Boost 形および Buck-Boost 形 DC-DC 変換器に対する新制御方式

正 員 川 崎 直 哉 (上越教育大)

正 員 野 村 弘 (高知高専)

A New Control Law of Boost and Buck-Boost DC-DC Converters

Naoya Kawasaki, Member (Joetsu University of Education), Hiroshi Nomura, Member (Kochi National College of Technology)

It is well known that the state-space averaging models of the boost and the buck-boost converters are bilinear systems. The stability and output regulation problems of bilinear systems are so complicated that most previous works which deal with the above two types of converter in the state space are confined to the analysis of linear approximated systems (small signal models). However, any control law for small signal model does not generally guarantee the global stability, but the partial stability of the system.

A new control law based on the bilinear large signal model is proposed for achieving output regulation of the boost and the buck-boost converters. The control law is derived from directly applying the Lyapunov stability theory to the bilinear large signal model. The actual realization of this control law might have some difficulties, because it is given as a solution of differential equations with respect to the state and input variables. However the closed loop system with this control law is expected to possess the robust stability achieving an excellent output regulation for large changes of reference, load and source voltage from the theoretical point of view. Some desirable features of the new control law are demonstrated by the numerical simulation.

キーワード：Boost 形・Buck-Boost 形コンバータ，双線形系，出力レギュレーション，リアプノフの安定化法

1. はじめに

近年，高速半導体スイッチング素子の発達は目覚ましいものがあり，これらを用いた半導体電力変換器は小形・軽量でかつ高品質の電力交換を可能にしている⁽¹⁾。なかでも DC-DC 変換器に関しては，いろいろ実用的な回路構成が提案され，その動作特性や制御方式について検討されている。Boost 形および Buck-Boost 形の DC-DC 変換器はその代表的なものであり，PWM 方式の制御方法に関して数多く提案が行われている。Boost 形および Buck-Boost 形 DC-DC 変換器は，State-Space Averaging 法⁽²⁾を用いて表現さ

れる状態方程式がいずれも双線形系となるため，実際の状態変数のまま (Large Signal Model) での検討^{(3)~(5)}が難しく，平衡状態からの微小変動分が満足すべき線形近似システム (Small Signal Model) に対して検討を行っているものがほとんどである。線形近似システムに対する結果は，平衡状態の近傍での安定性についてのみ考慮したものであるから，目標値の大きな変動などにより平衡状態が大きく変化する場合には，安定性が損われることもあり得る。また微小変動分に対する双線形近似システムに関して安定性を議論したものもあるが⁽⁶⁾，これもある近傍での安定性を保証しているにすぎない。

双線形システムの安定化問題に関しては、これまでに理論的な面から、幾つかの報告がなされている⁽⁷⁾⁻⁽¹⁰⁾。しかし、これらはいずれも平衡点 $x=0$ に対する安定化問題を扱っているため、DC-DC 変換器のように出力をある目標値と一致させるようないわゆる出力レギュレーションの実現にはそのまま適用できない。それは例えば出力レギュレーションを行うために、目標値と出力との誤差を状態変数に組込んだ拡大系を考えた場合、線形システムでは拡大系がやはり線形系となるのに対して、双線形系では拡大系が双線形系とはならないからである。

本論文では、双線形系として定式化される Boost 形および Buck-Boost 形の二つの DC-DC 変換器に対して、状態空間表現のままで検討を行い、新しい制御則を導いている。具体的には、State-Space Averaging 法を用いて表現される双線形系に対し、線形近似などを行うことなく、Large Signal Model としての出力レギュレーションを考え、安定論の立場から非線形フィードバック則を求めている。ここで得られる制御則は従来の制御方式と比較して幾分複雑ではある

図 1 Boost 形コンバータシステム
Fig. 1. Boost converter system.

図 2 Buck-Boost 形コンバータシステム
Fig. 2. Buck-Boost converter system.

図 3 スイッチングの時比率
Fig. 3. Time ratio of switching mode.

が、広い安定性が保証されているため、今後の検討次第では実用面での有効性も十分期待される。

2. 問題の定式化と拡大システム

図 1 は本論文で検討する Boost 形 DC-DC 変換器にここで提案する制御方式を施した場合の基本回路であり、図 2 は Buck-Boost 形 DC-DC 変換器の場合の基本回路である。 E は直流電源、 r はインダクタンス L の直流抵抗、 R_L は負荷抵抗を表すものとする。図 3 に示すようにスイッチングの周期を T_s 、トランジスタがオン（モード 1 と呼ぶ）の期間を dT_s 、トランジスタがオフ（モード 2 と呼ぶ）の期間を $(1-d)T_s$ とすると（ただし、Duty 比 d は $0 \leq d < 1$ を満たす）、この二つの動作モードの平均的な状態が満足するであろう方程式は、 i_L および v_c が連続であるとする State-Space Averaging 法を用いて次のように表される。

