磁気ベクトルポテンシャルのゲージ条件の検討と 三次元静磁界解析のための新しい有限要素定式化

正員 金 井 靖 (新 潟 大)
 非会員 阿 部 武 雄 (新 潟 大)
 非会員 仙 石 正 和 (新 潟 大)
 正員 飯 島 泰 蔵 (東京工科大)
 非会員 飯 塚 雅 博 (アルプス電気)
 非会員 武 笠 幸 一 (北海道大)

Gauge Condition of Magnetic Vector Potential and a New Finite-Element Formulation for Three-Dimensional Magnetostatic Field Analysis

Yasushi Kanai, Member, Takeo Abe, Non-member, Masakazu Sengoku, Non-member (Niigata University), Taizo Iijima, Member (Tokyo Engineering University), Masahiro Iizuka, Non-member (Alps Electric Co., Ltd.), Koichi Mukasa, Non-member (Hokkaido University)

This paper describes the role and meaning of the gauge condition of magnetic vector potential, and also a new formulation of the finite-element analysis. The relation between the Coulomb gauge and the condition for outer boundary, symmetrical boundary and the boundary of different materials are clarified. It is found that the gauge condition is essential for solving the three-dimensional magnetostatic field problems. The vector-Poisson's equation including the gauge is discretized using the Galerkin method which in turn yields a new formulation. In this paper, The three components of $A(A_x, A_y, A_z)$ are formulated separately. By the separation of the components, memory size and calculating time can be reduced greatly. To confirm the theory and the formulation, the IEE model is examined. In the examination, it is found that the measured and calculated results are in close agreement and it is also confirmed that the divergence of A at every node which is on the boundary of different materials equals zero in the volume. These show that the theory and the formulation in this paper are valid.

キーワード：三次元静磁界解析，有限要素法，磁気ベクトルポテンシャル，ゲージ条件

1. ま え が き

電子計算機の発展と共に，有限要素法による磁界解析の研究がさかに行われており，二次元問題および軸対称三次元問題に対しては既に磁気ベクトルポテンシャルを用いた手法が確立されている⁽¹⁾。しかし，三次元問題に対しては磁気ベクトルポテンシャル法($A-\phi$ 法)^{(2)~(4)}スカラーポテンシャル法⁽⁵⁾⁽⁶⁾，スカラー・ベクトルポテンシャル併用法($T-\Omega$ 法)⁽⁷⁾あるいは直接法(B

法)⁽⁸⁾などの手法が提案されているにもかかわらず，確たる手法がないのが現状とされている。

ここで，磁気ベクトルポテンシャル法について考えれば，この手法は変数の物理的意味が明確であり汎用性に優れ，既に非線形問題，渦電流問題への適用が試みられている。しかし，静磁界解析においても解の唯一性に関してクーロンのゲージ条件の意味と必要性が明らかではないとされている。すなわち，従来の定式化は変分法を用いて行われており^{(2)~(4)}，ゲージ条件

を考慮するには Lagrange 定数法あるいはペナルティ法を用いるため、数値計算上極めて性質が悪く、扱いにくくなることが報告されている⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。そのため、ゲージ条件は必要ないとする立場がとられたり、ゲージ条件を無視した解析が行われてきた。しかし、ゲージ条件を無視した解析を行うと、計算結果において解の一意性は満たされない⁽¹¹⁾し、実際には起こり得ない磁束密度分布の乱れが生ずることも報告されている⁽¹¹⁾。また、解析領域内全体で1個の節点に対し3個の未知数が存在するため計算機メモリーおよび計算時間の面でスカラー変数を用いた場合よりも不利であるとみなされている。

