AC モータの調波諸量に関する基礎解析

正員 堀 井 龍 夫 (茨城大)

正員 湧 井 源二郎 (茨城大)

Basic Analysis on Harmonic Quantities of AC Motor

Tatsuo Horii, Member, Genjiro Wakui, Member (Ibaraki University)

We will introduce a basic analysis on the harmonic quantities of AC motor, flux density, m. m. f., e. m. f., and etc.. The quantities which degrees of space and time alternation are equal to those of fundamental currents on positive-phase-sequence and fundamental fields excited by its currents, are called fundamental harmonics. And the quantities to be not equal to degree of space alternation or time alternation are called higher harmonics.

At first, the actual conductor arrangement is made a relation to sum of the density distribution of winding for harmonics including a fundamental. After deriving the relationship equation of the harmonic m. m. f. and the flux density on the gap region, and the equation of harmonic flux density and e. m. f. on the density distribution of winding, we have the general expression of equivalent impedance on any phase sequence for AC motors.

キーワード：AC モータ，起磁力，磁束密度，等価インピーダンス，高調波

1. ま え が き

AC モータに存在する高調波としては、巻線分布による起磁力高調波、回転方向におけるギャップパーミアンスの不均一によって派生するスロット高調波、逆相磁界等々が考えられる。これまでに、様々なモータの高調波に関する報告が行われてきた。等価回路を示したものでは、表面導体形誘導機のスロット高調波についての研究⁽¹⁾が報告されている。また、かご形誘導電動機の高調波トルクに関する報告^{(2)~(4)}がある。同期電動機の解析は d, q 軸変換による解析が主流で、高調波を d, q 軸リアクタンスに含めて解析しており、高調波に関する報告はほとんど見あたらない。同期電動機の一つであるヒステリシスモータでは高調波の影響が大きく高調波に関する研究が数多く見受けられ、著者の一人も多数報告している⁽⁵⁾。

本論文では、各調波の誘導起電力、起磁力分布（カレントシート）、磁束密度、等々の諸量を一般的に解析する。なお、本論文では電機子が固定子であるとして解析を行っている。解析ではこれら調波諸量を基本

波と高調波に次のように分けて考えている。固定子座標において、空間次数 1，時間次数 1 である量を基本波、それ以外の値のものを高調波とする。進行波において時間次数が空間次数の符号と一致する場合は正相進行波、異なる場合は逆相進行波を表す。まず、高調波に対する巻線密度分布と、その巻線に誘導される高調波起電力の式を示す。最初に磁束密度や起磁力分布を与えるのではなく、基本波および高調波に対する巻線密度分布と、そこに流れる電流を与えて解析を始める。このことにより、電流、起磁力分布、磁束密度、誘導起電力の間の位相関係を一貫して得ることが可能となり等価回路に直結する。本解析においては、従来の解析で無視されることの多いギャップ以外の起磁力消費を各部のリアクタンスとして表すことにする。そのリアクタンスの影響はギャップ磁束密度の減少や、ギャップ磁束密度と起磁力分布の間の位相変化となって現れる。基本波を含めた高調波磁界は、固定子および回転子の巻線や導体に誘導電流を流し起磁力分布を発生する。しかし、誘導電流を含めて微分方程式を立て解析することは非常に複雑となる。そこで、本解析

では誘導電流が磁束密度の位相と大きさに影響を及ぼすことに着目して、誘導電流の作用を誘導電流等価リアクタンスとして表すことにする。このため、アンペアの周回積分から簡単な基礎方程式を得ることができ、解析を非常に簡単に行える。また、モータに発生する定常トルクの性質をギャップ磁束密度の時間次数と空間次数の二つから簡単に把握する方法を示す。最後に、任意の相順（正相、逆相、零相）の等価インピーダンス式を誘導している。

2. 巻線密度分布と起磁力分布および誘導起電力

〈2・1〉 巻線密度分布と起磁力分布 図1に本解析に使用した座標を示す。 x, y, z は固定子に固定された座標であり、 x', y', z' は回転子に固定された座標である。固定子巻線の基本波に対する単位ラジアンあたりの各相の導体の周辺密度分布については既に報告⁽⁶⁾されている。ここでは、この考え方に基づき、一般的な k 次空間調波に対する単位長さあたりの各相の巻線の密度分布の式を考える。以後は巻線密度分布と呼び、固定子 m 相巻線について考える。

巻線に流れる u 番目の相における $\bar{n}$ 次の時間調波電流 i_n を次のような式で表すものとする。 x は各相電流間の位相差で、三相では $\pm 2\pi/3$ であり、二相では $\pm \pi/2$ となる。複号は電源の相順を表し、正符号が正相、負符号が逆相である。

$$i_n = \sqrt{2} I_n \sin \{ \bar{n}(\omega t - (u-1)x - \varphi_{cn}) \} \quad (1)$$

ここに、 I_n ： $\bar{n}$ 次の時間調波電流の実効値、

ω ：電源角周波数、 φ_{cn} ：位相角

ここで、 k 次空間調波に対する巻線密度分布 N_k を次のように決める。固定子座標の x 方向の原点を、ある一相の巻線の中心の地点（1極あたりのスロット数が偶数のとき歯の中心）にとると、固定子の k 次調波

図1 座標

Fig. 1. Coordinates for analysis of motor.