・ Boost 形 DC-DC 変換器

$$\dot{x} = A_0 x + d A_1 x + g \quad \dots\dots\dots (1)$$

・ Buck-Boost 形 DC-DC 変換器

$$\dot{x} = A_0 x + d A_1 x + g d \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 A_0 、 A_1 、 g 、および状態変数 x はそれぞれ

$$A_0 = \begin{bmatrix} -r/L & -1/L \\ 1/C & -1/CR_L \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$g = \begin{bmatrix} E/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で与えられる。

本論文では図 1 および図 2 のシステムの出力電圧 v_o を目標値 r_{ef} （直流電圧）に一致させるような制御則について検討する。すなわちシステム(1)およびシステム(2)の出力レギュレーションを達成するような制御則の構成を考える。システム(1)は入力 (Duty 比) d に関する線形項がない双線形システムとなっており、またシステム(2)は入力 d に関する線形項を持った双線形システムとなっている。(1)式および(2)式で $d=u$ と置き、出力方程式も加えてあらたに記すと、結局ここでは

・ Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 1)

$$\dot{x} = A_0 x + u A_1 x + g \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$y = Cx = [0 \quad 1]x \quad \dots\dots\dots (6)$$

・ Buck-Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 2)

$$\dot{x} = A_0 x + u A_1 x + g u \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$y = Cx = [0 \quad 1]x \quad \dots\dots\dots (8)$$

で表される二つのシステムの出力 y をステップ状の

目標値 r_{ef} に一致させるような制御入力 u を $0 \leq u < 1$ の範囲で求める問題に帰着される。

次に、出力レギュレーションのための拡大システムの定式化を考える。すなわち、出力を目標値に追従させるため、目標値 r_{ef} と出力 y との偏差 e を

$$e = y - r_{ef} = Cx - r_{ef} = x_2 - r_{ef} \quad \dots\dots\dots (9)$$

として、 e を状態変数に含めた拡大系をつくると $\dot{E} = 0$, $\dot{r}_{ef} = 0$ およびシステム 1 では (5), (6) より, またシステム 2 では (7), (8) より次のようになる。

・Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 1)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + uA_1 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1x \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \quad \dots\dots\dots (10)$$

・Buck-Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 2)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 + uA_1 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_1x + g \\ 0 \end{bmatrix} \dot{u} \quad \dots\dots\dots (11)$$

従って、ここで $X^T \triangleq [X_1 \ X_2 \ X_3] \triangleq [\dot{x} \ e]$, $U \triangleq \dot{u}$ とおくと (10), (11) 式は形式的に

$$\dot{X} = A(u)X + b(x)U \quad \dots\dots\dots (12)$$

と表すことができる。ただし、 $A(u)$, $b(x)$ は、それぞれ (10) 式または (11) 式の係数行列を表すものとする。ここで $A(u)$ はシステム 1 およびシステム 2 の両者で共通であるが、 $b(x)$ はシステム 1 とシステム 2 では異なっていることに注意する。

以上のことからシステム (12) を漸近安定にすることができれば、 $X \rightarrow 0$ より $e \rightarrow 0$, すなわち $y \rightarrow r_{ef}$ となるため、ここではシステム (12) を漸近安定にする制御則について検討する。

3. 拡大システムの安定化

本論文では入力 u (すなわち Duty 比 d) に対して一般性を失わない自然な次の仮定を置く。

(仮定) 実際には出力電圧 $v_c (= x_2)$ はある範囲内で調整できればよく、そのため入力 u もある変動範囲内に制限されると考えてよい。ここでは u の変動範囲の上限として $u_m (< 1)$ を考える。ただし、 u_m は

$$u_m < \mu = 1 - \sqrt{r/R_L} < 1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

を満たすように選ばれているものとする (理由は後述)。従って u は $0 \leq u \leq u_m < 1$ の範囲内で変動するものとして検討を行う。また当然のことながら、出力 $y(u)$ の目標値 r_{ef} は $u \leq u_m$ で達成できる、すなわち $r_{ef} < y(u_m)$ を満足するものとする。

以上の仮定のもとでシステム (12) を安定にする制御

則を求める。リアプノフの安定化法の考えから、次のような正値関数 $V(X)$ を考える。いま行列 $L_r \in R^{3 \times 3}$ を

$$L_r = \begin{bmatrix} \sqrt{L} & 0 & k_1 L \\ 0 & \sqrt{C} & \frac{k_1 r C}{1-u} \\ 0 & 0 & k_1 \left\{ (1-u) + \frac{r}{(1-u)R_L} \right\} \end{bmatrix} \\ \triangleq [l_1 \ l_2 \ l_3] \quad \dots\dots\dots (14)$$

とし、この L_r により正定対称行列 $P(u)$ を

$$P(u) = \frac{1}{2} L_r L_r^T \quad \dots\dots\dots (15)$$

と定めると、上の仮定より $P(u) > 0$ となることがわかる。ただし、 k_1 は任意の正数とし、また l_3 は

$$l_3^T A(u) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

を満足する u に依存するベクトルとなっていることに注意する。このとき正値関数 $V(X, u)$ を

$$V(X, u) = X^T P(u) X > 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

と構成すると、 $V(X, u)$ に対して補題 1 が成立する。

〔補題 1〕 正数 k_1 が任意に与えられているものとする。このとき $0 \leq u \leq u_m < 1$ を満足する任意の u に対して

$$\delta_1 \|X\|^2 \leq V(X, u) \leq \delta_2 \|X\|^2 \quad \dots\dots\dots (18)$$