本論文では、磁気ベクトルポテンシャルを用いた三次元静磁界解析における Coulomb のゲージと、外周境界面、対称境界面における境界条件および異なる磁性体間の境界条件との関係を論じ、境界条件を完備するためにはゲージ条件が必要であることを示し、ゲージ条件の必要性和意味を理論的に明確にする⁽¹²⁾⁽¹⁴⁾。次に、Galerkin 法を用いてゲージ条件を含んだ支配方程式を離散化し、外周および対称の境界面において離散化式中の境界積分項とゲージ条件との関係を検討する。その結果、境界面においてゲージ条件を課すことにより境界積分項の消去が可能であることを示し、磁気ベクトルポテンシャルの三成分を独立に解析できる新しい有限要素式を導く。理論と定式化の妥当性を確認するため、得られた有限要素式を用いて電気学会「三次元磁界計算技術調査専門委員会」にて制定された標準比較モデル⁽¹¹⁾の解析を行い、実測値との比較を行う。その結果、数値計算値と実測値がよく一致することと、領域内の異なる磁性体の境界節点において $\text{div } \mathbf{A}$ の値が零であることから、本論文における理論と定式化の妥当性を確認する。また、本定式化を用いれば磁気ベクトルポテンシャルの三成分を独立に解析できるため、計算機のメモリーと計算時間を約 1/9 とすることが可能である。

2. ベクトル形式の Poisson 方程式の導出

静磁界における基本方程式は次式で与えられる。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\mathbf{H}$ ：磁界強度、 $\mathbf{J}_0$ ：強制電流密度、

$\mathbf{B}$ ：磁束密度、 μ_0 ：真空の透磁率、 $\mathbf{M}$ ：磁化

(2)式より、次式に示す磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を定義できる。

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(1)、(3)、(4)式より、

$$\text{rot } \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

なる式を得るが、この形式では数学的に境界条件が不明確であり、解の一意性も保証されていない。

(4)式の $\mathbf{A}$ には $\text{grad } \phi$ なる不定性が許されるが、次式に示す Coulomb のゲージを課して $\mathbf{A}$ が唯一であることを保証することができる。

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(6)式を(5)式に代入し、

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{M} + \mathbf{J}_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

なるベクトル形式の Poisson の方程式を得る。(7)式は境界値問題として解く際に境界条件が明確であり、また、Coulomb のゲージ条件式(6)を含んでおり解 $\mathbf{A}$ の一意性が保証されている。

3. 境界条件とゲージ条件との関係

〈3・1〉 外周および対称の境界面における境界条件とゲージ条件との関係 本節では変分法によるアプローチを用いて、外周あるいは対称境界面における境界条件とゲージ条件との関係を明確にする。

磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の一意性を保証した方程式

$$\text{rot } \frac{1}{\mu_0} (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{M}) - \text{grad} \left(\frac{1}{\mu_0} \text{div } \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

に対して、境界面上で

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{かつ} \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

または

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A} = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

なる境界条件を与えれば、

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{1}{\mu_0} \|\text{rot } \mathbf{A}\|^2 dV + \iiint_V \frac{1}{\mu_0} (\text{div } \mathbf{A})^2 dV \\ &= \iiint_V \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{J}_0 + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{M} \right) dV \quad \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

を得る。ただし、 $\mathbf{n}$ は境界面における単位法線ベクトルである。

逆にエネルギー汎関数を

$$\begin{aligned} J[\mathbf{A}] = & \iiint_V \frac{1}{\mu_0} \|\text{rot } \mathbf{A}\|^2 dV \\ & + \iiint_V \frac{1}{\mu_0} (\text{div } \mathbf{A})^2 dV \\ & - 2 \iiint_V \mathbf{A} \cdot \left(\mathbf{J}_0 + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{M} \right) dV \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