に対する巻線密度分布 N_k は次式で表すものとする。

$$N_k = N_{km} \sin \{ k((\pi/\tau)x - (u-1)x) \} \quad (2)$$

$$N_{km} = W \xi_k / p \tau \quad (3)$$

$$\xi_k = \frac{\sin \left(\frac{q_s}{m} \frac{k \psi_{s1}}{2} \right)}{\frac{q_s}{m} \sin \left(k \frac{\psi_{s1}}{2} \right)} \sin \left(k \frac{\tau_{w1}}{\tau} \frac{\pi}{2} \right) \quad (4)$$

ここに、 N_{km} ： k 次空間調波に対する巻線密度分布の最大値、 τ ：極ピッチ、 W ：一相あたりの巻数、 p ：極対数、 ξ_k ： k 次空間調波の巻線係数、 q_s ：一極あたりの固定子スロット数、 ψ_{s1} ：1スロットピッチ角、 τ_{w1} ：コイルピッチ

m 相 k 次空間調波についての起磁力分布は k 次空間調波に対する巻線密度分布と、入力電流の積の和を各相について求めれば得られる。

$$F_{nk} = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \left(\bar{n} \omega t - k \frac{\pi}{\tau} x - \bar{n} \varphi_{cn} \right) - \sqrt{C^2 + D^2} \cos \left(-\bar{n} \omega t - k \frac{\pi}{\tau} x + \bar{n} \varphi_{cn} \right) \quad (5)$$

ここで、次のように置き換えている。

$$A = \sum_{u=1}^{u=m} N_{km} \sqrt{2} I_n \frac{1}{2} \cos \{ (\bar{n}-k)(u-1)x \} \quad (6)$$

$$B = \sum_{u=1}^{u=m} N_{km} \sqrt{2} I_n \frac{1}{2} \sin \{ (\bar{n}-k)(u-1)x \} \quad (7)$$

$$C = \sum_{u=1}^{u=m} N_{km} \sqrt{2} I_n \frac{1}{2} \cos \{ (\bar{n}+k)(u-1)x \} \quad (8)$$

$$D = \sum_{u=1}^{u=m} N_{km} \sqrt{2} I_n \frac{1}{2} \sin \{ (\bar{n}+k)(u-1)x \} \quad (9)$$

巻線および電流が平衡な場合、上の(6)～(9)式に含まれる $\bar{n}-k$ 、 $\bar{n}+k$ の値について次の場合を考える。三相の場合は0を含む6の倍数、二相の場合には0を含む4の倍数のとき、つまり $2m\iota$ 倍のとき正相または逆相起磁力分布が作られる。今後、 $k=2m\iota \pm 1$ と考える。ただし、 ι は起磁力高調波の次数を決定する階数である。例えば、階数 $\iota=0$ のとき $k=\pm 1$ であるが、 $\bar{n}=1$ 、 $k=1$ で C, D が0となり A, B が正相起磁力分布をつくり、 $\bar{n}=1$ 、 $k=-1$ では A, B が0となり C, D が逆相起磁力分布をつくる。ここで、固定子、回転子のどちらの座標に変換する場合でも一般には空間次数が変化しないような座標変換を行うので、(5)式を $n=\pm \bar{n}$ と置き直す。進行波の方向は時

間次数の符号が空間次数と同符号の場合は正相進行波，異符号の場合は逆相進行波である。

$$F_{nk} = \pm m N_{lm} \sqrt{2} I_n \cos \left(\omega t - k \frac{\pi}{\tau} x - n \varphi_{cn} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$t=0$ の場合の起磁力分布を複素ベクトル表示で表しておく。正相電源の場合， $k=1$ であるので $n=1$ を (10) 式に代入する。

$$\dot{F}_{11} = m N_{1m} I_1 e^{j(\omega t - (\pi/\tau)x - \varphi_{c1})} \quad \dots\dots\dots (11)$$

逆相電源の場合， $k=-1$ であるので $n=1$ を代入する。

$$\dot{F}_{1(-1)} = -m N_{1m} I_1 e^{j(\omega t + (\pi/\tau)x - \varphi_{c1})} \quad \dots\dots\dots (12)$$

φ_{c1} は電流の位相角であるが， $t=0$ における起磁力分布の最大値の存在する空間位置を表している。

〈2・2〉 誘導起電力 k 次空間調波， n 次時間調波のギャップ部の磁束密度 B_{gynk} が次式で与えられているものとする。

$$B_{gynk} = \pm B_{gynkm} \times \cos \left(\omega t - k \frac{\pi}{\tau} x - n \varphi_{cn} - \varphi_{bnk} \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

上式の φ_{bnk} は各部のリラクタンسによって生じる磁束密度の位相変化を表す角度である。 k 次の空間調波のギャップ磁束密度は同一空間次数に対する巻線密度分布に起電力を誘導する。まず， k 次空間調波に対する巻線密度分布の位置 x における巻線に誘導される起電力を求める。 k 次空間調波に対する巻線密度分布の任意の 1 巻線に誘導される起電力 e は，磁束鎖交数を k 次の極ピッチ τ/k の範囲で求め，時間微分を行うと次式が得られる。

$$e = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_0=x}^{x_0=x+\tau/k} B_{gynk} l dx_0 \\ = \mp n \omega \frac{2}{\pi} B_{gynkm} \frac{\tau}{k} l \times \cos \left(\omega t - k \frac{\pi}{\tau} x - n \varphi_{cn} - \varphi_{bnk} \right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし， x_0 ：任意の巻線に固定された回転方向の座標， l ：モータの軸方向の長さ

k 次空間調波に対する巻線密度分布全体に誘導される起電力 e_{nk} は上の起電力 e に巻線密度分布 N_k を掛け回転子に沿って積分すると求めることができる。

$$e_{nk} = \int_{x=0}^{x=2\pi r} N_k e dx \\ = \mp N_{km} p r n \omega (2/\pi) B_{gynkm} (\tau/k) l \times \sin \{ \omega t - k(u-1)x - n \varphi_{cn} - \varphi_{bnk} \} \quad \dots\dots\dots (15)$$

