パラメータ同定における複素数領域モデル規範 適応システムの有効性

正員 竹下 隆 晴 (岐阜高専)
正員 松井 信 行 (名古屋工大)

Effectivity of Using Model Reference Adaptive System in the Field of Complex Numbers for Parameter Identification

Takaharu Takeshita, Member (Gifu National College of Technology), Nobuyuki Matsui,
Member (Nagoya Institute of Technology)

The model reference adaptive system (MRAS) is generally described in the field of real numbers. Therefore, the MRAS cannot be directly applicable to the system described by complex numbers such as three-phase ac motors.

In order to apply the MRAS to the discrete-time linear time-invariant system whose coefficients and variables are complex numbers, the authors expand the theory of the MRAS into the field of complex numbers. The hyperstability theory in the field of complex numbers is used to give the asymptotic stability of the suggested algorithm.

The effectiveness of the suggested algorithm is proved by simulation results for the parameter identification. The results show that the convergence time of the parameters using the proposed method can be reduced to one tenth compared with that using the MRAS in the field of real numbers.

キーワード：モデル規範適応システム (MRAS), パラメータ同定, 複素数領域, 超安定論, 交流電動機

1. ま え が き

モデル規範適応システム (MRAS) は一般に実数領域で理論展開され、複素数領域については述べられていないように思われる。従って、交流電動機などの三相交流機器を複素座標上で記述した方程式⁽¹⁾に対して MRAS の理論を直接適用することはできない。

本論文では、係数および変数が複素数で記述される離散時間多変数の線形時不変システムに対して、MRAS の理論が適用できるように実数領域の MRAS のパラメータ同定理論を複素数領域に拡張している。同定アルゴリズムとしては基本的な比例+積分アルゴリズムを扱っている。複素数領域に拡張された MRAS の安定性の証明は、実数領域の超安定論から導出した複素数領域の超安定論を用いて行っている。

複素数領域と実数領域の MRAS の関係を明らかに

するために、複素数領域で記述されるシステムに等価な実数領域のシステムの一表現法を示している。両者の表現を比較すると、実数領域ではパラメータ行列に物理的に等しい要素が二つずつ存在するので、パラメータ行列の要素数は複素数領域の 2 倍になる。従って、実数領域の MRAS を用いてパラメータ同定システムを構成すると物理的に等しいパラメータは別々に同定されるので、同定に要する計算は複雑になり不合理である。これに対して複素数領域の MRAS を用いると、実数領域の半分のパラメータ数を同定することになることから、同定アルゴリズムの簡単化、計算量の削減が図られると共にパラメータ収束速度の改善も期待できる。

実数領域および複素数領域それぞれのパラメータ同定のシミュレーションを行い、複素数領域でパラメータを同定することの有効性を示している。

2. 複素同定アルゴリズム

離散時間多変数の線形時不変複素システム

$$\mathbf{y}(k+1) = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{y}(k) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(k) \quad \dots\dots\dots (1)$$

のMRASに基づいたパラメータ同定法について考える。ただし、 $\bar{}$ は複素数の共役を意味し、 $\mathbf{y}(k)$ 、 $\mathbf{u}(k)$ は $n \times 1$ の出力、入力行列、 $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ は $n \times n$ のパラメータ行列でそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \begin{bmatrix} y_{r1}(k) + jy_{i1}(k) \\ \vdots \\ y_{rn}(k) + jy_{in}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}(k) &= \begin{bmatrix} u_{r1}(k) + ju_{i1}(k) \\ \vdots \\ u_{rn}(k) + ju_{in}(k) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{r11} + ja_{i11} & \dots & a_{r1n} + ja_{i1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{rn1} + ja_{in1} & \dots & a_{rn n} + ja_{inn} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} b_{r11} + jb_{i11} & \dots & b_{r1n} + jb_{i1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{rn1} + jb_{in1} & \dots & b_{rn n} + jb_{inn} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。

(1)式のプロセスのパラメータ行列 $\bar{\mathbf{A}}$ 、 $\bar{\mathbf{B}}$ を並列式MRASのアルゴリズムにより同定する方法について説明する。(1)式のパラメータ行列と入出力行列をそれぞれまとめて、

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{P}^* \boldsymbol{\phi}(k) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $*$ ：行列の共役転置

を表す。 $\mathbf{P}$ 、 $\boldsymbol{\phi}(n)$ はそれぞれ、

$$\mathbf{P}^* = [\bar{\mathbf{A}} \quad \bar{\mathbf{B}}], \quad \boldsymbol{\phi}^T(k) = [\mathbf{y}^T(k) \quad \mathbf{u}^T(k)] \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。ここで、 T は行列の転置を意味する。(1)式のプロセスに対する推定モデル⁽²⁾を添字 M を付けて、

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_M(k+1) &= \bar{\mathbf{A}}_M(k+1) \mathbf{y}_M(k) + \bar{\mathbf{B}}_M(k+1) \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{P}_M^*(k+1) \boldsymbol{\phi}_M(k) \quad \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

と定義する。ただし、推定パラメータ行列 $\mathbf{P}_M^*(k+1)$ 、モデルの入出力行列 $\boldsymbol{\phi}_M(k)$ はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_M^*(k+1) &= [\bar{\mathbf{A}}_M(k+1) \quad \bar{\mathbf{B}}_M(k+1)] \\ \boldsymbol{\phi}_M^T(k) &= [\mathbf{y}_M^T(k) \quad \mathbf{u}^T(k)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。