とおき、境界条件(9)式または(10)式のもとに

$$\delta J[A] = 0 \dots\dots\dots (13)$$

とすれば、(8)式を得る。

以上の議論から、(9)式第2式は Coulomb のゲージ条件そのものであり、ゲージ条件を課さない場合には一方の境界条件が満たされることがわかる。

〈3・2〉 解析領域内の異なる磁性体間の境界条件とゲージ条件との関係 図1に示すように、解析領域内に異なる磁性体間の境界が存在する場合には境界条件を吟味する必要がある。(1),(2)式より異なる磁性体間の境界条件は次式のようになる。

$$H \times n : \text{continuous} \dots\dots\dots (14)$$

$$B \cdot n : \text{continuous} \dots\dots\dots (15)$$

いま、直角座標 (x, y, z) を考え、境界面を $y-z$ 平面にとれば、(14),(15)式は次式のように書ける。

$$H \times n = jH_z - kH_y : \text{continuous} \dots\dots\dots (16)$$

$$B \cdot n = B_x : \text{continuous} \dots\dots\dots (17)$$

ただし、 j, k : それぞれ y, z 方向の単位ベクトル

(16),(17)式は磁界 H 、磁束密度 B に対する境界条件式であるが、(3),(4)式を用いて以下のように磁気ベクトルポテンシャル A に対する境界条件式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial A_x^{(I)}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial x} \right) - M_y^{(I)} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial A_x^{(II)}}{\partial z} - \frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial x} \right) - M_y^{(II)} \right\} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(I)}}{\partial y} \right) - M_z^{(I)} \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \left(\frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial x} - \frac{\partial A_x^{(II)}}{\partial y} \right) - M_z^{(II)} \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial y} - \frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial z} = \frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial y} - \frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial z} \dots\dots\dots (20)$$

ただし、右肩の添字(I),(II)はそれぞれ磁性体(I)側および(II)側を表す。

図1 異なる磁性体とその境界
Fig. 1. Different materials and their boundary.

境界面における磁気ベクトルポテンシャルの連続性を仮定し、Coulomb のゲージ条件を用いれば(18)~(20)式より

$$\frac{\partial A_x^{(I)}}{\partial x} = \frac{\partial A_x^{(II)}}{\partial x}, \quad A_x^{(I)} = A_x^{(II)} \dots\dots\dots (21)$$

$$\frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial x} - M_z^{(I)} = \frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial x} - M_z^{(II)}, \quad A_y^{(I)} = A_y^{(II)} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial x} - M_y^{(I)} = -\frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial x} - M_y^{(II)}, \\ & A_z^{(I)} = A_z^{(II)} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

を得る。(21)~(23)式は(18)~(20)式の十分条件であるので、ベクトル形式の Poisson 方程式(7)に対する境界条件としては十分である。

一方、境界面上における磁気ベクトルポテンシャルの連続性は仮定するが、Coulomb のゲージ条件式を用いない場合には、(18)~(20)式より次式を得る。

$$A_x^{(I)} = A_x^{(II)} \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial x} - M_z^{(I)} = \frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial x} - M_z^{(II)}, \\ & A_y^{(I)} = A_y^{(II)} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial x} - M_y^{(I)} = -\frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial x} - M_y^{(II)}, \\ & A_z^{(I)} = A_z^{(II)} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

(24)~(26)式が成立すれば(18)~(20)式は十分に成立するが、 $\partial A_x / \partial x$ に対する条件が不足している。ところで、磁気ベクトルポテンシャルを用いたベクトル形式の Poisson 方程式(7)を解くためには、境界上における A の値とその微分値に対する境界条件とが必要である。従って、(24)~(26)式に示した境界条件では不十分であり、(7)式は一意には解けないことがわかる。

