DSP を用いたサーボシステムの予測制御

——位置サーボ系による軌道追従実験——

正 員 橋 本 秀 紀 (東京大)

非会員 畔 柳 洋 (東京大)

正 員 原 島 文 雄 (東京大)

Predictive Control of Position Servo System using DSP

Hideki Hashimoto, Member, Hiroshi Kuroyanagi, Non-member, Fumio Harashima, Member
(University of Tokyo)

Generalized predictive control (GPC) developed by Clarke et al. is a powerful control method. It is known that GPC has a strong robustness to the parameter mismatch, model order, dead time, etc. In this paper, the authors implement this method to a servo system using DSP (Digital Signal Processor). The predictor used here predicts the future trajectory points. The control input is then determined by minimizing the norm of future errors (i. e. the differences between future trajectory points and reference trajectory points) over a future control horizon. The algorithm is easy to be implemented in a computer, especially in a DSP system. In the experiments, DSP is used to calculate the voltage to be applied to the servo motor. The experimental results show that accurate trajectory following is possible in spite of the simplification imposed to the predictor model and ignorance of the payload.

キーワード：予測制御，DSP，ARMA モデル，位置サーボ系，軌道追従，ロバスト

1. はじめに

予測制御は ARMA モデルに基づいて、現在までの入力と出力の情報から数ステップ先までの出力を予測し、与えられた評価関数を最小にするように次の入力を設定するものである⁽¹⁾。これは、離散的な取扱いにおいて可能であり、ディジタル制御系に特有な制御である。予測制御の演算は積和演算が多いところに特徴があり、モーションコントロールのように応答自体が速い系への応用には演算に要する時間が問題になる。しかし、DSP を用いることによってサンプリング時間に対して演算に要する時間を無視することができ、予測制御の適用が可能になる。

予測制御には制御対象のモデルが必要となるが、厳密に正確なモデルは必要としない。通常、制御対象とそのモデルとの間には構造、パラメータに誤差が存在

する。この誤差（あいまいさ）をかなりの範囲まで抑えるように予測制御は働く。予測制御は無駄時間、非線形性、外乱などに対してロバストで、かつそれらを統一的に取扱うことができるとされている⁽¹⁾⁽²⁾。

本論文では、軌道追従サーボ系に DSP を用いて位置情報のみを利用する予測制御系を実現する。以下に構成法と実験結果を示し、予測制御の特徴（ロバスト性）を検討する。

2. 問題の設定

予測制御によるサーボシステムの構成を図 1 に示す。ここでいう予測器は、統計量を用いる手段とは異なり、制御系（サーボシステム）のモデルに基づく精度の良い外挿と考えることができる。従って、計算機で実現することを考えて、離散系の表現をとる。現時刻 t までの出力 y と、時刻 $t-1$ までの入力 u を用い

図 1 制御系の構成図

Fig. 1. Block diagram of the control system.

図 2 制御のタイミング

Fig. 2. Control timing.

て、時刻 $t+i$ での予測値 $y^*(t+i)$ を予測器によって得る。この $y^*(t+i)$ と目標値 $w(t+i)$ の誤差を最小にする制御入力 $u(t)$ を求めるのが予測制御の問題である。なお、現時刻 t での出力 $y(t)$ が利用できるとしているが、実際には、図 2 に示すように、時刻 t で $y(t)$ を検出して制御入力 $u(t)$ を作るのに演算遅れ t_d が存在する。しかし、制御系を DSP を用いて実現するにあたっては、 t_d は全体のサンプリング時間 T_s に比べて十分小さいとみなすことができる。