上式は，もちろん速度起電力による結果と一致する。

3. ギャップ磁束密度と起磁力分布の関係

〈3・1〉 ギャップ磁束密度と起磁力分布 モータの特性に対して最も重要な役割を演じるギャップ磁束密度と起磁力分布の関係を調べる。モータに存在する諸量は様々な調波のものが考えられるが，初めは基本波成分にのみ着目する。この基本波成分に着目した結果として，付録に AC モータとしては構造的に最も単純なヒステリシスモータに対する簡単な電磁界解析を示している。(付 7) 式は誘導電流を無視した場合の基本波の磁束密度と基本波入力電流による起磁力分布の関係式である。この関係式に基本波入力電流以外の起磁力分布を加え，更に各部のパーミアンズ変動を考慮することによって，本解析における AC モータに対する基礎方程式を得ることができる。

本章では，ギャップ部リラクタンスの大きなモータを対象として式の展開を行うことにするが，これにあてはまらないモータの場合もまったく同じ考え方で誘導することができる。(付 7) 式に基本波誘導電流による起磁力分布 $\dot{F}_{11}$ を加え，ギャップ部のリラクタンス成分の空間，時間変化を考慮すると，基礎方程式は (16) 式で表すことができる。

$$\dot{F}_{11} = \left[\frac{\dot{R}_{G11}}{1 + \frac{a_0}{a_0}} + \dot{R}_{R11} + \dot{R}_{S11} \right] \dot{B}_{0v} - \dot{F}_{F11} \quad \dots\dots\dots (16)$$

ここで， a_0, a_v ：ギャップパーミアンスの一定成分および変動成分， $\dot{R}_{G11}$ ：ギャップパーミアンスの変化を考慮した単位ラジアン，単位軸長あたりのギャップリラクタンス， $\dot{R}_{R11}$ ：単位ラジアン，単位軸長あたりの回転子リラクタンス， $\dot{R}_{S11}$ ：単位ラジアン，単位軸長あたりの固定子リラクタンス， $\dot{F}_{F11}$ ：基本波誘導電流による起磁力分布

誘導電流は磁束密度の位相と大きさに影響するので，この影響を考慮した誘導電流等価リラクタンスを考えることにする。基本波誘導電流による起磁力分布 $\dot{F}_{F11}$ が誘導電流等価リラクタンスと磁束密度の積 $-\dot{R}_{F11} \dot{B}_{0v}$ に等しいとする。誘導電流等価リラクタンスの具体的な式は〈3・3〉節で述べる。ここで，

$$\dot{U}_{11} = \frac{\dot{R}_{R11} + \dot{R}_{S11} + \dot{R}_{F11}}{\dot{R}_{G11} + \dot{R}_{R11} + \dot{R}_{S11} + \dot{R}_{F11}} \quad \dots\dots\dots (17)$$

とおいて考えることにする。ギャップパーミアンスの変動成分が一定成分よりかなり小さいか，または

$\dot{U}_{11}$ が 1 よりかなり小さいモータの場合を想定する。この場合、(18)式のように第 2 項まで考慮した近似式を用いると (16) 式は (19) 式のように変形できる。

$$\left[1 + \dot{U}_{11} \frac{a_v}{a_0}\right]^{-1} \approx 1 - \dot{U}_{11} \frac{a_v}{a_0} \dots\dots\dots (18)$$

上の近似式が成立しないようなモータの場合には近似式の項を増加させればよい。

$$\begin{aligned} & \left[\left[1 - \dot{U}_{11} \left(\frac{a_v}{a_0} \right)^2 \right] + (1 - \dot{U}_{11}) \frac{a_v}{a_0} \right] \dot{F}_{11} \\ & = [\dot{R}_{G11} + \dot{R}_{R11} + \dot{R}_{S11} + \dot{R}_{F11}] \dot{B}_{gy} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

固定子スロットによるギャップパーミアンス Λ_s の変化は次式のように表されるものとする。

$$\Lambda_s = \frac{\mu_0}{\delta} \left[a_{s0} + \sum_{vs=1}^{\infty} a_{svs} \cos \left(v_s 2q_s \frac{\pi}{\tau} x \right) \right] \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 δ : ギャップの長さ、 μ_0 : 真空の透磁率、 q_s : 一極あたりの固定子スロット数
回転子スロット、または回転子形状によるギャップパーミアンス Λ_r の変化は回転子座標において次式で表されるものとする。

$$\Lambda_r = \frac{\mu_0}{\delta} \left[a_{r0} + \sum_{vr=1}^{\infty} a_{rvr} \cos \left(v_r 2q_r \frac{\pi}{\tau} x' \right) \right] \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 q_r : 一極あたりの回転子スロット数、または一極あたりのギャップパーミアンスの変化

回転子と固定子座標の関係は滑り s で回転子が回転しているとき、(22)式のように表すことができる。なお、 ψ は、固定子起磁力分布と回転子との空間的位置変位の電気角であり、起磁力相差角⁽⁷⁾と呼ばれる。この起磁力相差角は固定子起磁力分布の最大値のある空間位置とパーミアンスが最も小さい回転子位置 (q 軸) との相対角度である。ただし、文献(7)で使用している電流密度分布は本論文で起磁力分布に対応する。

$$s\omega t - \frac{\pi}{\tau} x' + \psi = \omega t - \frac{\pi}{\tau} x - \varphi_{c1} \dots\dots\dots (22)$$

この関係式を (21) 式に代入し固定子座標で表す。

$$\begin{aligned} \Lambda_r &= \frac{\mu_0}{\delta} \left[a_{r0} + \sum_{vr=1}^{\infty} a_{rvr} \right. \\ & \quad \left. \times \cos \left[v_r 2q_r \left\{ (1-s)\omega t - \frac{\pi}{\tau} x - \varphi_{c1} - \psi \right\} \right] \right] \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