本節では境界面を $y-z$ 平面に仮定したが、 $z-x$ 平面、 $x-y$ 平面が境界面のときにも同様の議論が成立する。

これまでに変分法による磁気ベクトルポテンシャルを用いた三次元静磁界解析のための定式化が示されている^{(2)~(4)}が、この手法でゲージ条件を取扱うには Lagrange 定数法あるいはペナルティー法を用いる必要がある。そのためゲージ条件を考慮すると数値計算上極めて性質が悪くなり、扱いにくくなることが報告されている^{(9)~(10)}。また、磁気ベクトルポテンシャル A の不定性分 $\text{grad } \phi$ は回転をとれば零になるから、磁束密度 B を求める際には問題にならないとする立場もあり、ゲージ条件を無視した解析が行われてきた。Mohammed ら⁽¹⁵⁾、池田⁽¹⁶⁾は Dirichlet 条件により $\text{grad } \phi$ なる磁気ベクトルポテンシャルの不定性を抑

えることができるため、ゲージ条件を課す必要がないことを示した。そのなかで節点で $\text{grad } \phi$ の値を抑えることが可能であるため要素間の境界での $\text{grad } \phi$ の値が連続である、として理論を展開している。同一の磁性体ならば要素間における $\text{grad } \phi$ の連続性は保証される。しかし、本節の議論からわかるように異なる磁性体間の境界ではゲージ条件を課しないと境界条件が完備されないため、計算結果において解の一意性は保証されない⁽¹¹⁾。また、ゲージ条件を無視した解析を行うと実際には起こり得ない磁束密度分布の乱れが生ずることも報告されている⁽¹¹⁾。

4. Galerkin 法による支配方程式の離散化と境界積分項の検討

〈4・1〉 Galerkin 法による離散化 Galerkin 法はエネルギー変分法の一つであり、場のエネルギーが最低となるポテンシャル分布を求める手法である。従って、場の支配方程式がベクトルで表される場合には重み関数(形状関数)もベクトル関数を選択し、その内積をとり評価する必要がある⁽¹⁷⁾。

これを考慮して Galerkin 法により支配方程式(7)の離散化を行えば次式のようになる⁽¹²⁾。

$$\begin{aligned} G = & \iiint_V N \cdot \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{M} + \mathbf{J}_0 \right) dx dy dz \\ = & \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_x (\text{grad } A_x) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_x (\mathbf{j} M_z - \mathbf{k} M_y) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_y (\text{grad } A_y) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_y (\mathbf{k} M_x - \mathbf{i} M_z) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_z (\text{grad } A_z) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_z (\mathbf{i} M_y - \mathbf{j} M_x) \cdot \mathbf{n} dS \\ & - \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_x}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & - \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_y}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_y}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_z}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_z}{\partial z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & - \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_x \frac{\partial N_x}{\partial y} - M_y \frac{\partial N_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_x J_{0x} dx dy dz \\ & - \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_x \frac{\partial N_y}{\partial z} - M_z \frac{\partial N_y}{\partial x} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_y J_{0y} dx dy dz \\ & - \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_y \frac{\partial N_z}{\partial x} - M_x \frac{\partial N_z}{\partial y} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_z J_{0z} dx dy dz \\ = & 0 \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$: 重み関数(形状関数)、 $\mathbf{n}$: 境界面における単位法線ベクトル、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: x, y, z 方向の単位ベクトル

〈4・2〉 領域内部の異なる磁性体間の境界面における境界積分項の検討 (27)式における境界積分項を取出せば次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_x (\text{grad } A_x) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_x (\mathbf{j} M_z - \mathbf{k} M_y) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_y (\text{grad } A_y) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_y (\mathbf{k} M_x - \mathbf{i} M_z) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_z (\text{grad } A_z) \cdot \mathbf{n} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_z (\mathbf{i} M_y - \mathbf{j} M_x) \cdot \mathbf{n} dS \dots \dots \dots (28) \end{aligned}$$

ゲージ条件と境界積分項の関係を検討するために、簡単のため境界面を $y-z$ 平面に選べば(28)式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_x \frac{\partial A_x}{\partial x} dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_y \frac{\partial A_y}{\partial x} dS - \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_y M_z dS \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_z \frac{\partial A_z}{\partial x} dS - \frac{1}{\mu_0} \iint_S N_z M_y dS \\ & \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