本章では、一入力一出力系のサーボシステムを対象として予測制御系の導出を行う。

3. 予測制御

〈3・1〉 予測器の構成 一入力一出力サーボ系を線形離散化し、差分方程式の形にまとめると（サンプリング間隔を規格化して 1 とする）

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + x(t) \quad \cdots (1)$$

の ARMA モデルが得られる。あるいは

$$y(t) = z[1 - A(z^{-1})]y(t-1) + B(z^{-1})u(t-1) + x(t) \quad \cdots (2)$$

と表現する。ただし、 $y(t)$ を出力、 $u(t)$ を入力、 $x(t)$ を外乱およびモデル誤差とする。このとき、 A 、 B に対して

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{NA} z^{-NA} \\ B(z^{-1}) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{NB} z^{-NB} \end{aligned} \quad \cdots (3)$$

が得られると仮定する。以下ではこの (2) 式を対象に予測を行う。

(2) 式から出力 $y(t)$ は

$$\hat{y}(t) = z[1 - \hat{A}(z^{-1})]\hat{y}(t-1) + \hat{B}(z^{-1})u(t-1) \quad \cdots (4)$$

と推定できる。なお、 $x(t)$ に関しては情報がなくて、除くことにする。 $\hat{A}$ 、 $\hat{B}$ はそれぞれ (3) 式の A 、 B を見積もった多項式である。 $A = \hat{A}$ 、 $B = \hat{B}$ 、 $x(t) = 0$ ならば、 $\hat{y}(t) = y(t)$ が成り立つが、一般にはこれらの条件は成立しないので $\hat{y}(t) \neq y(t)$ である。ここでは (4) 式を利用して、未来の時刻 $t+i$ における $y(t+i)$ を予測することを考える。

時刻 t までの出力 y がわかっているとき、時刻 $t+i$ における出力 $y(t+i)$ の予測値 $y^*(t+i)$ を、次のように構成する。

$$y^*(t+i) = \hat{y}(t+i) + \hat{y}(t+i-1) \quad (i \geq 1) \quad \cdots (5)$$

ただし、 $\hat{y}$ は

$$\begin{aligned} \hat{y}(t+i) &= z[1 - \hat{A}(z^{-1})]\hat{y}(t+i-1) \\ &\quad + \hat{B}(z^{-1})u(t+i-1) \end{aligned} \quad \cdots (6)$$

$$y^*(k) = y(k) \quad (k \leq t)$$

であり、 $\hat{y}$ は

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) &= y(t) - \tilde{y}(t) \\ \tilde{y}(t+i) &= y^*(t+i) - \hat{y}(t+i) \quad (i \geq 1) \end{aligned} \quad \cdots (7)$$

である。また、

$$\begin{aligned} \hat{A}(z^{-1}) &= 1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{a}_{NA} z^{-NA} \\ \hat{B}(z^{-1}) &= \hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{b}_{NB} z^{-NB} \end{aligned} \quad \cdots (8)$$

とする。 $\hat{y}(t+i)$ は時刻 $t+i$ における $y(t+i)$ の推定値であり、 $\tilde{y}(t+i)$ は時刻 $t+i$ における予測誤差である。これらの式からわかるように、 $y^*(t+i)$ は未来の制御入力 $u(t)$ 、 $\cdots$ 、 $u(t+i-1)$ の関数となる。

〈3・2〉 予測器の性質 ここでは、(2) 式で与えられる実システムと、(5) 式の予測器との関係を検討する。

(2) 式から

$$\begin{aligned} y(t) &= z(1 - \hat{A})y(t-1) + \hat{B}u(t-1) \\ &\quad + z(\hat{A} - A)y(t-1) \\ &\quad + (B - \hat{B})u(t-1) + x(t) \\ &= z(1 - \hat{A})y(t-1) + \hat{B}u(t-1) + \xi(t) \end{aligned} \quad \cdots (9)$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned} \xi(t) &\equiv z(\hat{A} - A)y(t-1) + (B - \hat{B})u(t-1) \\ &\quad + x(t) \end{aligned} \quad \cdots (10)$$