を満足する u に依存しない正数 δ_1 , δ_2 が存在する。

(証明) 正定対称行列 P の最小固有値を $\lambda_{\min}(P) (> 0)$, 最大固有値を $\lambda_{\max}(P) (> 0)$ とすると、任意の X に対し $\lambda_{\min}(P) \|X\|^2 \leq X^T P X \leq \lambda_{\max}(P) \|X\|^2$ となることから、 $\delta_1 \leq \lambda_{\min}(P)$, $\lambda_{\max}(P) \leq \delta_2$ となる u に依存しない正数 δ_1 , δ_2 が存在することを示せばよい。(14) 式の L_r の各要素を l_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) と表せば、 $0 \leq u \leq u_m < 1$ であるから任意の正数 k_1 ($< \infty$) に対し、 $0 < \gamma_1 \leq l_{i3} \leq \gamma_2 < \infty$ ($i = 1, 2, 3$) を満たす u に依存しない γ_1 , γ_2 が存在する。従って行列 $P(u)$ の trace および行列式に関しても、

$$0 < \zeta_1 \leq \text{trace}(P) = \sum_{i,j=1}^3 (l_{ij})^2 \leq \zeta_2 < \infty \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$0 < \eta_1 \leq \det(P) = \prod_{i=1}^3 (l_{ii})^2 \leq \eta_2 < \infty \quad \dots\dots\dots (20)$$

を満たす u に依存しない ζ_1 , ζ_2 および η_1 , η_2 が存在するのは明らかである。trace(P) が行列 P のすべての固有値の和、det(P) が P のすべての固有値の積に等しく、 P の固有値はすべて正の実数であることを考慮すると、(18) 式を満足する u に依存しない正数 δ_1 , δ_2 が存在することがわかる。□

さて、リアプノフの安定化法の考えから、前で求めたスカラー関数 $V(X, u)$ のシステム (12) の解に沿った

時間微分を考える。もしこの時間微分を負定とすることができれば〔補題 1〕を考慮すると、システム (12) を漸近安定化することが可能となる。\$V(X, u)\$ のシステム (12) の解に沿った時間微分は、

$$\begin{aligned}\dot{V}(X, u) &= \dot{X}^T P X + X^T P \dot{X} + X^T \frac{\partial P}{\partial u} X \dot{u} \\ &= X^T \{ P A(u) + A^T(u) P \} X \\ &\quad + U \left\{ X^T P b(x) + b^T(x) P X \right. \\ &\quad \left. + X^T \frac{\partial P}{\partial u} X \right\} \\ &\triangleq g(X, u) + U f(X, x, u) \quad \dots\dots\dots (21)\end{aligned}$$

となる。上式の \$g(X, u)\$ は (16) 式を考慮すると

$$\begin{aligned}g(X, u) &= X^T \{ P A(u) + A^T(u) P \} X \\ &= X^T \text{diag}(-r \quad -1/R_L \quad 0) X \leq 0 \quad \dots\dots\dots (22)\end{aligned}$$

となり、実際は \$u\$ に依存しない \$g(X)\$ と表すことができ、任意の \$X\$ に対し非正となる。ただし \$\text{diag}(\ast \ast)\$ は対角要素が \$\ast \ast\$ の対角行列を表す。また、\$f(X, x, u)\$ は

$$\begin{aligned}f(X, x, u) &= X^T \text{diag}(L \quad C \quad 0) b(x) \\ &\quad + X^T l_3 \left\{ l_3^T b(x) + \frac{\partial l_3^T}{\partial u} X \right\} \quad \dots\dots\dots (23)\end{aligned}$$

と表すことができる。(22)式を考慮すると、(21)式で \$U\$ を任意の正数 \$m\$ を用いて (24) 式のように選べば、(25)式が成り立ち、(21)式右辺全体を少なくとも非正とすることができるため、システム (12) の大域的漸近安定化を実現できると期待される。

$$\begin{aligned}U &= -m f(X, x, u) \quad \dots\dots\dots (24) \\ U f(X, x, u) &= -m \{ f(X, x, u) \}^2 \leq 0 \quad \dots\dots\dots (25)\end{aligned}$$