合成パーミアンスは (20)、(23) 式の二つのパーミアンスから得られる。合成パーミアンスの一定項 a_0 および変化項 a_v は (24)、(25) 式で表される。

$$a_0 = \frac{\mu_0}{\delta} a_{s0} a_{r0} \dots\dots\dots (24)$$

$$\begin{aligned} a_v &= \frac{\mu_0}{\delta} \left[a_{r0} \sum_{vs=1}^{\infty} a_{svs} \cos \left(v_s 2q_s \frac{\pi}{\tau} x \right) \right. \\ & \quad + a_{s0} \sum_{vr=1}^{\infty} a_{rvr} \cos \left[v_r 2q_r \left\{ (1-s)\omega t - \frac{\pi}{\tau} x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \varphi_{c1} - \psi \right\} \right] + \left\{ \sum_{vs=1}^{\infty} a_{svs} \cos \left(v_s 2q_s \frac{\pi}{\tau} x \right) \right\} \\ & \quad \times \left[\sum_{vr=1}^{\infty} a_{rvr} \cos \left[v_r 2q_r \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \left\{ (1-s)\omega t - \frac{\pi}{\tau} x - \varphi_{c1} - \psi \right\} \right] \right] \dots\dots (25) \end{aligned}$$

(19) 式の左辺第 1 項に (24)、(25) 式を代入すると一定成分以外に変化成分が含まれることになるが、ここではそのうち一定成分のみを考慮することにする。固定子、回転子ともに高調波階数が 1 の場合について、(19) 式を変形して (11) 式を代入し整理すると (26) 式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{B}_{gy} &= \frac{mN_{1m}I_1}{\dot{R}_{G11} + \dot{R}_{R11} + \dot{R}_{S11} + \dot{R}_{F11}} \\ & \quad \times \left[\dot{h}_{011} \exp \left[j \left\{ \omega t - \frac{\pi}{\tau} x - \varphi_{c1} \right\} \right] \right. \\ & \quad + \dot{h}_{1s11} \exp \left[j \left\{ \omega t - (2q_s + 1) \frac{\pi}{\tau} x - \varphi_{c1} \right\} \right] \\ & \quad + \dot{h}_{1s11} \exp \left[j \left\{ -\omega t - (2q_s - 1) \frac{\pi}{\tau} x \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \varphi_{c1} \right\} \right] \\ & \quad + \dot{h}_{1r11} \exp \left[j \left\{ (2q_r \overline{1-s} + 1) \omega t \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (2q_r + 1) \frac{\pi}{\tau} x - (2q_r + 1) \varphi_{c1} - 2q_r \psi \right\} \right] \\ & \quad + \dot{h}_{1r11} \exp \left[j \left\{ (2q_r \overline{1-s} - 1) \omega t \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (2q_r - 1) \frac{\pi}{\tau} x - (2q_r - 1) \varphi_{c1} - 2q_r \psi \right\} \right] \\ & \quad + \dot{h}_{1r11} \exp \left[j \left\{ (2q_r \overline{1-s} + 1) \omega t \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (2(\overline{q_r - q_s}) + 1) \frac{\pi}{\tau} x - (2q_r + 1) \varphi_{c1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2q_r \psi \right\} \right] \\ & \quad + \dot{h}_{1r11} \exp \left[j \left\{ (2q_r \overline{1-s} - 1) \omega t \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (2\overline{q_r - q_s} - 1) \frac{\pi}{\tau} x - (2q_r - 1) \varphi_{c1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - 2q_r \psi \right\} \right] \\ & \quad + \dot{h}_{1r11} \exp \left[j \left\{ (2q_r \overline{1-s} + 1) \omega t \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(2q_r + q_s + 1) \frac{\pi}{\tau} x \\
& -(2q_r + 1) \varphi_{c1} - 2q_r \psi \Big\} \\
& + \dot{h}_{111} \exp \left[j \left\{ (2q_r + 1 - s - 1) \omega t \right. \right. \\
& \left. \left. - [2(q_r + q_s) - 1] \frac{\pi}{\tau} x \right. \right. \\
& \left. \left. - (2q_r - 1) \varphi_{c1} - 2q_r \psi \right\} \right] \dots \dots \dots (26)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\dot{h}_{011} = 1 - \dot{U}_{11} \left\{ \left(\frac{a_{s1}}{2a_{s0}} \right)^2 + \left(\frac{a_{r1}}{2a_{r0}} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (27)$$

$$\dot{h}_{1s11} = (1 - \dot{U}_{11}) \frac{a_{s1}}{2a_{s0}} \dots \dots \dots (28)$$

$$\dot{h}_{1r11} = (1 - \dot{U}_{11}) \frac{a_{r1}}{2a_{r0}} \dots \dots \dots (29)$$

$$\dot{h}_{111} = (1 - \dot{U}_{11}) \frac{a_{s1} a_{r1}}{4a_{s0} a_{r0}} \dots \dots \dots (30)$$

である。

(26)式の第1項が基本波磁束密度に相当し、第2、3項が固定子スロットによる高調波磁束密度、第4、5項が回転子によるものである。第6項以降は固定子と回転子のギャップパーミアンスの相互作用によるものである。(27)式の第2項はギャップパーミアンスに不均一が存在する場合に、 $\dot{U}_{11}$ が0でないために生じる基本波の減少成分を表している。(28)~(30)式の左辺の添字の第1番目は高調波階数を示し、第2番目は固定子、回転子またはそれらの相互作用のギャップパーミアンスを識別し、第3、第4番目はそれぞれ時間次数、空間次数を表す。