プロセスと推定モデルの出力誤差 $\boldsymbol{\epsilon}(k)$ を、

$$\boldsymbol{\epsilon}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{y}_M(k) \quad \dots\dots\dots (7)$$

と記し、次の(8)～(11)式で与えられる比例+積分同定アルゴリズムを用いることによって、実数領域の

MRASを用いた同定法⁽²⁾と同様に漸近安定なパラメータ同定システムが構成できる。

$$\mathbf{P}_M(k) = \mathbf{P}_{Ml}(k) + \mathbf{P}_{Mp}(k) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{Ml}(k) &= \mathbf{P}_{Ml}(k-1) \\ &\quad + \frac{\mathbf{F} \boldsymbol{\phi}_M(k-1) \mathbf{v}_0^*(k)}{1 + \boldsymbol{\phi}_M^*(k-1) \{\mathbf{F} + \mathbf{F}'(k-1)\} \boldsymbol{\phi}_M(k-1)} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{Mp}(k) &= \frac{\mathbf{F}'(k-1) \boldsymbol{\phi}_M(k-1) \mathbf{v}_0^*(k)}{1 + \boldsymbol{\phi}_M^*(k-1) \{\mathbf{F} + \mathbf{F}'(k-1)\} \boldsymbol{\phi}_M(k-1)} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(k) &= \mathbf{y}(k) - \mathbf{P}_M^*(k-1) \boldsymbol{\phi}_M(k-1) \\ &\quad + \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(k-1) \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{F}$ は任意の正定エルミート行列($\mathbf{F} > 0$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^*$)で、 $\mathbf{F}'(k)$ は任意の k に対して、

$$\mathbf{F}'(k) + 1/2 \mathbf{F} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

を満足するエルミート行列である。また $n \times n$ 行列 $\mathbf{C}$ はパルス伝達関数 $\mathbf{H}(z)$

$$\mathbf{H}(z) = (\mathbf{I}_n + z^{-1} \mathbf{C})(\mathbf{I}_n - z^{-1} \bar{\mathbf{A}})^{-1} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、 $\mathbf{I}_n$ ： $n \times n$ の単位行列

が、実数領域の強正実に相当した次の条件(I)、(II)を満足するように定められる。

(I) $\mathbf{H}(z)$ のすべての要素が開平面 $|z| \geq 1$ で解析的であること。

(II) $\mathbf{H}(z) + \mathbf{H}^*(z)$ が単位平面上 $|z| = 1$ で正定エルミート行列であること。

3. 複素超安定論

〈3・1〉 複素数領域の超安定論 (8)～(11)式の

同定アルゴリズムを用いた同定システムは漸近安定となること、すなわち次の(14)式が成立することを証明するために、離散時間系の複素システムを前提とした超安定論を示す。

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{v}(k) = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、同定誤差信号 $\mathbf{v}(k)$ は $n \times 1$ の複素行列で、

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(k) &= \begin{bmatrix} v_{r1}(k) + jv_{i1}(k) \\ \vdots \\ v_{rn}(k) + jv_{in}(k) \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\epsilon}(k) + \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}(k-1) \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

である。

図1は複素数を要素とする行列を用いた非線形時変フィードバック系である。ここで、 $\mathbf{w}(k)$ 、 $\mathbf{w}_1(k)$ は $n \times 1$ の複素行列で、

図 1 複素数領域の非線形時変フィードバック系

Fig. 1. Nonlinear time-varying feedback system in the field of complex numbers.

図 2 実数領域の非線形時変フィードバック系

Fig. 2. Nonlinear time-varying feedback system in the field of real numbers.

$$w(k) = \begin{bmatrix} w_{r1}(k) + jw_{i1}(k) \\ \vdots \\ w_{rm}(k) + jw_{im}(k) \end{bmatrix} = -w_1(k) \cdots (16)$$

と記せる。このフィードバック系が漸近超安定となる条件は、次の(1)、(2)をとともに満足することである。

(1) 前向き線形定常複素ブロックのパルス伝達関数行列 $H(z)$ が前章に示した条件(I)、(II)を満足すること。

(2) 後ろ向き非線形時変複素ブロックが任意の k_1 に対して次式を満足すること。

$$\sum_{k=0}^{k_1} \{v^*(k)w(k) + w^*(k)v(k)\} \geq -\gamma_0^2 \cdots (17)$$

ただし、 γ_0^2 は k_1 に依存しない有限な正の定数

〈3・2〉 実数領域の非線形フィードバック系

複素数領域の超安定論の証明を行うために、図1の複素数領域の非線形フィードバック系と図2の実数領域の非線形フィードバック系が等価であることを示す。図2の前向き線形ブロックは、図1の前向きブロックとその共役なブロックを並列にもち、更に $2n \times 2n$ のユニタリー変換行列 T

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & j \\ 1 & -j & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -j \end{bmatrix} \cdots (18)$$

を用いて構成され、 $2n \times 1$ の実行列 $v_r(k)$ は、

$$v_r(k) = T^* \begin{bmatrix} v(k) \\ \overline{v(k)} \end{bmatrix} = \sqrt{2} [v_{r1}(k) \ v_{i1}(k) \cdots v_{rm}(k) \ v_{im}(k)]^T \cdots (19)$$