4. 制御則の構成

〈4・1〉 \$u\$ が \$0 \leq u \leq u_m < 1\$ を満たす場合の制御則

上で述べたことより、入力 \$u\$ が \$0 \leq u \leq u_m < 1\$ を満たす場合には、\$U\$ を (25) 式のように選べば \$\dot{V}(X, u)\$ を少なくとも非正にできることがわかった。ここでは、まず Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 1) の場合について検討し、その後 Buck-Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 2) についても全く同様に検討できることを示す。システム 1 の場合に具体的に \$f(X, x, u)\$ を求めると、(23)式で

$$\begin{aligned}X^T \text{diag}(L \quad C \quad 0) b(x) &= X_1 x_2 - X_2 x_1 \\ &\triangleq f_1(X, x) \quad \dots\dots\dots (26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X^T l_3 &= k_1 \left(L X_1 + \frac{rC}{1-u} X_2 + \left\{ (1-u) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{r}{(1-u)R_L} \right\} X_3 \right) \\ &\triangleq k_1 f_2(X, u) \quad \dots\dots\dots (27)\end{aligned}$$

であり、また

$$l_3^T b(x) = k_1 \left(x_2 - \frac{r}{1-u} x_1 \right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_3^T}{\partial u} X &= k_1 \left(\frac{rC}{(1-u)^2} X_2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -1 + \frac{r}{(1-u)^2 R_L} \right\} X_3 \right) \quad \dots\dots\dots (29)\end{aligned}$$

であること、および \$[X_1 \ X_2 \ X_3] = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ e]\$、(5)、(6)、(9) 式の関係を用いると、

$$\begin{aligned}l_3^T b(x) + \frac{\partial l_3^T}{\partial u} X &= k_1 \left\{ r_{ef} + \frac{r}{(1-u)^2} (C X_2 - (1-u) x_1 + \frac{X_3}{R_L}) \right\} \\ &= k_1 \left\{ r_{ef} - \frac{r}{(1-u)^2 R_L} r_{ef} \right\} \\ &\triangleq k_1 f_3(u) \quad \dots\dots\dots (30)\end{aligned}$$

となることから、\$f(X, x, u)\$ は \$f_1(X, x)\$、\$f_2(X, u)\$、\$f_3(u)\$ を用いて

$$f(X, x, u) = f_1(X, x) + k_1^2 f_2(X, u) f_3(u) \quad \dots\dots\dots (31)$$

と表すことができる。

以上のことから、\$U\$ を前章の (24) 式のように構成した場合の \$\dot{V}(X, u)\$ に関して次の補題 2 が成り立つ。

〔補題 2〕 入力 \$u\$ が仮定を満足しているものとする。このとき \$U\$ を任意の正数 \$m\$ を用いて (24) 式のように構成したとき、(21) 式の \$\dot{V}(X, u)\$ は任意の \$X (\neq 0)\$ に対して

$$\dot{V}(X, u) < 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

を満足する。

(証 明) \$U\$ を (24) 式のように選べば、\$\dot{V}(X, u) = g(X, u) - m \{ f(X, x, u) \}^2\$ となるが、(22) 式より \$g(X, u) \leq 0\$ であり、また明らかに \$-m \{ f(X, x, u) \}^2 \leq 0\$ であるため、\$g(X, u)\$ と \$f(X, x, u)\$ が \$X = 0\$ 以外で同時に 0 にならないことを示せばよい。部分空間 \$\Omega_g\$、\$\Omega_f\$ を \$\Omega_g = \{ X | g(X, u) = 0 \}\$、\$\Omega_f = \{ X | f(X, x, u) = 0 \}\$ とすると、任意の \$X_g \in \Omega_g\$ は (22) より \$X_g = [0, 0, X_3]\$ の形に限られるが、この \$X_g\$ に対しては (26)、(27) 式から \$f_1(X_g, x) = 0\$、\$f_2(X_g, u) \neq 0\$ が成り立ち、また (30) 式から \$u\$ が仮定を満足していれば \$f_3(u) > 0\$ となることがわかる。以上より \$\Omega_g \cap \Omega_f = \{0\}\$ が示され、補題が成り立つ。□

ここで、補題 1, 2 およびリアプノフの安定化法の考えから、 $U(=\dot{u})$ を (24) 式のように構成する、すなわち入力 u を微分方程式

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -mf_1(X, x) - mk_1^2 f_3(u) f_2(X, u) \\ &= -m(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) \\ &\quad - k \left\{ r_{ef} - \frac{r}{(1-u)^2 R_L} r_{ef} \right\} \\ &\quad \times \left\{ L\dot{x}_1 + \frac{rC}{1-u} \dot{x}_2 \right. \\ &\quad \left. + \left((1-u) + \frac{r}{(1-u)R_L} \right) e \right\} \dots\dots\dots (33)\end{aligned}$$

を満たすように構成することにより、次の補題 3 を得る。ただし、 $k = mk_1^2$ とし、 m, k_1 が任意の正数であることから k も任意の正数として選ぶことができる。

〔補題 3〕(厳密解) (33) 式を満足するように u を構成するものとする。このとき、もし u が $0 \leq u \leq u_m < 1$ を満たしている場合には、システム (12) の大域的漸近安定化を実現できる。