のようになる。境界積分式(29)の被積分項中にある $\partial A_x/\partial x$, $(\partial A_y/\partial x - M_z)$, $(\partial A_z/\partial x + M_y)$ は、それぞれ(21)～(23)式によって異なる磁性体が接する境界面の両側で連続である。従って、重み関数(形状関数) N を連続に選ぶことによりこの積分(29)式全体を消去することができる。

〈4・3〉 外周および対称の境界面における境界積分項の検討 (3・1)節に示した議論からわかるように、外周境界面あるいは対称境界面では、

(i) 磁界が境界面に平行であるとき、

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \text{div } \mathbf{A} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (30)$$

(ii) 磁界が境界面に垂直に入射するとき、

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{かつ} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (31)$$

なる磁気ベクトルポテンシャルの境界条件を与えて(29)式に示す境界積分項を消去することができる。

(i) 磁界が境界面に平行であるとき

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{より} \quad A_y = A_z = 0 \quad \text{つまり}$$

$$N_y = N_z = 0$$

これから(29)式第2～5項は消去できる。また、 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を境界上で課しているから $\partial A_x/\partial x = 0$ は満足される⁽¹⁴⁾。

(ii) 磁界が境界面に垂直に入射するとき

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{より} \quad A_x = 0 \quad \text{つまり} \quad N_x = 0$$

これから(23)式第1項は消去可能である。また磁界が垂直に入射することから $M_y = M_z = 0$ であり、更に $\partial A_y/\partial x = \partial A_z/\partial x = 0$ から(29)式第2～5項も消去可能である。

以上より、いずれの境界条件の場合にも(29)式に示す境界積分項は消去可能である。

一方、 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を課さない場合には(29)式第1項を消去できないから表面積分項の考慮が必要である。

以上、本節では境界面を y - z 平面と仮定して議論を進めてきたが、境界面が任意の平面のときにも全く同様な議論が成り立つ。

5. 有限要素式

第4章で述べた議論より、(27)式における境界積分項を消去すれば次式に示す有限要素式を得る。

$$\begin{aligned} G = & \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_x}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_y}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \frac{\partial N_y}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_z}{\partial x} \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial y} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_z}{\partial z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_x \frac{\partial N_x}{\partial y} - M_y \frac{\partial N_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_x J_{ox} dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_x \frac{\partial N_y}{\partial z} - M_z \frac{\partial N_y}{\partial x} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_y J_{oy} dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_y \frac{\partial N_z}{\partial x} - M_x \frac{\partial N_z}{\partial y} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_z J_{oz} dx dy dz \\ = & 0 \cdots \cdots \cdots (32) \end{aligned}$$

ところで、(32)式は境界条件を満たす任意の形状関数 $N = (N_x, N_y, N_z)$ に対して成立する必要があるが、 N_x, N_y, N_z および A_x, A_y, A_z の間のクロスタームがないことから、次式のように各成分を分離して表すことができる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_x}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_x \frac{\partial N_x}{\partial y} - M_y \frac{\partial N_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_x J_{ox} dx dy dz \\ = & 0 \cdots \cdots \cdots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_y}{\partial x} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial A_y}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\partial N_y}{\partial z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dx dy dz \\ & + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_x \frac{\partial N_y}{\partial z} - M_z \frac{\partial N_y}{\partial x} \right) dx dy dz \\ & + \iiint_V N_y J_{oy} dx dy dz \\ = & 0 \cdots \cdots \cdots (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N_z}{\partial y} \frac{\partial A_x}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial N_z}{\partial z} \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) dx dy dz \\
& + \frac{1}{\mu_0} \iiint_V \left(M_y \frac{\partial N_z}{\partial x} - M_x \frac{\partial N_z}{\partial y} \right) dx dy dz \\
& + \iiint_V N_z J_{oz} dx dy dz \\
& = 0 \dots\dots\dots (35)
\end{aligned}$$