と得られる。図2の後ろ向き非線形ブロックも、図1の後ろ向きブロックとその共役ブロックおよび変換行列 T により構成され、 $2n \times 1$ の実行列 $w_r(k)$ は、

$$w_r(k) = -w_1(k) = T^* \begin{bmatrix} w(k) \\ \overline{w(k)} \end{bmatrix} = \sqrt{2} [w_{r1}(k) \ w_{i1}(k) \cdots w_{rm}(k) \ w_{im}(k)]^T \cdots (20)$$

と得られる。(15)、(16)、(19)、(20)式から明らかに $v_r(k)$ 、 $w_r(k)$ の各要素は $v(k)$ 、 $w(k)$ の各要素の実部および虚部を $\sqrt{2}$ 倍した値であり、図1と図2のシステムは等価である。

また、図2の線形ブロックの伝達関数行列 $H_r(z)$ は、

$$H_r(z) = T^* \begin{bmatrix} H(z) & 0 \\ 0 & \overline{H(\bar{z})} \end{bmatrix} T \cdots (21)$$

と得られる。

〈3・3〉 複素超安定論の証明 〈3・1〉節に示した複素数領域の超安定論の証明を実数領域の超安定論に基づいて行う。前節の説明から明らかに図1と図2の系は等価であることから、図2の系が実数領域で漸近超安定となる条件が、先に示した図2の複素数領域の漸近超安定の条件(1)、(2)と等価であることを示す。

図2の非線形フィードバック系が漸近超安定であるためには、次の実数領域の超安定論の条件(3)、(4)を満足しなければならない^{(2)~(4)}。

(3) 前向き線形実ブロックのパルス伝達関数行列 $H_r(z)$ が強正実であること。すなわち、次の条件(III)、(IV)、(V)を同時に満足すること。

(III) $H_r(z)$ のすべての要素が開平面 $|z| \geq 1$ で解析的であること。

(IV) $|z| \geq 1$ のすべての z に対して $\overline{H_r(z)} = H_r(\bar{z})$ が成立すること。

(V) $H_r(z) + H_r^T(\bar{z})$ が単位平面上 $|z|=1$ で正定エルミート行列であること。

(4) 後ろ向き非線形時変実ブロックがすべての k_1 に対して次式を満足すること。

$$\sum_{k=0}^{k_1} v_r^T(k) w_r(k) \geq -\gamma_1^2 \quad (22)$$

ただし, γ_1^2 : k_1 に依存しない有限な正の定数

条件(3), (4)が成り立つとき条件(1), (2)が成立することを示す。

まず条件(1)の(I)が成立することを示す。複素数 h_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, m$) を要素とする $m \times m$ 行列 H のノルム $\|H\|$ を

$$\|H\| = \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |h_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \quad (23)$$

と定義すれば, (21)式の関係から伝達関数行列 $H_r(z)$, $H(z)$, $\overline{H(\bar{z})}$ のそれぞれのノルムに対して,

$$\|H_r(z)\| = \|H(z)\| + \|\overline{H(\bar{z})}\| \quad (24)$$

の関係が成立する。条件(III)は $|z| \geq 1$ のすべての z に対して $\|H_r(z)\|$ が有限な値になることを意味している。このとき(24)式から明らかに $0 \leq \|H(z)\| \leq \|H_r(z)\|$ であるから条件(1)の(I)は満足される。

次に, 条件(1)の(II)が成立することを示す。 $H(z) + H^*(z)$ は明らかにエルミート行列であるから $|z|=1$ で正定であることを示せばよい。エルミート行列が正定であるための必要十分条件はその行列のすべての固有値が正であることである⁽⁵⁾。また, (21)式より,

$$\begin{aligned} H_r(z) + H_r^T(\bar{z}) \\ = T^* \begin{bmatrix} H(z) + H^*(z) & 0 \\ 0 & \overline{H(\bar{z})} + H^T(\bar{z}) \end{bmatrix} T \end{aligned} \quad (25)$$

が成立する。従って, 条件(3)の(V)より $|z|=1$ において $H_r(z) + H_r^T(\bar{z})$ のすべての固有値は正であり, その固有値は T がユニタリ行列であることから $H(z) + H^*(z)$ と $\overline{H(\bar{z})} + H^T(\bar{z})$ の固有値を合せたものに等しいので⁽⁵⁾, 条件(1)の(II)は満足される。

条件(2)が成立することを示す。(19), (20)式より次の式変形ができる。

$$\begin{aligned} v_r^T(k) w_r(k) &= \left\{ T^* \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \right\}^* T^* \begin{bmatrix} w(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \\ &= v^*(k) w(k) + \{ v^T(k) \overline{w(k)} \}^T \\ &= v^*(k) w(k) + w^*(k) v(k) \end{aligned} \quad (26)$$

従って, 条件(4)の(22)式より,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k_1} v_r^T(k) w_r(k) \\ = \sum_{k=0}^{k_1} \{ v^*(k) w(k) + w^*(k) v(k) \} \geq -\gamma_1^2 \end{aligned} \quad (27)$$