(33) 式は u が満足すべき微分方程式であるが、その形がやや煩雑である。また、方程式の係数が負荷抵抗 R_L と陽に関係しているが、 R_L が負荷に応じていろいろと変動し、しかもその変動がほとんどの場合未知であることを考え合せると、(33) 式は実用面から見て若干の問題がある。ところで r はインダクタンスの直流抵抗分であるがこれは一般に極めて小さいと考えられるため、 $r \approx 0$ とみなしても実用的にはそれほど問題がないと思われる。そこで (33) 式で $r=0$ と置いた

$$\dot{u} = -m(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) - k r_{ef} \{ L\dot{x}_1 + (1-u)e \} \dots\dots\dots (34)$$

を満足する u に関しても、同様に大域的漸近安定化を実現できると考えられる。更に、 k が任意の正数であり、 r_{ef} が一定 (直流電圧) であることから、 $k r_{ef}$ 全体を任意の正数 $\bar{k}$ とみなして置き換えれば (34) 式は

$$\dot{u} = -m(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) \bar{k} \{ L\dot{x}_1 + (1-u)e \} \dots\dots\dots (35)$$

とみることもできる。以上より次の補題を得る。

〔補題 4〕(近似解) (34) 式または (35) 式を満足するように u を構成するものとする。このとき、もし u が $0 \leq u \leq u_m < 1$ を満たしている場合には、この u は補題 3 の漸近安定化入力の一つの近似解となっている。

(34) 式[(35)式]は係数に R_L を含まず、また形も比較的簡単であることから、補題 4 は実用的に有効であると考えられる。(34) 式は (35) 式に比べて、目標値

r_{ef} が陽な形で関係してくる分、 r_{ef} の変化に対しては速やかに追従できると期待される。

〈4・2〉 安定化を実現する制御則の構成 補題 3,

4 では、 u が $0 \leq u \leq u_m < 1$ を満たしている場合に限って安定性が保証されているわけであるが、 u は微分方程式の解として与えられることから、場合によっては u がその範囲内におさまらないことも考えられる。この場合は入力の大きさに制限がある安定化問題によく用いられる方法、すなわち $u < 0$ の場合は $u=0$ を加え、 $u > u_m$ の場合は $u=u_m$ を加えることにより、全体として安定化を図ることができる。これは u に非線形飽和要素を挿入したことに相当している。細かい議論は省略するが、簡単にこのことについて検討する。

まず u が定数入力、すなわち $u=u_0$ (一定) のシステム (5) について考える。この場合ではすべての u_0 に対し

$$\operatorname{Re} \lambda(A_0 + u_0 A_1) < 0 \dots\dots\dots (36)$$

が成り立つことがわかる。ただし、 $\operatorname{Re} \lambda(*)$ で行列 $*$ の固有値の実数部を表すものとする。このことは、電源電圧 E を 0 とするといかなる u_0 に対しても (5) のすべての状態変数は 0 に漸近する、すなわち (5) 式で $g=0$ としたシステムは漸近安定になるということからも明らかである。以上のことから、 $u=u_0, E \neq 0$ のとき出力 y は次の y_0 に漸近することが知られている。

$$\begin{aligned}y_0 &= -C(A_0 + u_0 A_1)^{-1} g \\ &= \frac{(1-u_0)R_L E}{r + (1-u_0)^2 R_L} \doteq \frac{E}{(1-u_0)} \dots\dots\dots (37)\end{aligned}$$

上式の y_0 と u_0 の関係は図 4 のようになる。 $u_0 = \mu = 1 - \sqrt{r/R_L}$ のとき最大値 $y_0 = y(\mu) = (E/2)\sqrt{R_L/r}$ をとることがわかる。従って、 u は $u < 1 - \sqrt{r/R_L}$ を満足する範囲で選ばれるべきであるが、この条件が実は前述の仮定の (13) 式となっている。このことより前述の

図 4 入力の変化と出力電圧 (Boost 形変換器)
Fig.4. Output voltage for changes of input.

仮定は無理のない一般的なものであると理解できる。

さて、微分方程式の解 u が $u < 0$ の場合は $u = 0$ を加え、同様に $u > u_m$ の場合は $u = u_m$ を加えたとき、微分方程式の解 u に関して次の補題が成り立つ。

〔補題 5〕 微分方程式 (33) または (34) 式 [(35) 式] の解 u が $u < 0$ の場合は $u = 0$ をシステム (5) に加え続け、同様に $u > u_m$ の場合は $u = u_m$ を (5) に加え続け、それ以外は解 u をそのまま (5) に加えるものとする。このとき微分方程式の解 u は $0 \leq u < u_m$ を満足するある値に漸近する。

(略 証) いま $u > u_m$ となった場合に $u = u_m$ をシステム (5) に加え続け、十分時間が経過したとする。ただし簡単のため $r = 0$ として考える。(36) 式より $\dot{x}_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$) となるため (34) 式の u は、

$$\dot{u} \rightarrow -kr_{ef}(1-u)e \dots\dots\dots (38)$$

に漸近するはずである。仮定より $y(u_m) > r_{ef}$ であるから (38) 式で $e > 0$ となっており、従って $\dot{u}$ は $\dot{u} < 0$ となっていることがわかる。このことは $u = u_m$ が加わり続けた場合、ある時刻で必ず (34) 式の u が減少する、すなわち $u_m > u$ となることを意味している。 $u_m > u$ が満足されれば、(34) 式の u をそのまま加えることにより、システムの漸近安定化ができるわけであるから、 u も $0 \leq u < u_m$ を満足するある値に漸近する。 $u < 0$ の場合も $\dot{u}$ の符号が逆になるだけで、同様である。□