(33)～(35)式を用いれば磁気ベクトルポテンシャルの三成分を独立に取扱うことができるため、従来から本手法の欠点とされていた計算機メモリー、計算時間の点で変分法による定式化と比べそれぞれ約 1/9 と非常に有利である。

6. 数値計算例

前章までに述べた理論および定式化の妥当性を確認するため、電気学会「三次元電磁界計算技術調査専門委員会」にて制定された標準比較モデル⁽¹¹⁾を解析し、実測値と比較する。この際、対称性を利用して 1/8 領域を考慮し、 x - y 対称境界面には磁界が垂直に入射するから自然境界条件を、 y - z および z - x 対称境界面には磁界が平行になるから固定境界条件を与える。また、外周境界面には透磁率の高いシールドが存在するから磁界が垂直に入射すると仮定し自然境界条件を与える。

図 2 に本定式化を用いて解析した標準比較モデル⁽¹⁸⁾の磁束密度分布を示すが、矢印の始点は要素の

外周境界条件として自由境界条件を与えた場合

図 2 電気学会モデルの磁束密度分布
Fig. 2. Distribution of magnetic flux density of IEEE Japan model.

中央であり、向き、長さがそれぞれ磁束密度の向きと絶対値を表している。また、図 3 に実測値⁽¹⁸⁾と有限要素式(32)～(34)を用いて求めた解析値との比較を示すが、両者はよく一致していることがわかる。

ただし、本例題では軟磁性材料を含むため、

$$M = (1 - 1/\mu_r)B \dots\dots\dots (36)$$

により、磁性体内部の磁化を修正しながら解を求めた。ここで、比透磁率 $\mu_r = 1,000$ である。

ところで、第 3 章で述べたように、磁気ベクトルポテンシャルを用いた三次元静磁界解析では、異なる磁性体間の境界条件が満たされているかどうか問題となる。これを調べるために、磁性体と真空の境界節点 $(x, y, z) = (50, 50, 100)$ mm における $\text{div } A$ の値を求め検討する。ここでは 8 節点一次要素を用いて有限要素計算を行っているため、領域内の節点は 8 個の要素により共有される。そのため、境界節点の周囲の 8 個の要素中の Gauss 積分点での $\text{div } A$ の値を求め、その値から節点における値を計算する必要がある。これ

(a) $x = 56.25$ mm, $z = 81.25$ mm

(b) $x = y = 6.25$ mm

図 3 実測値と数値計算値の比較
Fig. 3. Comparison of measured and calculated values.

表1 異なる磁性体間の境界節点を共有する要素中のガウス積分点における $\text{div } \mathbf{A}$ の値 (外周境界面で自由境界条件を与えた場合)

Table 1. The value of $\text{div } \mathbf{A}$ at Gaussian quadratural points in the elements which belong to the boundary node of different materials.

節点を共有する要素番号	$\text{div } \mathbf{A}$ の値
(1)	0.0
(2)	$+0.1437 \times 10^{-4}$
(3)	-0.1437×10^{-4}
(4)	0.0
(5)	0.0
(6)	-0.9331×10^{-4}
(7)	$+0.9331 \times 10^{-4}$
(8)	0.0

を表1に示すが、同表より $\text{div } \mathbf{A}$ の値を

$$\text{div } \mathbf{A} = \sum_{i=1}^8 (\text{div } \mathbf{A})_i / 8 \quad \dots\dots\dots (37)$$

により平均し、異なる磁性体間の境界上の節点における値として求めれば、その値は零である。従って、異なる磁性体間の境界条件は満足されていることがわかる。また、各ガウス積分点におけるそれぞれの $\text{div } \mathbf{A}$ の値も表1に示す磁束密度 ($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$) の 10^{-3} 程度であり十分小さいと言える。

