三相巻線の変数からの瞬時トルクの式の導出

正 員 猪 狩 武 尚 (中央大)

Derivation of Equation of Instantaneous Torque from Variables of Three-Phase Windings

Takehisa Igari, Member (Chuo University)

キーワード：トルク，誘導機，同期機， $\alpha\beta 0$ 成分法，二軸理論

1. ま え が き

三相交流機の過渡現象などの解析に用いられる $\alpha\beta 0$ 成分法，二軸理論などにおいて，瞬時トルクの式は一般にそれぞれの理論における変換後の新変数を用いて，新変数における電圧方程式を用いて導出されてきた。しかし，三相巻線に関する変数を用いて直接に，電圧方程式を用いずに瞬時トルクの式を導出するほうが，理論が直接的で明白なものとなる。また，そのようにすれば，零相電流が瞬時トルクの発生に寄与しないことを，物理的考察からだけでなく，数学的にも明示することができる。

2. $\alpha\beta 0$ 成分法における瞬時トルクの式の導出

$\alpha\beta 0$ 成分法における次の変数変換式は導出済みであるものとする。

$$\left. \begin{aligned} i_{as} &= \frac{2}{3} \left(i_{as} - \frac{1}{2} i_{bs} - \frac{1}{2} i_{cs} \right) \\ i_{bs} &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_{bs} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{cs} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{mas} &= \frac{2}{3} \left(\lambda_{mas} - \frac{1}{2} \lambda_{mbs} - \frac{1}{2} \lambda_{mcs} \right) \\ \lambda_{mbs} &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_{mbs} - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_{mcs} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに，添字 s は固定子に関する量を表すものとし， λ_m は主磁束による磁束鎖交数を表す。

図1は固定子・回転子ともに三相巻線をもった誘導機を表す。すべての巻線の電流による合成起磁力によってギャップに生じた磁束を ϕ_m とし， ϕ_m の空間分布は正弦波状であるものとする。 ϕ_m の分布の中心軸が固定子 as 相の磁気軸よりも回転方向に進む角を γ とする。 ϕ_m を回転子に固定された基準座標系によって表した磁束と考える。そうすると， ϕ_m は回転子の回転と同じ速度で回転しながらその大きさが時間と共に変化する磁束となる（特別の場合として大きさが時

図 1 三相誘導機

Fig. 1. Three-phase induction machine.

間的に不変の場合を含む）。そして ϕ_m と固定子巻線との相対速度により固定子巻線中には速度起電力が発生する。

いま，回転子の回転角速度を ω_m とし， γ の初期値を γ_0 と置くと，

$$\gamma = \omega_m t + \gamma_0 \dots\dots\dots (3)$$

である。固定子一相の有効巻数を w_e とし， $p = d/dt$ とすると，固定子各相の誘導起電力は

$$\left. \begin{aligned} e_{as} &= -p\lambda_{mas} = -p(w_e \phi_m \cos \gamma) \\ &= -(w_e \cos \gamma) p\phi_m + \omega_m w_e \phi_m \sin \gamma \\ e_{bs} &= -p\lambda_{mbs} = -\{w_e \cos(\gamma - 2\pi/3)\} p\phi_m \\ &\quad + \omega_m w_e \phi_m \sin(\gamma - 2\pi/3) \\ e_{cs} &= -p\lambda_{mcs} = -\{w_e \cos(\gamma - 4\pi/3)\} p\phi_m \\ &\quad + \omega_m w_e \phi_m \sin(\gamma - 4\pi/3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上式右辺中の係数 ω_m をもつ項が速度起電力である。速度起電力に逆らって外部から供給される電力が，電動機としての発生動力 p_m に等しいことから，瞬時トルク τ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\tau &= p_M / \omega_m = -i_{as} \omega_e \phi_m \sin \gamma - i_{bs} \omega_e \phi_m \sin(\gamma - 2\pi/3) - i_{cs} \omega_e \phi_m \sin(\gamma - 4\pi/3) \\ &= -\omega_e \phi_m \left\{ \left(i_{as} - \frac{1}{2} i_{bs} - \frac{1}{2} i_{cs} \right) \sin \gamma - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} i_{bs} - \frac{\sqrt{3}}{2} i_{cs} \right) \cos \gamma \right\} \dots\dots\dots (5)\end{aligned}$$

ところで、

$$\left. \begin{aligned}\lambda_{mas} &= \omega_e \phi_m \cos \gamma \\ \lambda_{mbs} &= \omega_e \phi_m \cos(\gamma - 2\pi/3) \\ \lambda_{mcs} &= \omega_e \phi_m \cos(\gamma - 4\pi/3)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

を(2)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned}\lambda_{mas} &= \omega_e \phi_m \cos \gamma \\ \lambda_{m\beta s} &= \omega_e \phi_m \sin \gamma\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