であり、 $\xi(t)$ は実システムを外部から見たときの等

価外乱である。このとき、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y(t) - \hat{y}(t) = \xi(t) \\ \tilde{y}(t+i) &= y^*(t+i) - \hat{y}(t+i) \\ &= \tilde{y}(t+i-1) \\ &= \dots = \tilde{y}(t) = \xi(t) \quad (i \geq 1) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

である。従って、予測値と真値との誤差 $e(t+i) = y^*(t+i) - y(t+i)$ は、

$$\begin{aligned} e(t+i) &= \tilde{y}(t+i) + \tilde{y}(t+i-1) - y(t+i) \\ &= \tilde{y}(t+i-1) + \{\tilde{y}(t+i) - y(t+i)\} \\ &= \tilde{y}(t+i-1) + \{z(1-\hat{A}) \\ &\quad \times y^*(t+i-1) + \hat{B}u(t+i-1) \\ &\quad - \{z(1-\hat{A})y(t+i-1) \\ &\quad + \hat{B}u(t+i-1) + \xi(t+i)\}\} \\ &= \xi(t) - \xi(t+i) + z(1-\hat{A}) \\ &\quad \times \{y^*(t+i-1) - y(t+i-1)\} \\ &= \{\xi(t) - \xi(t+i)\} \\ &\quad + z(1-\hat{A})\{\xi(t) - \xi(t+i-1)\} \\ &\quad + \dots + \{z(1-\hat{A})\}^{i-2}\{\xi(t) - \xi(t+2)\} \\ &\quad + \{z(1-\hat{A})\}^{i-1}\{y^*(t+1) - y(t+1)\} \\ &= \sum_{k=1}^i \{z(1-\hat{A})\}^{i-k} \{\xi(t) - \xi(t+k)\} \\ &\quad (i \geq 1) \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

となる。(12)式から、 $\xi(t)$ が定数であれば(すなわち、 $\xi(t)$ がステップ外乱とみなせるように $\hat{A}, \hat{B}$ を設定することが可能ならば)、未来の任意の時刻 t について $e(t+i) = 0$ で $y^*(t+i) = y(t+i)$ が成り立ち、予測器は実システムの動作を完全に予測する。また、 $\xi(t)$ が変化の緩やかな関数になるように $\hat{A}, \hat{B}$ を設定することが可能ならば、 $\xi(t) - \xi(t+k)$ は小さい値となるので $y^*(t)$ は $y(t)$ のよい近似となっていることがわかる。なお、(5)式の予測器は、真値との誤差が(12)式を満たすことを示しているだけで、 $i \rightarrow \infty$ における収束性に関しては何も保証していない。この点で、閉ループ構成をとるオブザーバとは異なる。

〈3・3〉 予測制御アルゴリズム このでの目的は、時刻 t までの出力 y と時刻 $t-1$ までの制御入力 u がわかっているときに、時刻 t での制御入力 $u(t)$ を求めることである。本論文ではサーボ系の軌道追従制御を考えているので、目標軌道 $w(t)$ は時系列の形であらかじめ与えられているとして、 N ステップ先までの予測値を用いて次のような評価関数 J を定める。

$$J = \sum_{i=1}^N \{y^*(t+i) - w(t+i)\}^2 \dots \dots \dots (13)$$

(13)式は $u(t), u(t+1), u(t+2), \dots, u(t+N-1)$ の関数となるが、ここでは、計算量を減らすために

$u(t+1) = \dots = u(t+N-1) = u(t)$ と設定する。このとき、(13)式は $u(t)$ だけの関数となる。従って、(13)式を最小化する $u(t)$ の値は、 J を $u(t)$ で微分することによって容易に求めることができる。すなわち、 $y^*(t+i)$ は

$$y^*(t+i) = g_i u(t) + f_i \quad (i \geq 1) \dots \dots \dots (14)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \hat{b}_0 \\ g_i &= \sum_{k=0}^{i-1} \hat{b}_k - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{a}_k g_{i-k} \quad (i > 1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \hat{A}_1 y(t) + \hat{B}_1 u(t-1) + \tilde{y}(t) \\ f_i &= \hat{A}_i y(t) + \hat{B}_i u(t-1) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{a}_k f_{i-k} + \tilde{y}(t) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}_i &= z^i \left(\sum_{k=0}^{i-1} \hat{a}_k z^{-k} - \hat{A} \right) \\ \hat{B}_i &= z^i \left(\hat{B} - \sum_{k=0}^{i-1} \hat{b}_k z^{-k} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