〈3・2〉 起磁力高調波による磁束密度 k 次起磁力高調波によるギャップ磁束密度は、基本波の場合と同様に起磁力分布に対応するリラクタンスで割ることのできる。起磁力高調波も、基本波の場合と同じくスロット高調波を発生するが、この高調波は基本波のものに比較して小さいので、ここでは近似的に無視する。

$$\dot{B}_{gy1k} = \frac{\dot{h}_{0nk} \dot{F}_{1k}}{\dot{R}_{G1k} + \dot{R}_{R1k} + \dot{R}_{S1k} + \dot{R}_{F1k}} \dots \dots \dots (31)$$

ここに、 $\dot{R}_{G1k}$: 単位ラジアン、単位軸長あたりの k 次固定子起磁力高調波のギャップリラクタンス、 $\dot{R}_{R1k}$: 単位ラジアン、単位軸長あたりの k 次固定子起磁力高調波の回転子リラクタンス、 $\dot{R}_{S1k}$: 単位ラジアン、単位軸長あたりの k 次固定子起磁力高調波の固定子リラクタンス、 $\dot{R}_{F1k}$: 単位ラジアン、単位軸長あたりの k 次の誘導電流等価リラ

クタンス

$\dot{h}_{0nk}$ は (17)、(27)式の添字を置き換えて考えれば求められる。ギャップリラクタンスは基本波の場合の k 倍となる。回転子リラクタンスは高調波磁束の等価的な磁路を考えて求めることになる。しかし、飽和していない鉄心の場合には固定子リラクタンス、回転子リラクタンスともに無視できる。

〈3・3〉 誘導電流等価リラクタンス ここでは塊状回転子の渦電流の場合と巻線電流の場合について考えることにする。

まず、渦電流について考える。回転子座標において k' 次空間調波、 n' 次時間調波のギャップ部の磁束密度 B_{gyrk} が次式で与えられているときの回転子内の磁束分布を求める。

$$\dot{B}_{gyrk} = \frac{B_{gyrk}}{\sqrt{2}} e^{j(n'\omega t - k'(\pi/\tau)x' - \varphi_{bryk})} \dots \dots \dots (32)$$

軸方向成分を無視した場合、マクスウェルの方程式より回転子内の磁束密度の y 成分に関して次式が成立する。

$$\frac{\partial^2 \dot{B}_{ryrk}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \dot{B}_{ryrk}}{\partial y'^2} = jn'\omega K_{Rk} \sigma \mu_k \dot{B}_{ryrk} \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 K_{Rk} : k 次空間調波に対する Russel の導電率補正係数⁽⁸⁾、 σ : 導電率、 μ_k : 高調波透磁率

なお、Russel は基本波の場合について解析を行っているが、回転子軸長さと極ピッチの比で補正係数を与えており、簡単に k 次調波に適用できる。このことは、次章で求めている高調波損失の(46)式中の最後の項を等価体積と考えた場合、(46)式を $n'=s$ 、 $k'=1$ と置き換えると Russel の示した無限長の回転子に対する基本波損失に等価となることで確認できる。反射波の生じないような簡単な境界条件（モータ軸の中心で磁束密度0）を与えて上式を解く。磁束密度は次のように表せる。

$$\dot{B}_{ryrk} = B_{gyrk} e^{a_{ryy'}} e^{j(n'\omega t - k'(\pi/\tau)x' - \varphi_{bryk} + \beta_{ryy'})} \dots \dots \dots (34)$$

$$\begin{aligned}
\dot{B}_{ryrk} &= \frac{\tau}{k'\pi} \sqrt{a_{ryk'}^2 + \beta_{ryk'}^2} B_{gyrk} e^{a_{ryy'}} \\
&\times e^{j(n'\omega t - k'(\pi/\tau)x' - \varphi_{bryk} + \beta_{ryy'} - \varphi_{ry} + (\pi/2))} \dots \dots \dots (35)
\end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
a_{ryk'} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(n'\omega K_{Rk} \sigma \mu_k)^2 + \left(k' \frac{\pi}{\tau}\right)^4 + \left(k' \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \\
&\dots \dots \dots (36)
\end{aligned}$$

$$\beta_{n'k'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(n' \omega K_{Rk} \sigma \mu_k)^2 + \left(k' \frac{\pi}{\tau}\right)^4 - \left(k' \frac{\pi}{\tau}\right)^2} \quad (37)$$

$$\varphi_{ed} = \arctan \left(\frac{\beta_{n'k'}}{\alpha_{n'k'}} \right) \quad (38)$$

である。

回転子に流れる渦電流は次のように表せる。

$$\dot{J}_{rznk} = -K_{Rk} \sigma \frac{\tau}{k' \pi} n' \omega \dot{B}_{rznk} \quad (39)$$

上式は y 方向に変化しているので、この式を y 方向に積分し等価的な回転子表面におけるカレントシート、つまり回転子電流による起磁力分布 $\dot{F}_{rzk}$ を得る。

$$\begin{aligned} \dot{F}_{rzk} &= -K_{Rk} \sigma \frac{\tau}{k' \pi} n' \omega \frac{1}{\sqrt{\alpha_{n'k'}^2 + \beta_{n'k'}^2}} e^{-j\varphi_{ed}} \dot{B}_{rznk} \\ &\quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

次に回転子巻線電流の場合を考える。回転子誘導電流は回転子巻線の誘導起電力をその巻線抵抗と漏れリアクタンスで構成されるインピーダンスで割ることで得ることができる。よって、 n' 、 k' 次の回転子巻線誘導電流による起磁力分布は(41)式で表される。

$$\dot{F}_{rzk} = -m' N'_{k'm} \frac{N'_{k'm} p \tau}{\sqrt{R_{n'k'}^2 + (n' X'_{n'k'})^2}} \frac{2}{\pi} \dot{B}_{rznk} \frac{\tau}{k' l} e^{-j\varphi_r} \quad (41)$$