補題 3, 5 から Boost 形変換器 (システム 1) の出力レギュレーションを達成する u は [定理 1] で与えられる。

〔定理 1〕 (Boost 厳密制御則) $\phi(u)$ を以下に示すような関数とする。

$$\phi(u) = \begin{cases} u_m & (u > u_m \text{ のとき}) \quad \dots\dots (39) \\ u & (0 \leq u \leq u_m \text{ のとき}) \quad \dots\dots (40) \\ 0 & (u < 0 \text{ のとき}) \quad \dots\dots (41) \end{cases}$$

このとき Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 1) の出力を目標値 r_{ef} に一致させるような制御則 $u = u^*$ は、任意の正数 m, k に対する (33) 式を満足する u を用いて、

$$u^* = \phi(u) \dots\dots\dots (42)$$

と与えられる。

上の定理は負荷抵抗 R_L の値が既知のときは有効である。 R_L の値が未知であったり、頻繁に変動する場合には補題 4 と補題 5 から得られる次の系 1 が有効である。

〔系 1〕 (Boost 近似制御則 1) (34) 式または (35) 式を満足する u を用いて、定理 1 と同様に構成

した制御則 $u = u^*$ は定理 1 で与えた制御則の一つの近似解となっている。

系 1 の制御則は負荷抵抗 R_L に依存しないで決定される利点がある。従来行われているシステムを線形近似して得られる制御則と比較すると、線形近似した場合では負荷抵抗 R_L が変わるとに線形近似のための平衡状態が変化する。そのためある負荷抵抗 R_L に対する線形近似モデルは、 R_L が大きく変化し別の R_L となった場合には、線形近似モデルそのものももとのシステムからかけ離れたものになる可能性があるため、あまり大きな R_L の変化には対処できない。 R_L の変化をいちいち考慮して制御則を決定することは現実的ではないことを考えれば、系 1 の制御則が有効であると期待される。ただし、系 1 も $r = 0$ とした近似解であるため、 r の大きさが無視できないような場合には大域的な漸近安定性は保証されていない点に注意する必要がある。

ところで、(34) 式の m, k は任意の正数であるが、いま $m \rightarrow 0$ と考えると (34) 式は更に (43) 式のように近似することができ、このことから次の系 2 を得る。

$$\dot{u} = -kr_{ef}\{L\dot{x}_1 + (1-u)e\} \dots\dots\dots (43)$$

〔系 2〕 (Boost 近似制御則 2) (43) 式を満足する u を用いて、定理 1 と同様に構成した制御則 $u = u^*$ は、定理 1 で与えた制御則の一つの近似解となっている。

系 2 の制御則は構成が容易だが、かなり大ざっぱな近似であることや使用できる設計パラメータが一つであることなどマイナス面も少なくないため、適用の際には対象システムとの整合性に負うところが大きい。また同様な結果が (35) 式に関しても当然成り立つ。

これまでは u を求めるには、状態変数の微分情報が必要であったが、正確な微分が得にくいなどの理由から、微分を必要としないで入力 u を構成できれば都合の良い場合もあると思われる。そのためには (5) 式の関係をそれぞれ u の微分方程式の右辺に代入し、状態変数の微分を消去すればよい。例えば、(43) 式から $\dot{x}_1$ を消去すると

$$\dot{u} = kr_{ef}\{-r_{ef}u + r_{ef} - (E - rx_1)\} \dots\dots (44)$$

となる。上式は電源電圧 E からインダクタンスの直流抵抗による電位降下分 rx_1 を引いた実質の入力側電圧である $(E - rx_1)$ と出力電圧の目標値 r_{ef} との差 $r_{ef} - (E - rx_1)$ が、外部からの強制項として加わった u に関する線形微分方程式になっている。 $r_{ef} - (E - rx_1)$ の大きさ (Boost コンバータでは回路中に E と L が直列に入ってくるため、 L は実質これだけの

昇圧を行う)に応じて u の挙動が決定されることは、 r_{ef} が大きい場合または E が小さい場合は u が大きくなるという自然な結果と良い対応を示している。以上から次の系が得られる。

〔系 3〕(Boost 近似制御則 3) (44) 式を (43) 式の代わりに用いても、系 2 が成立する。

(注 1) (33), (34) 式に対しても上と同様に状態変数の微分項を消去することは可能である。しかし、その結果負荷抵抗 R_L が方程式の係数に陽が現れるため、 R_L が既知以外の場合には有効ではない。