が得られる。(5)式に(1)式と(7)式を代入すると

$$\tau = (3/2)(\lambda_{mas} i_{\beta s} - \lambda_{m\beta s} i_{as}) \dots\dots\dots (8)$$

として $\alpha\beta$ 成分法における瞬時トルクの式が得られる。上式は $\alpha\beta$ 成分だけからなっており、零相電流が瞬時トルクの発生に寄与しないことは明らかである。

次に、(8)式の磁束鎖交数を電流の関数に書き換える。 i_{as} および $i_{\beta s}$ に対する励磁インダクタンスを L_m とし、回転子各相の巻線は固定子一相の巻数と同じ巻数に換算されているものとし、その各相電流 i_{ar} , i_{br} および i_{cr} に対して、次のように二軸理論と同じ変換を行う。

$$\left. \begin{aligned}i_{ar} &= (2/3)(i_{ar} \cos \theta_a + i_{br} \cos \theta_b + i_{cr} \cos \theta_c) \\ i_{\beta r} &= (2/3)(-i_{ar} \sin \theta_a - i_{br} \sin \theta_b - i_{cr} \sin \theta_c)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned}\theta_a &= \omega_m t + \theta_0, \quad \theta_b = \theta_a - 2\pi/3 \\ \theta_c &= \theta_a - 4\pi/3\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 θ_a は図1中に示した角で、 θ_0 はその初期値である。 i_{ar} および $i_{\beta r}$ はそれぞれ i_{as} および $i_{\beta s}$ と同じ方向に起磁力を発生する電流であるから

$$\left. \begin{aligned}\lambda_{mas} &= L_m(i_{as} + i_{ar}) \\ \lambda_{m\beta s} &= L_m(i_{\beta s} + i_{\beta r})\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

であり、上式を(8)式に代入することにより、次式が得られる。

$$\tau = (3/2)L_m(i_{ar} i_{\beta s} - i_{\beta r} i_{as}) \dots\dots\dots (12)$$

なお、電機子巻線の全磁束鎖交数の $\alpha\beta$ 成分を λ_{as} , $\lambda_{\beta s}$ とし、一相の漏れインダクタンスを l_s とすれば

$$\left. \begin{aligned}\lambda_{as} &= \lambda_{mas} + l_s i_{as} \\ \lambda_{\beta s} &= \lambda_{m\beta s} + l_s i_{\beta s}\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

である。上式の関係を(8)式に代入すると次式が得られる。

$$\tau = (3/2)(\lambda_{as} i_{\beta s} - \lambda_{\beta s} i_{as}) \dots\dots\dots (14)$$

3. 二軸理論における瞬時トルクの式の導出

二軸理論における電流変換式を

図2 三相同期機
Fig. 2. Three-phase synchronous machine.

$$\left. \begin{aligned}i_{ds} &= (2/3)(i_{as} \cos \theta_a + i_{bs} \cos \theta_b + i_{cs} \cos \theta_c) \\ i_{qs} &= (2/3)(-i_{as} \sin \theta_a - i_{bs} \sin \theta_b - i_{cs} \sin \theta_c)\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

とする。ここに θ_a は図2中に示した角で θ_a , θ_b , θ_c は、(10)式と同じ式で表される。磁束鎖交数についても同様とする。二軸理論における瞬時トルクの式は、第2章と類似の方法によって導出できるが、ここでは(8)式を利用する方法を示す。

電流および磁束鎖交数の dq 軸成分と $\alpha\beta$ 成分との間には次式が成り立つことが容易に証明できる。

$$\left. \begin{aligned}i_{as} &= i_{ds} \cos \theta - i_{qs} \sin \theta \\ i_{\beta s} &= i_{ds} \sin \theta + i_{qs} \cos \theta\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned}\lambda_{mas} &= \lambda_{mds} \cos \theta - \lambda_{mq s} \sin \theta \\ \lambda_{m\beta s} &= \lambda_{mds} \sin \theta + \lambda_{mq s} \cos \theta\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

これらを(8)式に代入すると次式が得られる。

$$\tau = (3/2)(\lambda_{mds} i_{qs} - \lambda_{mq s} i_{ds}) \dots\dots\dots (18)$$

零相電流が瞬時トルクの発生に寄与しないことは、(8)式の導出の際に明らかにされている。

上式を(12)式のように電流とインダクタンスによって表すことは、容易にできる⁽¹⁾。

(平成2年1月22日受付)

文 献

- (1) 猪狩：「三相巻線の変数からの瞬時トルクの式の導出」, 平元電気学会会大, No. 605

猪 狩 武 尚 (正員)

昭和6年7月28日生。30年3月東京大学大学院数物系研究科修士課程修了。同年6月中央大学工学部実験助手。現在、同理工学部教授、理工学部長。主として、回転機理論、回転機試験法の研究に従事。工学博士。照明学会会員。