となるから、(14)式を(13)式へ代入して J を最小化する制御入力 $u(t)$ を

$$u(t) = \left[\sum_{i=1}^N g_i^2 \right]^{-1} \left[\sum_{i=1}^N g_i \{w(t+i) - f_i\} \right] \dots (18)$$

と求める。(18)式からわかるように、このアルゴリズムは計算機、特に DSP で容易に実現可能である。

4. 位置サーボ系への適用

ここでは、第3章で導出した予測制御アルゴリズムを、一入力一出力の位置サーボ系に適用する。

〈4・1〉 実験システム 実験対象となるサーボ系を図3に、実験システムを図4に示す。モータ軸に取付けられたアームは長さ約36 cm、質量約2.8 kg、ペイロードは0.5 kgである。コントローラには DSP (NEC μ PD77230) を用いており、1命令は150 ns で実行される。位置情報は分解能1,000 pulses/rev のエンコーダによって取込まれる。出力は12 bit の D/A コンバータを介して DC-DC アンプに送られ、電圧

図3 実験対象
Fig. 3. Experimental system.

図 4 実験システムの構成
Fig. 4. Experimental set-up.

として DC サーボモータ (17 W) へ加えられる。

このサーボ系を二次モデルで近似すると、その方程式は次のように表される。

$$(J_M + J_A)\ddot{\theta} + \frac{k_T k_v}{R_a} \dot{\theta} + f_G = \frac{k_T}{R_a} u \quad (19)$$

ただし、 J_M はモータの慣性モーメント、 J_A はアームおよびペイロードのモータ軸まわりの慣性モーメント、 k_T はトルク定数、 k_v は誘起電圧定数、 R_a は電機子抵抗であり、 f_G はアームおよびペイロードによる重力項である。アームを質量 m 、長さ l の一様な剛体アームとみなし、ペイロードの質量を M 、重力加速度を g とすれば、 $f_G = -(Mgl + mgl/2) \sin \theta$ となる。 J_M, k_T, k_v, R_a の公称値を以下に示す。

$$\left. \begin{aligned} J_M &= 0.0761 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, & k_T &= 4.77 \text{ N} \cdot \text{m/A} \\ k_v &= 4.77 \text{ V} \cdot \text{s}, & R_a &= 2.8 \Omega \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(19) 式の両辺をラプラス変換すると、

$$\Theta(s) = \frac{k_T / (J_M + J_A) R_a}{s \{ s + k_T k_v / (J_M + J_A) R_a \}} U(s) - \frac{1}{s \{ s + k_T k_v / (J_M + J_A) R_a \}} \times F_G(s) / (J_M + J_A) \quad (21)$$

となる。アームおよびペイロードが存在しない場合 ($J_A = 0, f_G = 0$)、モータに関する公称値 [(20) 式] を用いると、

$$\Theta(s) = \frac{22}{s(s+107)} U(s) \quad (22)$$

が得られる。

サーボモータをロボットアームに用いるとき、サーボモータにはアームおよびペイロードが負荷としてかかる。そのときのサーボ系のモデルは一般に (21) 式となるが、アームおよびペイロードの慣性モーメント J_A と重力項 f_G はペイロードに依存し、しかも多軸アームの場合にはアームの状態によって変化する量でもある。そこで本実験では、予測器に用いるモデルとし

図 5 制御アルゴリズムの流れ図
Fig. 5. Flowchart of the algorithm.