各状態がほぼ定常状態に近づき、入力 u もほぼ一定 $u=u_0$ が加わっていると考えると、(43) 式で $u=u_0$ を代入し両辺を積分することにより (45) 式を得る。

$$u = -kr_{ef}\{Lx_1 + (1-u_0)\int_0^t edt + C_0\} \cdots (45)$$

これは線形近似システムを用いて検討したとき一般的に得られる制御則に相当し、状態フィードバックと偏差の積分との和の形となっている。その意味からも、ここで提案している制御方式は興味深いものとなっている。

〈4・3〉 Buck-Boost 形変換器に対する制御則

Boost 形変換器 (システム 1) と Buck-Boost 形変換器 (システム 2) では、(10)~(12) 式から、 $b(x)$ のみが異なるだけで同様に検討できる。詳細は省略するが (33) 式に相当する関係は、(33) 式右辺にわずかな項 (アンダーライン部分) が加わるだけで、以下のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -m\{f_1(X, x) + \dot{x}_1 E\} \\ & -k\{f_3(u) + \underline{E}\}f_2(X, u) \cdots \cdots (46) \end{aligned}$$

ただし、 $f_1(X, x)$, $f_2(X, u)$, $f_3(u)$ は (33) 式と同様とする。また入力に対して Boost 形変換器 (システム 1) の場合と同様な仮定が成り立っているものとする。このとき定理 1 に対応して以下の定理が成り立つ。

〔定理 2〕(Buck-Boost 厳密制御則) $\psi(u)$ を (39)~(41) 式で定義した関数とする。このとき Buck-Boost 形 DC-DC 変換器 (システム 2) の出力を目標値 r_{ef} に一致させるような制御則 $u=u^*$ は、任意の正数 m, k に対する (46) 式を満足する u を用いて、

$$u^* = \psi(u) \cdots \cdots (47)$$

と与えられる。

(注 2) 入力の上限 u_m は、システム 2 の場合は (13) 式で与えた u_m より若干大きくとることが可能であるが ($\mu=1-\{\sqrt{r}/(\sqrt{r}+\sqrt{r+R_L})\}$)、ここではシステム 2 の場合も (13) 式を満足するものと仮定する。

また、(34) 式に相当する (48) 式から次の系 4 を得

る。

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -m(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1 + \dot{x}_1 E) \\ & -k(r_{ef} + \underline{E})\{L\dot{x}_1 + (1-u)e\} \cdots \cdots (48) \end{aligned}$$

〔系 4〕(Buck-Boost 近似制御則 1) (48) 式を満足する u を用いて、定理 2 と同様に構成した制御則 $u=u^*$ は、定理 2 で与えた制御則の一つの近似解となっている。

更に、(43), (44) 式に相当する (49), (50) 式を用いて系 5, 系 6 を得る。

$$\begin{aligned} \dot{u} = & -k(r_{ef} + \underline{E})\{L\dot{x}_1 + (1-u)e\} \cdots \cdots (49) \\ \dot{u} = & k(r_{ef} + \underline{E})\{-(r_{ef} + \underline{E})u + r_{ef} + r x_1\} \\ & \cdots \cdots (50) \end{aligned}$$

〔系 5〕(Buck-Boost 近似制御則 2) (49) 式を満足する u を用いて、定理 2 と同様に構成した制御則 $u=u^*$ は、定理 2 で与えた制御則の一つの近似解となっている。

〔系 6〕(Buck-Boost 近似制御則 3) (50) 式を (49) 式の代わりに用いても、系 5 が成立する。

その他、上述のシステム 1 に関する議論は、システム 2 についても同様に成立する。

5. 数 値 例

ここでは Boost 形 DC-DC 変換器に対して、提案した安定化法の有効性を計算機シミュレーションによって示そう。具体的には、実用的な見地から定理 1 (Boost 厳密制御則) の適用はやめ、系 1 (Boost 近似制御則 1) または系 2 (Boost 近似制御則 2) を双線形システム (5), (6) に適用した場合の応答特性を、数値計算によって求める。基本システム定数として、 $L=1\text{ mH}$, $C=200\text{ }\mu\text{F}$, $R_L=30\text{ }\Omega$, $r=1\text{ }\Omega$, $E=15\text{ V}$, $r_{ef}=30\text{ V}$ を用いた。また $\mu=1-\sqrt{1/30}\approx 0.817$ より u の変動範囲を $0\leq u\leq u_m=0.7$ と設定した。

図 5 は系 2 (Boost 近似制御則 2) を適用した場合の、電源電圧投入時の立上げの様子を三とおりの k に対して求めたものである。いずれの場合も i_L , u および v_c が初期状態 0 からそれぞれ増加して、その後一定値 (特に v_c は目標値) に近づき、系 2 の制御則でも十分有効であることがわかる。ゲイン k によって応答の様子が変化するため、望ましい k をいかに見つけるかがポイントとなる。

図 6 は系 1 (Boost 近似制御則 1) を適用し、負荷抵抗 R_L が $30\text{ }\Omega$ から $90\text{ }\Omega$ に $t=2.5\text{ ms}$ のところでステップ変化した場合の様子を三とおりの m ($k=0.8$ 一定) に対して求めたものである。 $m=0$ の場合 (従

図 5 電源電圧投入時の立上げ特性
Fig. 5. Start up properties of the Boost converter with the proposed control method.

