とコイルのモデル

Fig. 9. Model of a pillar-shaped core with coil.

図10 リアクトルモデル

Fig. 10. Model of a reactor.

表 1 入力ブロック数と四面体要素データ
Table 1. The number of input blocks and data of tetrahedron element.

モデル	I	II
ブロック数	10	11
節点数	401	306
要素数	1,758	1,329
内接球の半径 外接球の半径の最小値	0.078829	0.10104
内接球の半径 外接球の半径の最大値	0.33333	0.33333

はモデル I, II について, それぞれ 10, 11 であり, 三次元場の要素分割のための入力データとしては少ないといえる。また, 四面体の (内接球の半径)/(外接球の半径) の値が全四面体要素の 7 割強において 0.2 以上となっており, また最小値は約 0.1 であることから, 全体的にみて正四面体に近い形状になっていることがわかる。ちなみに, この値は正四面体においては, 0.33333 である。

更にモデルの要素分割結果から, 領域全体にわたって要素の粗密が考慮された分割ができていることがわかる。

以上の結果より, 提案した自動要素分割法は比較的簡単な入力データを用いて, 四面体要素分布の適切な粗密が考慮され, そのうえ正四面体に近い分割が実現可能な方法であるといえる。

4. ま と め

三次元有限要素解析のための四面体要素を, 計算機に自動作成させるための要素分割法を開発した。

本論文では, 要素分割のための必要な入力データ,

および分割手法について述べた。また, 本手法を磁界解析のモデルに適用し, 良好な結果を示した。

本論文で提案した自動分割法は, 解析領域を幾つかの凸多角柱のブロックで構成し, 各ブロックごとに四面体要素を作成する方法であり, その特徴として次の点が挙げられる。

(1) ブロック入力の方法をとっているのので, 要素分布の適切な粗密を容易に考慮できる。

(2) 入力データが比較的単純で, しかもブロック間の包含関係を許しているのので, 複雑な形状の物体を含む空気領域の入力が容易に行える。

(3) Delaunay のアルゴリズムおよび四面体形状修正処理の適用により, 作成される四面体要素の形状は概して正四面体に近い。(昭和 63 年 5 月 23 日受付)

文 献

- (1) 中田:「電気機器の電磁現象とその解析」, 東大工学部原子力工学研究施設弥生研資, UTNL-R-217 (昭 58)
- (2) 山下・中前:「有限要素解析のための三角形要素自動作成の方法」, 情報処理学論, 21, 183 (昭 55-3)
- (3) 中田・高橋・藤原・岡崎・吉岡:「三次元有限要素法のための分割図自動作成プログラムの開発」, 昭 62 電気四学会中国支部連大, No.010515
- (4) 宮本・金田・山下・中前:「会話形四面体要素作成システム」, シミュレーション学会第 8 回電気・電子工学への有限要素法への応用シンポジウム, No.24 (昭 62)
- (5) N. V. Phai: "Automatic mesh generation with tetrahedron elements, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 18, 273 (1982)
- (6) J. C. Sabonnadiere, Y. D. Terrail, G. Meunier & J. L. Coulomb: "Finite element pre-processing in electromagnetics", *Computational Electromagnetics IMACS* (1986)
- (7) J. C. Cavendish, D. A. Field & W. H. Frey: "An approach to automatic three dimensional finite element mesh generation", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 21, 329 (1985)