ここに、

$$N'_{k'm} = \frac{W' \xi'_{k'}}{p \tau} \quad (42)$$

ただし、 m' ：回転子巻線の相数、 $N'_{k'm}$ ： k' 次の回転子巻線の巻線密度分布の最大値、 W' ：回転子巻線の一相あたりの巻数、 $\xi'_{k'}$ ： k' 次空間調波の回転子巻線係数、 $R'_{n'k'}$ ： n' 、 k' 次の高調波に対する回転子巻線の一相あたりの抵抗、 $X'_{n'k'}$ ： $s=1$ における n' 、 k' 次の高調波に対する回転子巻線の一相あたりの漏れリアクタンス、 φ_r ： n' 、 k' 次の高調波に対するインピーダンスの位相角

誘導電流等価リラクタンス $\dot{R}_{rzk}$ と磁束密度 $\dot{B}_{rznk}$ との関係は、誘導電流が存在する場合、次の式から求めるものとする。

$$\dot{F}_{rzk} = -\dot{R}_{rzk} \dot{B}_{rznk} \quad (43)$$

よって、回転子に流れる渦電流の等価リラクタンスは次式で表される。

$$\dot{R}_{rzk} = K_{Rk} \sigma \frac{\tau}{k' \pi} n' \omega \frac{1}{\sqrt{\alpha_{n'k'}^2 + \beta_{n'k'}^2}} e^{-j\varphi_{ed}} \quad (44)$$

同じく、回転子に巻線がある場合に流れる誘導電流の等価リラクタンスは次式で表される。

$$\dot{R}_{rzk} = m' N'_{k'm} \frac{N'_{k'm} p \tau}{\sqrt{R_{n'k'}^2 + (n' X'_{n'k'})^2}} \frac{2}{\pi} \frac{\tau}{k' l} e^{-j\varphi_r} \quad (45)$$

4. 出力と損失

〈4・1〉 出力と損失式 k 次空間調波の電流損失とその出力を求める。回転子全体について(39)式に示す渦電流による損失 P_l は単位体積あたりの渦電流損を回転子全体について積分すればよく、次式で表される。

$$P_l = K_{Rk} \sigma \left[\frac{\tau}{k' \pi} n' \omega \frac{B_{gym}}{\sqrt{2}} \right]^2 \frac{l 2 p \tau}{2 a_{n'k'}} \quad (46)$$

回転子全体について空間次数が等しい磁束密度と渦電流の間に働く力 f は電流密度と磁束密度の積を回転子全体について積分して得られる。また、このときの出力は、回転子の速度を掛けることで次式となる。

$$P_0 = f \frac{\tau}{\pi} (1-s) \omega = (1-s) \frac{k'}{n'} P_l \quad (47)$$

(41)式の起磁力分布を発生する回転子巻線回路の誘導電流 $I_{n'}$ による抵抗損 P_l は、平衡 m' 相の場合に次式となる。

$$\begin{aligned} P_l &= m' I_{n'}^2 \sqrt{R_{n'k'}^2 + (n' X'_{n'k'})^2} \cos \varphi_r \\ &= m' \frac{\left[N'_{k'm} p \tau \frac{n' \omega}{\pi} \frac{B_{gym}}{\sqrt{2}} \frac{\tau}{k' l} \right]^2 \cos \varphi_r}{\sqrt{R_{n'k'}^2 + (n' X'_{n'k'})^2}} \\ &\quad \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

巻線の場合の出力は、渦電流の場合の損失および出力関係と全く等しく(47)式で表すことができる。

〈4・2〉 磁束密度の空間次数、時間次数とトルクの関係 トルクは(47)式の出力を回転子の機械的角速度で割れば求められる。

$$T = \frac{p}{\omega} \frac{k'}{n'} P_l \quad (49)$$

回転子座標においてトルクは上式に示すように磁束密度が正相進行波の場合に正となり、逆相の場合は負となる。また、固定子座標でみた場合は、正相進行波で負となり、逆相の場合は正となる。

同期トルク、非同期トルクの定量的、定性的な説明はこれまで数多くの文献で行われている^{(2)~(4)}が、ここでは、ギャップ磁束密度分布と起磁力分布を用いた

説明を行う。固定子および回転子に働くトルクは作用反作用の関係があるので、固定子電流に作用するトルクを考えてみる。固定子巻線に誘導電流が流れるためには、ギャップ磁束密度の空間次数は固定子巻線の巻線係数が0とならないような空間次数である必要がある。このときのギャップ磁束密度の時間次数が固定子巻線に流れる誘導電流の時間次数となる。よって、磁束密度とその誘導電流との間に定常トルクが発生する。同期トルクは磁束密度と固定子巻線の基本波電流との間の相互作用によって発生する。一方、非同期トルクは磁束密度と滑りによって変化する周波数をもった固定子巻線に流れる電流との相互作用による。次に同期トルクの例を示す。(26)式の5番目の磁束密度は、 q_r が空間調波 $k=1$ となるような大きさのとき、時間調波 $n=1$ となる滑り $s=0$ で同期トルクを発生する。これが反作用トルクである。また、(26)式の6, 7番目の磁束密度も固定子と回転子の一極あたりのスロット数の差によって空間次数 k の大きさが固定子電流を流すことのできる巻線係数の次数と一致すると時間次数 $n=1$ となる滑り s で同期トルクを発生する。非同期トルクは固定子巻線に基本波以外の電流を流すことのできる空間次数であれば発生する。よって、(26)式第4項以降の磁束密度は大きさの大小はあるが、非同期トルクを発生していることになる。また、表1の回転子永久磁石も非同期トルクを発生する。