が得られるので, γ_0^2 を γ_1^2 に等しく選ぶことによって条件(2)が満足される。

逆に, 条件(1), (2)が成り立つとき条件(3), (4)が成立することを示す。

条件(1)の(I)より $|z| \geq 1$ のすべての z に対して $\|H(z)\|$ が有限な値になる。また $\overline{H(\bar{z})}$ の極は $H(z)$ の極と共役の関係にあることから $|z| \geq 1$ において $\|\overline{H(\bar{z})}\|$ も有限な値になる。従って, (24)式より $\|H_r(z)\|$ は $|z| \geq 1$ において有限な値となることから条件(3)の(III)が満足される。

$$T^T \bar{T} = I_{2n}$$

ただし, I_{2n} : $2n \times 2n$ の単位行列

であることを考慮して, (21)式を変形すると,

$$\begin{aligned} H_r(\bar{z}) &= T^T \bar{T} T^* \begin{bmatrix} H(\bar{z}) & 0 \\ 0 & \overline{H(\bar{z})} \end{bmatrix} T T^T \bar{T} \\ &= T^T \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(\bar{z}) & 0 \\ 0 & \overline{H(\bar{z})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \bar{T} \\ &= T^* \begin{bmatrix} H(z) & 0 \\ 0 & \overline{H(\bar{z})} \end{bmatrix} T = \overline{H_r(z)} \end{aligned} \quad (28)$$

の関係が得られ, 条件(3)の(IV)が満足される。

先に述べたように, エルミート行列が正定であるための必要十分条件は, その行列のすべての固有値が正であることである。条件(1)の(II)より $|z|=1$ で $H(z) + H^*(z)$ は正定であるから z に対して共役な $H(\bar{z}) + H^*(\bar{z})$ の固有値はすべて正である。更に, 全体の共役をとった $\overline{H(\bar{z})} + H^T(\bar{z})$ の固有値もすべて正となり, (25)式から明らかに条件(3)の(V)が満足される。

条件(4)については, 条件(2)および(26)式より任意の k_1 に対して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k_1} \{ v^*(k) w(k) + w^*(k) v(k) \} \\ = \sum_{k=0}^{k_1} v_r^T(k) w_r(k) \geq -\gamma_0^2 \end{aligned} \quad (29)$$

が成立するので, γ_1^2 を γ_0^2 に等しく選ぶことによって満足される。

4. 漸近安定性の証明

<4・1> 等価フィードバック系の導出 第2章に示した同定アルゴリズムを用いると同定システムが漸近

安定となることを前章の複素超安定論を用いて証明する。まず同定システムの等価フィードバック系を導出する。(1), (5), (7)式より次式が得られる。

$$\epsilon(k+1) = \bar{A}\epsilon(k) + \{P - P_M(k+1)\}^* \phi_M(k) \quad (30)$$

推定モデルの出力および出力誤差のそれぞれの暫定値を、

$$y_{M0}(k+1) = P_M^*(k) \phi_M(k) \quad (31)$$

$$\epsilon_0(k) = y(k) - y_{M0}(k) \quad (32)$$

と定義する。(1), (11), (31), (32)式より、

$$\epsilon_0(k+1) = \bar{A}\epsilon_0(k) + \{P - P_M(k+1)\}^* \phi_M(k) \quad (33)$$

$$v_0(k) = \epsilon_0(k) + C\epsilon(k-1) \quad (34)$$

が得られる。(15)式から(34)式を辺々差し引き、(30), (33)式の関係代入すると、

$$v(k) - v_0(k) = \{P_M(k-1) - P_M(k)\}^* \phi_M(k-1) \quad (35)$$

となり、更に(8)~(10)式を用いて変形すると、

$$v(k) = \frac{v_0(k)}{1 + \phi_M^*(k-1)\{F + F'(k-1)\}\phi_M(k-1)} \quad (36)$$

が得られる。(9), (10)式は(36)式を用いてそれぞれ

$$P_M(k) = P_M(k-1) + F\phi_M(k-1)v^*(k) \quad (37)$$

$$P_{MP}(k) = F'(k-1)\phi_M(k-1)v^*(k) \quad (38)$$

と変形できる。

ここで、 $r(k)$, $w(k)$, $w_1(k)$ をそれぞれ、

$$r(k) = P_M(k) - P \quad (39)$$

$$w(k) = -w_1(k) = \{P_M(k) - P\}^* \phi_M(k-1) \quad (40)$$

と定義すると、(8), (15), (30), (37)~(40)式を用いて等価フィードバック系が、

$$\epsilon(k) = \bar{A}\epsilon(k-1) + w_1(k) \quad (41)$$

$$v(k) = \epsilon(k) + C\epsilon(k-1) \quad (42)$$

$$r(k) = r(k-1) + F\phi_M(k-1)v^*(k) \quad (43)$$

$$w^*(k) = -w^*(k) = \phi_M^*(k-1)r(k-1) + \phi_M^*(k-1) \times \{F + F'(k-1)\}\phi_M(k-1)v^*(k) \quad (44)$$

と得られる。図3に示すように(41), (42)式が前向き線形複素ブロック、(43), (44)式が後ろ向き非線形複素ブロックをそれぞれ表す。

〈4・2〉 安定性の証明 等価フィードバック系が漸近超安定であるための条件(1), (2)を満足するこ

図3 等価フィードバック系
Fig. 3. Equivalent feedback system.

