定速回転制御系における角度依存性外乱 の新しい除去法

正 員 中 野 道 雄 (東京工大)

准 員 余 錦 華 (東京工大)

正 員 松 尾 芳 樹 (東京工大)

A New Approach to Reject Angle Dependent Disturbances in Constant Speed Rotation Control Systems

Michio Nakano, Member, Jin-Hua She, Associate, Yoshiki Matsuo, Member (Tokyo Institute of Technology)

High precision and good command response are the most important requirements in performance of constant speed rotation control systems. It is the rotational speed fluctuations caused frequent by rotational angle dependent disturbances that have hindered all efforts to improve the precision of such systems.

This paper proposes a new approach focusing on the fact that this kind of disturbance constitutes cyclic function of the rotational angle. The proposed design is set in the 'angle domain' instead of the 'time domain' so as to eliminate such disturbances completely without regard to the rotational speed.

The results of the simulation reported in this paper will prove that the constant speed rotation control system designed according to the proposed approach removes all rotational speed fluctuations apart from speed setting changes.

キーワード：定速回転系，角度依存性外乱，二自由度制御系，繰返し制御， H_∞ 制御，デッドビート制御

1. ま え が き

定速回転系では，回転速度が目標とする設定値に高精度かつ高速に追従することが要求される。しかし一般に，回転系では，回転角度に依存した外乱による回転むらが発生し，回転系の精度向上を大きく妨げることがある。例えば，AC モータの電源周波数の整数倍で変動するトルク成分，DC モータの界磁の不均一性，電機子のコギングおよびロータ系の偏心，軸のガタなどに起因する速度変動はその例である。

この種の外乱の除去について，従来は，回転系の機構的な改善手法を用いたり⁽¹⁾，時間領域でこの問題をとらえたり⁽²⁾してきた。特に，時間領域での角度依存性外乱の除去法では，まず定速回転時を想定し，角

度依存性外乱を回転に同期した一定周期の時間周期関数と考え，時間領域での繰返しコントローラを用いていた。しかし，前者の方法では，この種の外乱の除去効果は必ずしも十分とはいえず，後者の方法では，所定の回転速度に対する除去効果は良いが，回転速度の設定値が変化した場合，除去効果が劣化するという問題点が指摘されている。

本論文では，この種の外乱が回転角度の周期関数となるという特徴に注目し，時間領域の代わりに「角度領域」でコントローラを設計することにより，この種の外乱を回転速度と関係なく完全に除去する高精度な回転制御系を構成する手法を提案する。更に，本手法を用いることによって，設定値変化と無関係に回転系の回転むらが完全に除去できることをシミュレーショ

ンにより検証する。

ただし、本方式でいう「角度領域」とは、回転角度上で定義された関数の集合である。

なお、本論文では次の数学記号を用いる。

λ : 遅延作用素 ($=z^{-1}$)

RH_{∞} : 複素数平面上の閉単位円領域に極をもたない λ の実有理関数空間

$R[\lambda]$: λ の実数多項式環 ($\subset RH_{\infty}$)

$\|G(\lambda)\|_{\infty} := \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |G(e^{j\theta})| \quad [G(\lambda) \in RH_{\infty}]$

$a_+(\lambda)$: 複素数平面上の閉単位円領域に零点をもつモニックな多項式

$a_-(\lambda)$: 複素数平面上の閉単位円領域を除く領域に零点をもつ多項式

2. 角度領域における定速回転系の記述

2 入力, 1 出力, n 次の可制御, 可観測な回転系の時間領域における状態表現は次式によって与えられているとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + B[u_p(t), v(t)]^T \\ \omega(t) &= \Psi x(t) + \Gamma[u_p(t), v(t)]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ただし, $u_p(t)$: 制御入力, $v(t)$: 外乱 (角度に関して周期性をもつ), $\omega(t)$: 回転速度

角度領域における回転系の数学モデルを求める際, まず時間領域から角度領域へ変換可能なためには, 以下の変換条件が要求される。

〈変換条件〉 時間領域から角度領域へ変換できるための必要十分条件は任意の時点において, 回転方向は変わらないことである。すなわち, もし実際の回転方向を回転の正方向とすると, 次式のように表される。

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} > 0; \quad \forall t > 0 \quad \dots\dots (2)$$