図 7 電源電圧の変化と応答特性
Fig. 7. Transient responses of the Boost converter for step change of input voltage.

図 6 負荷抵抗の変化と応答特性
Fig. 6. Transient responses of the Boost converter for step change of load resistance.

図 8 正弦波状目標値に対する追従特性
Fig. 8. Tracking properties of the Boost converter for sinusoidal reference voltage.

って系 2 に相当) に i_L が一瞬負値となるが、これは数値計算上起こり得るだけで、実際には i_L が逆方向に流れることはない点に注意する必要がある。

図 7 は系 1 を適用し、電源電圧 E が 15 V から 20 V に $t=2.5$ ms のところでステップ変化した場合の様子を三とおりの m ($k=0.8$ 一定) に対して求めたものである。図 6 と同様に k が一定でも m の変化によって応答の様子が大きく変わる。概して m が大きくなると応答の振動成分が減少するようであるが、明確な関係はわかっていない。

最後に図 8 は系 2 を適用し、試みとして目標値を一定値ではなく正弦波状に変動させ、その追従性を確かめたものである。図から明らかなように、出力電圧は目標関数から時間的にわずかに遅れて追従しており、目標値の大きな変動にも十分な速度で対処できること

がわかる。

なお、以上いずれの場合にも入力 u は制限範囲内に収まっており、上限または下限を超えることはなかった。

6. おわりに

本論文では、Boost 形および Buck-Boost 形 DC-DC 変換器の出力レギュレーションのための制御則の構成について、理論的な面から検討した。ここで得られた制御則は、入力 u が基本的に微分方程式の形で与えられるため構成が容易ではないが、線形近似などを行いたいいわゆる Small Signal Model を扱うことによってではなく、大域的な安定性についての検討を行うことにより求められている。その結果、計算機シミュレーション段階ではあるが、得られた制御則は良好

な安定性や応答特性をもっている。実際の適用に関してはハード面での構成上の問題や、計算機シミュレーションでは考慮されなかった問題点など、今後の研究にもつとところが多いが、本論文の結果はこれら二つの DC-DC 変換器の良好な出力レギュレーションを得るための一つの足がかりとなると期待される。

なお、ここでは述べなかったが、負荷が抵抗のみではなく誘導成分などを含んでいてもほぼ同様に議論することができる、特に $r=0$ とみなした場合には得られる制御則が抵抗負荷だけの場合と一致する。また、これと同様の議論を Ćuk コンバータについても行うことができるが、これは別の機会に報告する予定である。

(平成 2 年 8 月 13 日受付)

文 献

- (1) 原田: 「スイッチング電源の現状と動向」, エッセンシャルズ, 9, 55(昭 63)
- (2) R. D. Middlebrook & S. Ćuk: "A general unified approach to modeling switching converter", IEEE Power Electronics Specialists Conf. Rec., 18(1976)
- (3) T. Ninomiya, K. Harada & M. Nakahara: "On the maximum regulation range in boost and buck-boost converter", IEEE Power Electronics Specialists Conf. Rec., 146(1981)
- (4) R. Erickson, S. Ćuk & R. D. Middlebrook: "Large-signal modeling and analysis of switching regulators", *ibid.*, 240(1982)
- (5) F. D. Tan & R. S. Ramshaw: "Instabilities of a boost converter system under large parameter variations", IEEE Trans. Power Electronics, PE-4, 442(1989)
- (6) F. Chen & X. S. Cai: "Design of feedback control laws for switching regulators based on the bilinear large signal model", IEEE Trans. Power Electronics, PE-5, 236(1990)
- (7) V. Jurdjevic & J. P. Quinn: "Controllability and stability", J. Differential Equations, 28, 381(1978)
- (8) M. Slemrod: "Stabilization of bilinear control systems

with applications to nonconservative problems in elasticity", SIAM J. Control & Optimization, 16, 131(1978)

- (9) 川崎・小林・示村: 「線形および 2 次状態フィードバックによる双線形系の安定化」, 計測自動制御学論, 15, 16(昭 54)
- (10) E. P. Ryan & N. J. Buckingham: "On asymptotically stabilizing feedback control of bilinear systems", IEEE Trans. Automatic Control, AC-28, 863(1983)

川 崎 直 哉 (正員)

昭和 50 年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。55 年同大学院博士課程修了。56 年高知大学教育学部助手, 57 年同助教授。平成 2 年上越教育大学助教授。工学博士。制御系の安定化・設計法の研究に従事。計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本産業技術教育学会, IEEE 会員。

野 村 弘 (正員)

昭和 41 年東京電機大学工学部電気工学科卒業。同年高知工業高等専門学校電気工学科助手, 現在, 助教授。1973 年アメリカ・ミズリー大学留学。1974 年同大学電気工学科修士課程修了。半導体電力変換器の研究に従事。パワーエレクトロニクス研究会, 計測自動制御学会, IEEE 会員。