とを示す。行列 C は、(13)式の前向き線形ブロックのパルス伝達関数行列 $H(z)$ が条件(1)を満たすように決められるので、後ろ向き非線形ブロックが条件(2)を満足することを示せば十分である。(44)式の $w(k)$ を次式のように $w_a(k)$ と $w_b(k)$ に分けて、

$$w^*(k) = w_a^*(k) + w_b^*(k) \quad (45)$$

$$w_a^*(k) = \phi_M^*(k-1)\{1/2F + F'(k-1)\} \times \phi_M(k-1)v^*(k) \quad (46)$$

$$w_b^*(k) = \phi_M^*(k-1)r(k-1) + 1/2\phi_M^*(k-1)F \times \phi_M(k-1)v^*(k) \quad (47)$$

と表したとき、任意の k_1 に対して、

$$\sum_{k=0}^{k_1} \{v^*(k)w_a(k) + w_a^*(k)v(k)\} \geq -\gamma_a^2 \quad (48)$$

$$\sum_{k=0}^{k_1} \{v^*(k)w_b(k) + w_b^*(k)v(k)\} \geq -\gamma_b^2 \quad (49)$$

を満足する k_1 に依存しない正の定数 γ_a^2 , γ_b^2 が存在すれば条件(2)は成立する。(12)式を考慮して(46)式を用いて(48)式の左辺を計算すると、

$$\sum_{k=0}^{k_1} 2v^*(k)v(k)\phi_M^*(k-1)\{1/2F + F'(k-1)\}\phi_M(k-1) \geq 0 \quad (50)$$

となるので、(48)式は満足される。次の定理を用いて(49)式が成立することを説明する。

〔定理〕 離散時間の非線形複素システム

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k+1) \quad (51)$$

$$v(k+1) = C(k)x(k) + D(k)u(k+1) \quad (52)$$

について以下の関係が成立する。ただし、すべての行列はその要素が複素数であり、 $x(k)$ は $m_1 \times m_2$, $u(k)$ および $v(k)$ は $m_3 \times m_2$ の行列であり、 $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$, $D(k)$ はそれぞれ適切な次元の時変行列である。(51), (52)式のシステムにおいて、

$$A^*(k)P(k+1)A(k) - P(k) = -Q(k) \quad (53)$$

$$B^*(k)P(k+1)A(k) + S^*(k) = C(k) \quad (54)$$

$$D(k) + D^*(k) - B^*(k)P(k+1)B(k) = R(k) \quad \dots\dots\dots (55)$$

$$\begin{bmatrix} Q(k) & S(k) \\ S^*(k) & R(k) \end{bmatrix} \geq 0 \quad \dots\dots\dots (56)$$

を満足する時変正定エルミート行列 $P(k)$, 時変半正定エルミート行列 $Q(k)$ および時変行列 $R(k)$, $S(k)$ が存在するならば, 任意の k_1 に対して不等式

$$\sum_{k=0}^{k_1} \text{tr} \{v^*(k+1)u(k+1) + u^*(k+1)v(k+1)\} \geq -\text{tr} \{x^*(0)P(0)x(0)\} \quad \dots\dots\dots (57)$$

が満足される。ただし, tr は行列のトレースを意味する。 (定理終)

上記の定理に用いている記号は, 本論文中的同じ記号とは区別して用いられていることに注意しよう。また, 定理の証明は付録に記した。

定理の (51), (52) 式と (43), (47) 式を比較し,

$$\left. \begin{aligned} x(k+1) &= r(k), & u(k+1) &= v^*(k) \\ v(k+1) &= w_s^*(k), & A(k) &= I_{2n} \\ B(k) &= F\phi_M(k-1), & C(k) &= \phi_M^*(k-1) \\ D(k) &= 1/2\phi_M^*(k-1)F\phi_M(k-1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (58)$$

と対応させる。ただし, 上式の左辺は (51), (52) 式の行列, 右辺は (43), (47) 式の行列である。更に,

$$\left. \begin{aligned} P(k) &= F^{-1} (>0), & Q(k) &= 0 \\ R(k) &= 0, & S(k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (59)$$

と選ぶことで, 定理の (53)~(56) 式がすべて満足されるので, (57) 式に対応して,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k_1} \text{tr} \{w_s(k)v^*(k) + v(k)w_s^*(k)\} \\ = \sum_{k=0}^{k_1} \{v^*(k)w_s(k) + w_s^*(k)v(k)\} \\ \geq -\text{tr} \{r^*(0)F^{-1}r(0)\} \quad \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

が任意の k_1 について成立し, (49) 式が満足される。以上により等価フィードバック系は漸近安定となり, (14) 式が成立することが示された。

5. 実方程式への変換法

(1) 式の複素システムに対応した実システムについて考える。(1) 式とその共役な方程式

$$\underline{y}(k+1) = \underline{A} \underline{y}(k) + \underline{B} \underline{u}(k) \quad \dots\dots\dots (61)$$

を合せて,

$$\begin{bmatrix} \underline{y}(k+1) \\ \underline{y}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{A}} & 0 \\ 0 & \underline{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\underline{B}} & 0 \\ 0 & \underline{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (62)$$

が得られる。(62) 式を (18) 式のユニタリ一行列 T を用いて変換すると次の実方程式が得られる。

$$\underline{y}_r(k+1) = \underline{A}_r \underline{y}_r(k) + \underline{B}_r \underline{u}_r(k) \quad \dots\dots\dots (63)$$