て、アームおよびペイロードを無視したモデルを用いる。更に、モータに関する公称値と真値との誤差も考慮し、最終的に以下の (23) 式を予測器のためのモデルとして採用した。

$$\Theta(s) = \frac{30}{s^2} U(s) \quad (23)$$

これは実システムとかなり異なるが、予測制御はこのようなモデル誤差を許容する。

〈4・2〉 制御系設計 次に、(23) 式のモデルに対し、予測制御系を構成する。(23) 式のモデルに零次ホールドを加えて離散化すると (サンプリング間隔を T_s とする)、

$$y(t) = \frac{15 T_s^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} u(t) \quad (24)$$

が得られる。(24) 式を変形すると

$$(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) y(t) = (15 T_s^2 + 15 T_s^2 z^{-1}) u(t-1) \quad (25)$$

となる。従って、 $\hat{A}, \hat{B}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{A}(z^{-1}) &= 1 - 2z^{-1} + z^{-2} \\ \hat{B}(z^{-1}) &= 15 T_s^2 + 15 T_s^2 z^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。(15)~(17) 式より、

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= y(t) - 2y(t-1) + y(t-2) \\ &\quad - 15 T_s^2 u(t-1) - 15 T_s^2 u(t-2) \end{aligned} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= 15 T_s^2 \\ g_2 &= 2g_1 + 30 T_s^2 \\ g_i &= 2g_{i-1} - g_{i-2} + 30 T_s^2 \quad (i \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= 2y(t) - y(t-1) \\ &\quad + 15 T_s^2 u(t-1) + \tilde{y}(t) \\ f_2 &= 2f_1 - y(t) + \tilde{y}(t) \\ f_i &= 2f_{i-1} - f_{i-2} + \tilde{y}(t) \quad (i \geq 3) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となるから、入力 u は (18) 式を用いて決めることができ

る。DSP によって実現されるアルゴリズムの流れ図を図 5 に示す。

5. 実験結果および検討

実験に用いた目標軌道を図 6 に示す。この目標軌道に対し、サンプリング間隔を 5 ms、予測ステップ数 N を $N=1, 2, 3, 4, 5, 10$ としたときの実験結果を図 7 に示す。なお、DSP による演算時間遅れは約 100 μ s であり、サンプリング間隔に比較して十分小さい。目標軌道には加速度まで連続なものを用いた。アームの初期状態は、アームが鉛直軸方向（真上）を向いているときと定め、その状態から図 6 に従って 2 rad まで回転させた。

図 7(a), (b) からわかるように、 $N=1, 2$ では振動が発生するが、 $N=3$ 以降は滑らかな制御入力が得られる。また、 $N=3$ 以降の結果はいずれも、

図 6 目標軌道

Fig. 6. Reference trajectory.

(a) $N=1$

(b) $N=2$

(c) $N=3$

(d) $N=4$

(e) $N=5$

(f) $N=10$

図 7 実験結果

Fig. 7. Experimental results.

図 8 誤差曲線の傾向

Fig. 8. Tendency of the error curve.

(α): 誤差曲線が山状になる部分 (遅れ)
 (β): 誤差が小さく比較的平たんな部分
 (γ): 誤差曲線が谷状になる部分 (行き過ぎ)
 (δ): 定常状態になりアームが停止している部分
 に分けられる (図 8)。図 8 の各部分はそれぞれ図 7 の各部分に対応している。図 8(α), (γ) の区間はともに目標軌道の曲率が大きな部分であり, それぞれ加速, 減速を行わなければならない区間である。図 8(β) は等速直線運動を表す区間であり, この部分での目標軌道と実軌道の誤差 (図 7) は非常に小さい。図 8(δ) はアームが鉛直軸 (真上) とある角度 (2 rad) を保って停止している区間であり, このとき, 図 7 では制御入力にオフセットが現れている。このオフセットは重力に抗してアームを一定角度に保つのに必要なトルクを発生するためのものである。このときの軌道の誤差は非常に小さい。