(2) 式は回転角度 $\theta = \theta(t)$ の逆関数 $t = t(\theta)$ の存在条件を示している。

以下では, 上の変換条件が常に満たされているとする。このとき, 時間領域における変数と角度領域における変数の間には以下のような関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\theta) \\ [u_p, v]^T &= [u_p(t), v(t)]^T \\ &= [u_p\{t(\theta)\}, v\{t(\theta)\}]^T \\ &:= [\tilde{u}_p(\theta), \tilde{v}(\theta)]^T \\ \omega &= \omega(t) = \omega\{t(\theta)\} = \tilde{\omega}(\theta) \\ x &= x(t) = x\{t(\theta)\} = \tilde{x}(\theta) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d\tilde{x}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \tilde{\omega}(\theta) \frac{d\tilde{x}(\theta)}{d\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

以上の変換によって, 特に角度依存性外乱 $\tilde{v}(\theta)$ は回転角度 θ に関して基本周期 $T=2\pi(\text{rad})$ の周期関数となるため, 角度領域における繰返しコントローラを用いることによって, その影響が完全に除去できるはずである⁽³⁾。

(3) 式を (1) 式に代入すると, 角度領域における回転系の数学モデルは

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}(\theta) \frac{d\tilde{x}(\theta)}{d\theta} &= A\tilde{x}(\theta) + B[\tilde{u}_p(\theta), \tilde{v}(\theta)]^T \\ \tilde{\omega}(\theta) &= \Psi\tilde{x}(\theta) + \Gamma[\tilde{u}_p(\theta), \tilde{v}(\theta)]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

と求められる。

角度領域における回転系の数学モデル (4) 式は非線形である。線形システム制御理論を用いて制御系を設計するために, 非線形モデル (4) 式を平衡点

$\{\tilde{\omega}(\theta), d\tilde{x}(\theta)/d\theta\} = (\tilde{\omega}_r, 0)$ のまわりで線形近似を行う。その結果, その線形モデルは

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tilde{x}(\theta)}{d\theta} &= \tilde{A}\tilde{x}(\theta) + \tilde{B}[\tilde{u}_p(\theta), \tilde{v}(\theta)]^T \\ \tilde{\omega}(\theta) &= \tilde{\Psi}\tilde{x}(\theta) + \tilde{\Gamma}[\tilde{u}_p(\theta), \tilde{v}(\theta)]^T \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

と求められる。ただし, ここで

$$\tilde{A} = \frac{A}{\tilde{\omega}_r}; \quad \tilde{B} = \frac{B}{\tilde{\omega}_r}; \quad \tilde{\Psi} = \Psi; \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma; \quad \dots\dots (6)$$

である。

ここで求めた線形モデルのパラメータ (6) 式は平衡点における回転速度の値 $\tilde{\omega}_r$ に依存しているため, 動作点の変化により制御対象の特性の変動をもたらし, 系の応答に好ましくない影響を及ぼす。ゆえに, コントローラを設計する際, 制御対象の特性変動の影響を十分に抑制しなければならない。

3. 定速回転制御系の構成およびコントローラ的设计

〈3・1〉 定速回転制御系の構成 本制御系の設計にあたり

図 1 定速回転制御系 ($\lambda = z^{-1}$)

Fig. 1. Configuration of the constant speed rotation control system.

- (1) 角度依存性外乱の除去
- (2) 設定値変化に対する良好な過渡特性
- (3) 制御対象の特性変動による影響の抑制

という要求を満たすために、定速回転制御系は、角度領域における平衡点のまわりでの回転系の線形近似モデル(5)式を用いて、図1のような二自由度制御系を構成した。

ここでは $P(\lambda)$ を角度領域での制御対象のパルス伝達関数とし、 $C(\lambda)=[C_1(\lambda), C_2(\lambda)]$ を角度領域でのコントローラとする。

〈3・2〉 コントローラの設計法 (5)式の線形近似モデルの出力は一定角度でサンプリングされる。そのため、その入力に角度に関してのゼロ次ホールドを置く。離散化した制御対象のパルス伝達関数を $P(\lambda)$ とし、 $P(\lambda)$ は単位円上には極、零点をもたないものとする。

$P(\lambda)$ の既約分解を

$$P(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)}; N, D \in R[\lambda] \quad (7)$$

とすると、Bezout 方程式

$$XN + YD = 1 \quad (8)$$

を満たす $X, Y \in R[\lambda]$ が存在し、図1の系を内部安定化するコントローラ $C=[C_1, C_2]$ の一般形は

$$C=[C_1, C_2] = (Y - K_2N)^{-1}[K_1, X + K_2D] \\ K_1, K_2 \in RH_{\infty} \quad (9)$$