ただし, $\underline{y}_r(k)$, $\underline{u}_r(k)$ はそれぞれ $2n \times 1$ の出力, 入力行列, $\underline{A}_r$, $\underline{B}_r$ は $2n \times 2n$ のパラメータ行列,

$$\underline{y}_r(k) = T^* \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ \underline{y}(k) \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{2} [y_{r1}(k) \ y_{i1}(k) \cdots y_{rn}(k) \ y_{in}(k)]^T$$

$$\underline{u}_r(k) = T^* \begin{bmatrix} \underline{u}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{2} [u_{r1}(k) \ u_{i1}(k) \cdots u_{rn}(k) \ u_{in}(k)]^T$$

$$\underline{A}_r = T^* \begin{bmatrix} \bar{\underline{A}} & 0 \\ 0 & \underline{A} \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{r11} & a_{i11} & a_{r12} & \cdots & a_{r1n} & a_{i1n} \\ -a_{i11} & a_{r11} & -a_{i12} & \cdots & -a_{r1n} & a_{i1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{rn1} & a_{in1} & a_{rn2} & \cdots & a_{rnn} & a_{inn} \\ -a_{in1} & a_{rn1} & -a_{in2} & \cdots & -a_{inn} & a_{rnn} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_r = T^* \begin{bmatrix} \bar{\underline{B}} & 0 \\ 0 & \underline{B} \end{bmatrix} T$$

$$= \begin{bmatrix} b_{r11} & b_{i11} & b_{r12} & \cdots & b_{r1n} & b_{i1n} \\ -b_{i11} & b_{r11} & -b_{i12} & \cdots & -b_{r1n} & b_{i1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{rn1} & b_{in1} & b_{rn2} & \cdots & b_{rnn} & b_{inn} \\ -b_{in1} & b_{rn1} & -b_{in2} & \cdots & -b_{inn} & b_{rnn} \end{bmatrix}$$

$$\quad \dots\dots\dots (64)$$

である。(1), (2) 式の複素方程式と (63), (64) 式の実方程式を比較して明らかに, 複素方程式の各要素の実部, 虚数部は実方程式ではそれぞれ独立した一つの要素に対応し, 入出力行列の各要素は実方程式では $\sqrt{2}$ 倍され, パラメータ行列については要素の大きさは変化しない。従って, (63) 式の実方程式は (1) 式の複素方程式と等価な方程式である。

(63) 式の実方程式のパラメータ行列 $\underline{A}_r$, $\underline{B}_r$ の要素において (64) 式から明らかに物理的に等しいものが二つずつ存在する。従って, 実数領域の MRAS を用いて (63) 式のパラメータを同定すると $8n^2$ 個のパラメータを同定しなければならない。(1) 式の複素方程式においてはパラメータ行列 $\bar{\underline{A}}$, $\bar{\underline{B}}$ の要素数は実部, 虚部をそれぞれ一つのパラメータとして扱うと $4n^2$ となり, 実方程式の半分になっている。このように同定するパラメータの数を減少することにより, 同定アルゴリズムの簡単化, 同定処理時間の短縮およびパラメータの収束速度の改善が期待できる。

6. シミュレーション結果

複素数領域で同定することの有効性を示すために、簡単な一例に対して複素数領域および実数領域それぞれのパラメータ同定のシミュレーションを行う。

〈6・1〉 複素数領域の同定特性 (1)式の方程式とその入力がそれぞれ

$$\begin{aligned} y_1(k+1) + jy_2(k+1) \\ = [0.8 - j0.5 \quad 1 - j0.3] \begin{bmatrix} y_1(k) + jy_2(k) \\ u_1(k) + ju_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} u_1(k) + ju_2(k) \\ = \cos(2\pi k/10) + 0.8 \cos(2\pi k/8) \\ + 0.6 \cos(2\pi k/6) + 0.4 \cos(2\pi k/4) \\ + j\{\sin(2\pi k/10) + 0.8 \sin(2\pi k/8) \\ + 0.6 \sin(2\pi k/6) + 0.4 \sin(2\pi k/4)\} \end{aligned} \quad (66)$$

と与えられ、 $k=0$ における出力および推定パラメータを零としてパラメータ同定を行ったときの特性を求める。(5)、(31)式にそれぞれ対応した出力とその暫定値は、

$$\begin{aligned} y_{M1}(k+1) + jy_{M2}(k+1) \\ = [a_{M1}(k+1) - ja_{M2}(k+1) \quad b_{M1}(k+1) \\ - jb_{M2}(k+1)] \begin{bmatrix} y_{M1}(k) + jy_{M2}(k) \\ u_1(k) + ju_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} y_{M01}(k+1) + jy_{M02}(k+1) \\ = [a_{M1}(k) - ja_{M2}(k) \quad b_{M1}(k) - jb_{M2}(k)] \\ \times \begin{bmatrix} y_{M1}(k) + jy_{M2}(k) \\ u_1(k) + ju_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