〈4・3〉 起磁力高調波と固定子スロット高調波の統一表現 表1に各種高調波について固定子座標および回転子座標における空間次数、時間次数の式を示す。なお、 q_s , q_r は各々固定子、回転子の一極あたりのスロット数、 l , v は高調波の次数を決定する階数である。高調波の回転方向は時間次数が空間次数と同じ符号の場合は正相、反対の場合は逆相回転である。表1から次のことがわかる。つまり、起磁力高調波の次数を表す式の中に含まれる相数 m とその階数 l はスロット高調波の一相あたりの固定子スロット数 q_s とその階数 v に対応している。このため、高調波次数

を表す式は2種類の高調波で同一形式となっており、大きさの決定法を除けばこの二つの高調波は同じ考え方で取扱ってよいことになる。

5. 等価インピーダンスの誘導

一相の固定子巻線の回路を考えてみる。その回路には図2に示すように電源電圧、モータの固定子巻線抵抗、そして、正相、逆相、様々な種類の誘導起電力が存在する。ただし、電源インピーダンスは無視する。ACモータの解析に用いる等価回路は、一般に電源の接続された固定子巻線に対する回路である。この電源回路に電源電圧の時間次数と等しい次数の誘導起電力が存在する場合、その電源電圧に対する位相関係が明らかでないと、回路に流れる電流を求めることはできない。大きさと位相関係を明らかにしているのが、誘導起電力を電流で割ることのできる等価インピーダンスである。ただし、割るべき電流は、誘導起電力と同じ周波数、相順でなければならない。以上の考え方から、任意の相順の等価インピーダンス（正相・逆相・零相等価インピーダンス）を解析的に求めることができる。

k 次空間調波、 n 次時間調波の場合の等価インピーダンスは以下に示すように求める。まず(15)式の誘導起電力を複素ベクトル表示で表す。

$$\begin{aligned} \vec{E}_{nk} = & \mp N_{kmp} r n \omega \frac{2}{\pi} \dot{B}_{gynk} \frac{\tau}{k} e^{j(k(\pi/\tau)x - k(u-1)x - (n/2))} \\ & \dots\dots\dots (50) \end{aligned}$$

図2 固定子巻線回路
Fig. 2. Circuit of stator winding.

表1 各種高調波の時間および空間次数
Table 1. Degree of space alternation and degree of time alternation for various harmonics.

高調波の種類	k	n	k'	n'
基本波	1	1	1	s
起磁力高調波	$2m_l \pm 1$	± 1	$2m_l \pm 1$	$\pm 1 - (1-s)(2m_l \pm 1)$
固定子スロット高調波	$2q_s v \pm 1$	± 1	$2q_s v \pm 1$	$\pm 1 - (1-s)(2q_s v \pm 1)$
回転子スロット高調波	$2q_r v \pm 1$	$\pm 1 + 2q_r v(1-s)$	$2q_r v \pm 1$	$\pm s$
回転子永久磁石高調波	v	$(1-s)v$	v	0

また、 n 次時間調波の固定子入力電流と、これに対応する起磁力分布との関係は(10)式より複素ベクトル表示で次のように表すことができる。

$$I_n = \pm \frac{\hat{F}_{nk}}{mN_{km}} e^{j\{k(\pi/\tau)x - n(u-1)x - (\pi/2)\}}, \dots (51)$$

上の電圧および電流の複素ベクトルはどちらも x に関して同じ項が現れている。しかし、それらは各式中に含まれている磁束密度および起磁力分布の複素ベクトル中の x に関する項と打消し合うものである。そこでギャップ部の磁束密度と起磁力分布の比から等価インピーダンスを決定することができる。

$$\frac{-\hat{E}_{nk}}{\hat{I}_n} = mN_{km}^2 p \tau n \omega \frac{2\tau}{\pi k} l \frac{\hat{B}_{gynk}}{\hat{F}_{nk}} e^{-j(u-1)(k-n)x} \dots (52)$$

もし、誘導起電力と電流の相順が等しい場合には、次のように簡単に表すことができる。

$$\hat{Z}_{nk} = mN_{km}^2 p \tau n \omega \frac{2\tau}{\pi k} l \frac{\hat{B}_{gynk}}{\hat{F}_{nk}} \dots (53)$$

上式が AC モータに共通な任意の相順に対する等価インピーダンス式である。

6. ま と め

一般に、負荷を含めた回転体が最も安定なエネルギー状態へ移行しようとする働きによってトルクが発生するわけであるが、本論では磁束密度と起磁力分布(電流分布)との間に働く力がモータの動作原理であるとしてとらえ解析を行っている。トルクは磁束密度と起磁力分布の空間次数が一致する場合に発生し、更に、時間次数が一致した場合に定常トルクが発生する。

本論文は特定のモータを対象としていないため、一般性を損なわないような簡単な仮定を用いて解析手順を紹介している。その過程において被解析諸量の位相関係に注意をはらっている。また、物理的な意味をよりよく理解できるように各式を表現したつもりである。以下に本解析の特徴をまとめておく。

(1) 正相または逆相電源の入力電流が流れた場合に各空間調波に対する巻線密度分布を考えて各調波の起磁力分布、そしてその巻線に誘導される起電力を示している。

(2) また、誘導電流等価リアクタンスを考えると、誘導電流によるギャップ磁束密度に及ぼす影響を簡単に表現できるようにして、解析を簡単に行えるようにした。

(3) 更に、ギャップ磁束密度の空間次数と時間次数からモータにどのようなトルクが発生するか簡単に

理解する方法を示している。

(4) 最後に空間および時間調波に対して、任意の相順の等価インピーダンス式を演繹している。この式は正相電源に対する等価インピーダンスはもちろん、逆相電源、零相電源に対する等価インピーダンスを表すものである。

終りに、本研究に関して、有益な討論を行った当研究室の栗原、久保田両氏に深く感謝します。

(平成元年 11 月 6 日受付、同 2 年 8 月 23 日再受付)