次に, 区間(α), (γ) の過渡状態における軌道誤差に関して考察を行う。区間(α), (γ) に注目すると, 予測ステップ数 N が増大するにつれて, この区間の誤差が大きくなっていることに気がつく。ここで, 予測制御アルゴリズム [(13)~(18)式] をもう一度検討すると, このアルゴリズムは予測ステップ数 N によって定まる予測区間において, 目標軌道曲線を予測軌道曲線によって, 誤差の 2 乗の和を最小にするという意味での最良近似を行うアルゴリズムであると解釈できる。従って, 制御入力 u としては, 予測軌道が最小 2 乗の意味において目標軌道に最も近づくような入力を選んでいることになる。しかし, この予測制御アルゴリズムでは, 更に未来の制御入力すべて等しいという条件を課している。この条件は, 計算時間の短縮と制御入力の平滑化を意図したものであるが, その反面, 予測軌道の可変範囲を制限することになり, N が増大するにつれて近似精度は低下する。区間(α), (γ) での誤差の N 依存性はこのことが原因であると思われる。

(a) $N=5$ (b) $N=10$

図 9 公称値モデルを用いた実験結果

Fig. 9. Experimental results with the nominal model.

以上のことをまとめると, 予測器に用いられた内部モデルと実システムとの隔たりが大きい場合であっても, 予測ステップ数 N をある程度大きな値にとれば良好な特性が得られるが, 逆に, N を大きくとり過ぎると過渡状態の誤差が大きくなるという結果が得られる。このことから, このアルゴリズムでは, 予測器に用いられた内部モデルだけでなく, 予測ステップ数 N も重要な設計指標であることがわかる。

最後に, 本制御系のロバスト性について少しふれておく。図 9 は (22) 式で表される公称値モデルを用いて実験を行った結果である。ただし, アームおよびペイロードによる非線形項は無視している。この実験結果と (23) 式を用いた結果 (図 7) とを比較することによって, 本制御系では (23) 式のような実システムと隔たりのあるモデルを用いても, かなり良好な制御性能が得られることが確認できる。

6. 終りに

本論文では, DSP を用いて数ステップ先までの実軌道を予測し, 制御入力をフィードフォワード的に求めることによって良好な軌道追従特性が得られることを示した。今後の課題として, 最適な N の決定法, ロバスト性に関する厳密な検討がある。

(平成元年 9 月 6 日受付, 同 2 年 4 月 3 日再受付)

文 献

- (1) D. W. Clarke, C. Mohtadi & P. S. Tufts: "Generalized predictive control, Part 1 and Part 2", *Automatica*, 23, No. 2, p. 137 (1987)
- (2) O. Kaynak & H. Hoyer: "Predictive control of a robotic arm", Proc. of IFAC Symposium on Robot Control, p. 87. 1 (1988)

橋 本 秀 紀 (正員)

昭和 62 年 3 月東京大学大学院工学系研究科博士課程修了。工学博士。同年 4 月同大学講師，生産技術研究所勤務，現在，同助教授。平成元年度，2 年度 MIT 客員研究員。現在は，知的制御システムの研究に興味をもつ。

畔 柳 洋 (非会員)

平成 2 年 3 月東京大学大学院工学系研究科電気工学専攻修士課程修了。同年 4 月より(株)豊田中央研究所勤務。

原 島 文 雄 (正員)

昭和 42 年 3 月東京大学大学院工学系研究科博士課程修了。工学博士。同年 4 月同大学助教授，55 年同教授，現在に至る。パワーエレクトロニクス，制御，ロボット工学の研究に従事。53 年計測自動制御学会論文賞，58 年電気学会論文賞，59 年 IEEE Anthony J. Hornfeck Award, 62 年 IEEE Engine Mittelmann Award 受賞。61, 62 年度 IEEE IES の President。IEEE Fellow，現在 IEEE Secretary。