と記せる。また(8)～(11)式の同定アルゴリズムにおいて $\mathbf{F}=5\mathbf{I}_n$, $\mathbf{F}'(k)=\mathbf{0}$, $\mathbf{C}=\mathbf{0}$ と選ぶと、次の同定アルゴリズムが得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{M1}(k) + ja_{M2}(k) \\ b_{M1}(k) + jb_{M2}(k) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{M1}(k-1) + ja_{M2}(k-1) \\ b_{M1}(k-1) + jb_{M2}(k-1) \end{bmatrix} \\ \times 5 \begin{bmatrix} y_{M1}(k-1) + jy_{M2}(k-1) \\ u_1(k-1) + ju_2(k-1) \end{bmatrix} \{ \varepsilon_{01}(k) \\ - j\varepsilon_{02}(k) \} / [1 + 5\{y_{M1}^2(k-1) + y_{M2}^2(k-1) \\ + u_1^2(k-1) + u_2^2(k-1)\}] \end{aligned} \quad (69)$$

ただし

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01}(k) + j\varepsilon_{02}(k) \\ = \{y_1(k) - y_{M01}(k)\} + j\{y_2(k) - y_{M02}(k)\} \end{aligned} \quad (70)$$

図4 複素同定アルゴリズムによる同定特性
Fig. 4. Identification characteristics based on the proposed complex identification algorithm.

である。図4に上記の同定アルゴリズムに従ってパラメータ同定を行ったときの特性を示す。25サンプル目の推定パラメータの値はそれぞれ $a_{M1}(25)=0.801$, $a_{M2}(25)=0.504$, $b_{M1}(25)=0.998$, $b_{M2}(25)=0.295$ であり、プロセスのパラメータにほとんど一致している。

〈6・2〉 実数領域での同定特性 (65)式の複素方程式を第5章で述べたように実方程式に変更し、参考文献(2)などに述べられている実数領域のMRASを用いてパラメータ同定を行った場合の特性を求める。(65)式に対応したプロセスとその推定モデルの出力および暫定値はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sqrt{2} y_1(k+1) \\ \sqrt{2} y_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.5 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} y_1(k) \\ \sqrt{2} y_2(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ -0.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} u_1(k) \\ \sqrt{2} u_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sqrt{2} y_{M1}(k+1) \\ \sqrt{2} y_{M2}(k+1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{M11}(k+1) & a_{M12}(k+1) & b_{M11}(k+1) \\ a_{M21}(k+1) & a_{M22}(k+1) & b_{M21}(k+1) \end{bmatrix}^* \\ * \begin{bmatrix} b_{M12}(k+1) \\ b_{M22}(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} y_{M1}(k) \\ \sqrt{2} y_{M2}(k) \\ \sqrt{2} u_1(k) \\ \sqrt{2} u_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sqrt{2} y_{M01}(k+1) \\ \sqrt{2} y_{M02}(k+1) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} a_{M11}(k) & a_{M12}(k) & b_{M11}(k) & b_{M12}(k) \\ a_{M21}(k) & a_{M22}(k) & b_{M21}(k) & b_{M22}(k) \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} \sqrt{2} y_{M1}(k) \\ \sqrt{2} y_{M2}(k) \\ \sqrt{2} u_1(k) \\ \sqrt{2} u_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

図 5 実数領域での同定特性
Fig. 5. Identification characteristics based on the conventional method.

と記せる。(69)式の同定アルゴリズムと等価になるようにゲインを $5I_{2n}$ とした積分同定アルゴリズムが、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{M11}(k) & a_{M12}(k) & b_{M11}(k) & b_{M12}(k) \\ a_{M21}(k) & a_{M22}(k) & b_{M21}(k) & b_{M22}(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{M11}(k-1) & a_{M12}(k-1) & b_{M11}(k-1) \\ a_{M21}(k-1) & a_{M22}(k-1) & b_{M21}(k-1) \end{bmatrix} * \\ & \quad * \begin{bmatrix} b_{M12}(k-1) \\ b_{M22}(k-1) \end{bmatrix} + \frac{10 \begin{bmatrix} \varepsilon_{01}(k) \\ \varepsilon_{02}(k) \end{bmatrix} [y_{M1}(k-1)]}{1 + 10 \{y_{M1}^2(k-1)\}} * \\ & \quad * \frac{y_{M2}(k-1) \begin{bmatrix} u_1(k-1) & u_2(k-1) \end{bmatrix}}{y_{M2}^2(k-1) + u_1^2(k-1) + u_2^2(k-1)} \end{aligned} \quad (74)$$

と得られる。ただし、

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{01}(k) \\ \varepsilon_{02}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{M01}(k) \\ y_{M02}(k) \end{bmatrix} \quad (75)$$

である。図 5 は上記のアルゴリズムに従ってパラメータ同定を行ったときの特性である。同定を開始して 135 サンプル経過した時点の推定パラメータの値はそれぞれ、 $a_{M11}(135)=0.867$, $a_{M12}(135)=0.381$, $a_{M21}(135)=-0.986$, $a_{M22}(135)=0.553$, $b_{M11}(135)=0.920$, $b_{M12}(135)=0.211$, $b_{M21}(135)=-0.403$, $b_{M22}(135)=0.589$ であり、推定パラメータとプロセスのパラメータの値の差は大きく、十分な同定がなされていない。このシミュレーションで図 4 の 25 サンプル目と同程度まで推定パラメータを収束させるには約 850 サンプル必要となる。これらの特性から明らかに、提案する複素数領域のパラメータ同定法を用いることで高速なパラメータ同定が実現できる。な