以上述べたように、数値計算値と実測値がよく一致することと、異なる磁性体間の境界節点における $\text{div } \mathbf{A}$ の値が零であることから本論文で述べた理論と定式化の妥当性は極めて高いと言える。

7. 終 り に

磁気ベクトルポテンシャルを用いた三次元静磁界解析における磁気ベクトルポテンシャルのゲージ条件と境界条件との関係を明確にし、新しい有限要素定式化を示した。また、提案した有限要素法を用いて電気学会モデルの解析を行い、数値計算結果は実測値とよく一致していることと、異なる磁性体間の境界節点において $\text{div } \mathbf{A}$ の値が零であることから提案した定式化の妥当性を確認した。また、本定式化によれば従来の変分法による定式化と比べ、計算機のメモリーおよび計算時間を約 1/9 とすることが可能であり、数値計算上有利である。本論文は磁気ベクトルポテンシャル法におけるゲージ条件の取扱いと意味を明確にし、数値計算上不利であるという欠点を解決したものである。

本研究を進めるにあたり、御助言をいただいている新潟大学工学部小林良和教授、および、御指導、御助言をいただいているアルプス電気(株)新潟事業部 稻

田明弘課長に深謝する。

(平成元年1月24日受付, 同元年8月14日再受付)

文 献

- (1) 中田・高橋: 電気工学の有限要素法 (昭57) 森北出版
- (2) M. V. K. Chari, P. Silvester, A. Konrad, Z. J. Csendes & M. A. Palmo, "Three-Dimensional Magnetostatic Field Analysis of Electric Machinery by the Finite-Element Method", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, **PAS-100**, 4007(1981)
- (3) N.A. Demerdash, T.W. Nehl, F.A. Fouad & O.A. Mohammed: "Three Dimensional Finite Element Vector Potential Formulation of Magnetic Fields in Electrical Apparatus", *ibid.*, **PAS-100**, 4104 (1981)
- (4) J. L. Coulomb: "Finite-Element Three Dimensional Magnetic Field Computation", *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-17**, 3241(1981)
- (5) J. Simkin & C. W. Trowbridge: "Three-dimensional Non-Linear Electromagnetic Field Computations, using Scalar Potentials", *IEE Proc.*, **127**, pt. B, 368(1980)
- (6) I. D. Mayergoyz, M. V. K. Chari & J. D'Angelo: "A New Scalar Potential Formulation for Three Dimensional Magnetostatic Problems", *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-23**, 3889 (1987)
- (7) C. J. Carpenter: "Comparison of Alternative Formulation of 3-Dimensional Magnetic-Field and Eddy-Current Problems at Power Frequencies", *Proc. IEEE*, **124**, 1026(1977)
- (8) 中前・山下: 「直接法による磁界解析」, 昭62 電気・情報関連学会連合大会, p. 145
- (9) 横井・荒谷・小貫: 「三次元有限・境界要素併用法による開領域静磁界検討用モデルの磁界解析」, 日本シミュレーション学会第8回電気電子への有限要素法への応用シンポジウム論文集, p. 99(昭62)
- (10) 長谷部・鹿野: 「三次元磁界解析における境界条件とゲージの関係一検証モデルによる一」, 電気学会静止器・回転機合同研資, SA-87-1; RM-87-12, p. 1 (昭62)
- (11) 枕島・野瀬・川原・大戸: 「三次元静磁界検証モデル実測結果」, 同上 SA-87-2; RM-87-13, p. 11(昭62)
- (12) 金井・阿部・飯島・飯塚・武笠: 「三次元磁界解析におけるゲージ条件について」, 日本シミュレーション学会第9回計算電気・電子工学シンポジウム論文集, p. 7(昭63)
- (13) Y. Kanai, T. Abe, M. Sengoku, T. Iijima, M. Iizuka & K. Mukasa: "New Formulation of Finite-Element Method with Gauge Condition for Three-Dimensional Magnetic Field Analysis", *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-24**, 3123 (1988)
- (14) 金井・阿部・仙石・飯島・飯塚・武笠: 「磁気ベクトルポテンシャルを用いた有限要素法による三次元静磁界解析」, 電気学会静止器・回転機合同研資, SA-88-13; RM-88-35, p. 1 (昭63)
- (15) O. A. Mohammed, W. A. Davis, B. D. Popovic, T. W. Nehl & N. A. Demerdash, "On the Uniqueness of Solution of Magnetostatic Vector-Potential Problems by Three-Dimensional Finite-Element Methods", *J. Appl. Phys.*, **53**, 8402(1982)
- (16) 池田: 「有限要素法による三次元磁界解析におけるゲージの問題」, 電気学会静止器・回転機合同研資, SA-87-20; RM-87-57, p. 21(昭62)
- (17) O. C. Zienkiewicz & K. Morgan (伊理, 伊理共訳): 「有限要素と近似」, p. 75(昭59)ウイリージャパン Inc.
- (18) 坪谷・高倉: 「磁気ベクトルポテンシャルを用いた三次元静磁界解析」, 電気学会静止器・回転機合同研資, SA-87-3; RM-87-14, p. 21(昭62)