文 献

- (1) 市川・見城：「スロット高調波を考慮した表面導体形誘導機の等価回路」，電学論 B, 98, 409 (昭 53-5)
- (2) 坪井・加藤：「誘導電動機の回転子スロット数によるトルク特性」，同上 B, 99, 745 (昭 54-11)
- (3) 穴澤・加賀・井上・藤原：「かご形誘導電動機の高調波非同期トルクの解析」，同上 B, 102, 637 (昭 57-10)
- (4) 石崎・小野寺・斎藤・三村：「かご形誘導機の高調波非同期トルクに影響する要因の定量的検討」，同上 B, 106, 511 (昭 61-6)
- (5) 例えば、湧井・富田：「ヒステリシス電動機の特性に及ぼす高調波磁束密度の影響」，同上 B, 102, 25 (昭 57-1)
- (6) 宮入・片岡：「ヒステリシス電動機の基本等価回路」，電学誌, 85, 1740 (昭 40-10)
- (7) 石崎・多宮・斎藤：「三相永久磁石電動機の同期特性算定法」，電学論 B, 106, 347 (昭 61-4)
- (8) R. L. Russell & K. H. Norsworthy: "Eddy Currents and Wall Losses in Screened-Rotor Induction Motors", IEE Paper, No. 2525U, 163 (1958)

付 録

以下に、ヒステリシスモータの場合について、ギャップ磁束密度と固定子起磁力分布の関係式を誘導する。鉄心歯部およびギャップ部は y 方向成分の磁束のみが存在するものとする。鉄心コア部およびリング支持部は x 方向に磁束が流れると考える。回転子リング部は主に x 方向に磁束が存在するが、リング支持部との関係を求めるため y 方向を無視しないでおく。回転子誘導電流が流れていない場合、回転方向の

付図 1 ヒステリシスモータの解析モデル
app. Fig. 1. Analysis model of hysteresis motor.

微小間隔 Δx についてアンペアの周回積分を反時計回り、そしてその微小体積における磁束発散定理を適用すると(付1)～(付6)式が得られる。ここで初めて使用された記号は付図1に示す。磁界と磁束密度との間の関係は、回転子リング材料に用いられているヒステリシス材料については、磁界と磁束密度の間に位相差を与える複素透磁率で表す。固定子歯部はすべて鉄心としている。

$$\begin{aligned} \dot{F}_{11}\Delta x = & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{B}_{\theta v11}}{\mu_0} \right) \Delta x \delta + \frac{\dot{B}_{rx11}}{\dot{\mu}_r} \Delta x \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\dot{B}_{\theta l11}}{\mu_t} \right) \Delta x l_t - \frac{\dot{B}_{cx11}}{\mu_c} \Delta x \end{aligned} \quad \text{.....(付1)}$$

$$0 = \frac{\dot{B}_{sx11}}{\mu_s} \Delta x - \frac{\dot{B}_{rx11}}{\dot{\mu}_r} \Delta x \quad \text{.....(付2)}$$

$$0 = \frac{\partial \dot{B}_{cx11}}{\partial x} \Delta x l_t - \dot{B}_{\theta v11} \Delta x \quad \text{.....(付3)}$$

$$0 = \dot{B}_{\theta v11} \Delta x - \dot{B}_{\theta l11} \Delta x \quad \text{.....(付4)}$$

$$0 = \dot{B}_{\theta v11} \Delta x + \frac{\partial \dot{B}_{rx11}}{\partial x} \Delta x l_r - \dot{B}_{\theta l11} \Delta x \quad \text{.....(付5)}$$

$$0 = \dot{B}_{\theta l11} \Delta x + \frac{\partial \dot{B}_{sx11}}{\partial x} \Delta x l_s \quad \text{.....(付6)}$$

(付2)～(付6)式を整理して(付1)式に代入し、 $\dot{B}_{\theta v11}$ について整理すると次式が得られる。

$$\dot{B}_{\theta v11} = \frac{\dot{F}_{11}}{\dot{R}_{G11} + \dot{R}_{R11} + \dot{R}_{S11}} \quad \text{.....(付7)}$$

ここに、

$$\dot{R}_{G11} = -j \frac{\pi}{\tau} \frac{\delta}{\mu_0} \quad \text{.....(付8)}$$

$$\dot{R}_{R11} = -j \frac{\tau}{\pi} \left[\frac{1}{\dot{\mu}_r l_r + \mu_s l_s} \right] \quad \text{.....(付9)}$$

$$\dot{R}_{S11} = -j \left[\frac{\pi}{\tau} \frac{l_t}{\mu_t} + \frac{\tau}{\pi} \frac{1}{\mu_c l_c} \right] \quad \text{.....(付10)}$$

である。

スロットの影響を考慮した場合、基本波の単位長さあたりのリラクタンスは

$$\dot{R}_{G11} = -j \frac{\pi}{\tau} \frac{\delta}{\mu_0} \frac{1}{a_0} \quad \text{.....(付11)}$$

となる。

堀井 龍夫 (正員)

昭和27年10月6日生。52年3月茨城大学工学部電気工学科卒業。同年4月茨城大学工業短期大学部電気工学科助手、平成2年10月同大学工学部システム工学科に転任、現在に至る。回転機およびその高調波に関する研究に従事。IEEE 会員。

湧井 源二郎 (正員)

昭和4年6月21日生。28年3月東北大学工学部電気工学科卒業。同年4月原電気(株)入社。32年岩手大学工学部電気工学科助手、46年2月同教授。48年4月茨城大学工学部電気工学科に配置換えとなり、平成2年10月改組に伴い電気電子工学科に所属し、現在に至る。工学博士。交流電動機および磁気ヒステリシス現象の研究に従事。日本応用磁気学会、計測自動制御学会、IEEE 会員。