お、実際のシステムへの適用例として、三相 PWM コンバータのパラメータを同定した実験特性についても別に報告している⁽⁶⁾。

7. む す び

本論文は、従来実数領域に対して理論展開されてきた MRAS のパラメータ同定理論を離散時間系の複素数領域へ拡張したもので、その成果は以下のように要約できる。

(1) 複素数領域に拡張した MRAS の比例+積分同定アルゴリズムを提案した。

(2) 複素数領域に拡張した超安定論を導出し、提案したパラメータ同定アルゴリズムが漸近超安定であることを証明した。

(3) 複素方程式を実方程式へ変換する一方法を示した。この場合、実数領域で表現すると物理的に等しいパラメータが二つずつ存在するので、複素方程式を用いることにより同定するパラメータの要素数が 1/2 になる。

(4) 複素表現可能なシステムに対して、複素数領域および実数領域それぞれの MRAS に基づいたパラメータ同定のシミュレーションを行い、その結果、複素数領域の MRAS を用いることでパラメータの収束速度が、実数領域の 1/10 以下に改善されることを示した。

なお、本研究について御討論いただいた千葉大学工学部 美多 勉教授ならびに職業訓練大学校 西山 清先生に深く謝意を表す。(平成元年 8 月 23 日受付)

文 献

- (1) 宮入：エネルギー変換工学入門(下) (昭40) 丸善
- (2) I.D.ランダウ・富塚：適応制御システムの理論と実際 (昭56) オーム社
- (3) V. M. Popov: Hyperstability of Control Systems (1973) Springer Verlag
- (4) B. D. O. Anderson: "A System Theory Criterion for Positive Real Matrices", *J. SIAM Control*, 5 171 (1967)
- (5) 例えば, 児玉・須田：システム制御のためのマトリクス理論 (昭53) 計測自動制御学会
- (6) 竹下・内川・松井：「モデル規範適応同定器を用いた三相PWM コンバータの電流制御」, 電学論 D, 110, 384 (平2-4)

付 録

1. 定理の証明

(53)式より次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^*(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) \\ &= -\{\mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k)\}^* \mathbf{P}(k+1) \\ & \quad \times \{\mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k)\} + \mathbf{x}^*(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k) \end{aligned}$$

上式の $\mathbf{A}(k) \mathbf{x}(k)$ に (51) 式の関係を代入して,

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^*(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) \\ &= -\mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{x}(k+1) + \mathbf{x}^*(k) \mathbf{P}(k) \\ & \quad \times \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{B}^*(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{x}(k+1) \\ & \quad + \mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k+1) \\ & \quad - \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{B}^*(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) \mathbf{u}(k+1) \end{aligned}$$

が得られる。更に上式の右辺第3, 4項の $\mathbf{x}(k+1)$ へ (51) 式を代入し, 両辺に $\mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{S}^*(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k) \mathbf{S}(k) \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k+1)$ を加えて整理すると次式となる。

$$\begin{aligned} & \mathbf{x}^*(k) \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{S}^*(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^*(k) \\ & \quad \times \mathbf{S}(k) \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k+1) \\ &= -\mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{x}(k+1) \\ & \quad + \mathbf{x}^*(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^*(k+1) \\ & \quad \times \{\mathbf{B}^*(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k) + \mathbf{S}^*(k)\} \mathbf{x}(k) \\ & \quad + [\mathbf{u}^*(k+1) \{\mathbf{B}^*(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{A}(k) \\ & \quad + \mathbf{S}^*(k)\} \mathbf{x}(k)]^* + \mathbf{u}^*(k+1) \\ & \quad \times \{\mathbf{B}^*(k) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{B}(k) + \mathbf{R}(k)\} \mathbf{u}(k+1) \end{aligned}$$

(52), (54), (55)式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}^*(k+1) \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{v}(k+1) \\ &= \mathbf{x}^*(k+1) \mathbf{P}(k+1) \mathbf{x}(k+1) \\ & \quad - \mathbf{x}^*(k) \mathbf{P}(k) \mathbf{x}(k) + [\mathbf{x}^*(k) \mathbf{u}^*(k+1)] \\ & \quad \times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}(k) & \mathbf{S}(k) \\ \mathbf{S}^*(k) & \mathbf{R}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。上式を k について $0 \sim k_1$ まで辺々加え, 両辺のトレースをとり, (56) 式の関係を考慮すると,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{k_1} \text{tr} \{ \mathbf{v}^*(k+1) \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{u}^*(k+1) \mathbf{v}(k+1) \} \\ & \geq -\text{tr} \{ \mathbf{x}^*(0) \mathbf{P}(0) \mathbf{x}(0) \} \cdots \cdots \cdots (57) \end{aligned}$$

(57)式が得られ, 定理が成り立つ。

竹 下 隆 晴 (正員)

昭和34年8月23日生。59年3月名古屋工業大学大学院修士課程修了。同年4月岐阜工業高等専門学校電気工学科助手, 平成2年4月同講師, 現在に至る。工学博士。主として, 交流電動機および整流回路のプロセッサ制御の研究に従事。計測自動制御学会会員。

松 井 信 行 (正員)

昭和18年5月7日生。43年3月名古屋工業大学大学院修士課程修了。同年4月同大学助手, 同講師, 同助教授を経て, 60年4月同電気情報工学科教授, 現在に至る。工学博士。制御理論による電動機制御系の解析と設計, 電動機の計算機制御の研究に従事。計測自動制御学会, IEEE 会員。