金 井 靖 (正員)

昭和34年11月5日生。59年3月新潟大学大学院修士課程修了。同年4月アルプス電気(株)入社。61年4月新潟大学大学院博士課程入学。平成元年3月同修了。工学博士。アルプス電気(株)在職中。主として有限要素法による磁界解析の研究、磁気ヘッドの磁気回路解析・設計に従事。電子情報通信学会、IEEE 会員。

阿 部 武 雄 (非会員)

大正14年3月8日生。昭和24年東京工業大学工学部電気工学科卒業。通産省電気試験所、千葉工大、東工大工業教員養成所を経て、41年新潟大学工学部電子工学科教授。昭53年同大学情報工学科教授となり、現在に至る。この間、高周波標準、レーザ光の降雪中の伝搬、および移動通信、ネットワークなどの研究に従事。工学博士。電子情報通信学会、IEEE、計測自動制御学会、日本雪氷学会、日本雪工学会会員。

仙 石 正 和 (非会員)

昭和19年10月18日生。42年新潟大学工学部電気工学科卒業。47年北海道大学大学院博士課程修了。工学博士。同年同大学工学部電子工学科助手。53年新潟大学工学部情報工学科助教授を経て、現在教授。この間、回路網理論、グラフ・ネットワーク、情報伝送、特に移動通信の研究に従事。電子情報通信学会、IEEE、情報処理学会会員。

飯 島 泰 蔵 (正員)

大正14年9月24日生。昭和23年3月東京工業大学卒業。同年4月通信省電気試験所に入所。同所飯島特別研究室長を経て、47年東京工業大学教授に就任。61年3月同学を停年退官。同年4月同学名誉教授となり、東京工科大学教授に就任。現在に至る。この間電磁界理論、パターン認識理論、画像処理、文字認識、音声認識などの研究、およびOCRの技術開発に従事。工学博士。電子情報通信学会副会長を始めとする各種学会役員を歴任。本学会論文賞、進歩賞のほか、電子情報通信学会功績賞、業績賞、論文賞、著述賞などを受賞。平成元年度紫綬褒章受章。

飯 塚 雅 博 (非会員)

昭和34年8月24日生。57年3月武蔵工業大学工学部卒業。同年4月アルプス電気(株)入社。主として磁気ヘッドの磁気回路解析・評価の研究に従事。応用物理学会、応用磁気学会会員。

武 笠 幸 一 (非会員)

昭和15年7月19日生。42年3月北海道大学大学院修了。北海道大学工学部助手、アルプス電気(株)を経て、62年4月北海道大学工学部教授。主として磁性材料の研究・開発、LB膜の研究に従事。工学博士。電子情報通信学会、応用物理学会、応用磁気学会、金属学会会員。