と表せる⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

定常状態において、角度依存性外乱の影響を完全に除去するためには繰返しコントローラが制御系のコントローラ $C=[C_1, C_2]$ に含まれていなければならない。すなわち、コントローラ $C=[C_1, C_2]$ の分母 $(Y - K_2N)$ には因子 $(1-\lambda^L)$ (繰返しコントローラの段数) が含まれていなければならない。

そこで、

$$Y := (1-\lambda^L)Y'; Y' \in R[\lambda] \quad (10)$$

$$K_2 := (1-\lambda^L)K'_2; K'_2 \in RH_{\infty} \quad (11)$$

とおくと、(8)式の代わりに次の方程式

$$XN + (1-\lambda^L)Y'D = 1 \quad (12)$$

を満たす $X, Y' \in R[\lambda]$ を求めればよい。単位円上に零点をもたない N と $(1-\lambda^L)D$ とが既約であることから、(12)式を満たす $X, Y' \in R[\lambda]$ が存在する。このとき、コントローラ $C=[C_1, C_2]$ の分母 $(Y - K_2N)$ は $(1-\lambda^L)^{-1}(Y - K_2N) \in RH_{\infty}$ (13)

を満たす。明らかに、(13)式は定常状態における角度依存性外乱の完全除去のための条件である⁽⁶⁾。従って、 Y' と X は(12)式を満たすように選び、 Y は

(10)式により求め、 K_2 は(11)式のようにクラスを制限すればよい。

以上のことをまとめると、コントローラ $C=[C_1, C_2]$ は次式で表すことができる。

$$C=[C_1, C_2] \\ = (1-\lambda^L)^{-1}(Y' - K'_2N)^{-1} \\ \times [K_1, X + (1-\lambda^L)K'_2D] \\ K_1, K'_2 \in RH_{\infty} \quad (14)$$

このとき、系の諸特性は以下ようになる。

$$\tilde{r} \rightarrow \tilde{\omega}: \frac{PC_1}{1+PC_2} = NK_1 \quad (15)$$

$$\tilde{v} \rightarrow \tilde{\omega}: \frac{1}{1+PC_2} = (1-\lambda^L)D(Y' - K'_2N) \quad (16)$$

明らかに、外乱から回転速度までのパルス伝達特性(16)式はパラメータ K_1 と関係なくパラメータ K'_2 だけに依存している。そのため、角度依存性外乱の抑制という要求はパラメータ K'_2 を適切に選ぶことによって実現できる。また、系の入出力特性(15)式はパラメータ K'_2 と関係なく K_1 だけに依存しているため、望みの入出力特性という要求はパラメータ K_1 を適切に選ぶことによって実現できる。

(1) パラメータ K'_2 の決定法 角度依存性外乱の出力に対する影響は

$$\tilde{\omega}_{\tilde{v}} = \frac{1}{1+PC_2} \tilde{v} = S\tilde{v} \quad (17)$$

で表すことができ、ここで制御系の感度は、

$$S = \frac{1}{1+PC_2} \quad (18)$$

である。外乱の出力に対する影響を低く抑制するために、重み付け感度の H_{∞} ノルム $\|(1-\lambda^L)^{-1}S\|_{\infty}$ を最小にすることが望まれる。

また、回転速度が目標設定値であるときの回転系の伝達関数を $P(\lambda)$ とし、設定値が変化したときの回転系の伝達関数を $\tilde{P}(\lambda)$ とすると、基準目標値の場合と設定値変化後の場合の系の入出力特性はそれぞれ

$$G_{\tilde{r}\tilde{\omega}} = \frac{PC_1}{1+PC_2} \quad (19)$$

$$\tilde{G}_{\tilde{r}\tilde{\omega}} = \frac{\tilde{P}C_1}{1+\tilde{P}C_2} \quad (20)$$

となる。本制御系において、問題となる動作点の変動による系の入出力特性の変動は

$$\frac{\tilde{G}_{\tilde{r}\tilde{\omega}} - G_{\tilde{r}\tilde{\omega}}}{\tilde{G}_{\tilde{r}\tilde{\omega}}} = \frac{1}{1+PC_2} \frac{\tilde{P} - P}{\tilde{P}} = S \frac{\tilde{P} - P}{\tilde{P}} \quad (21)$$

と表すことができ、制御対象の特性変動の影響を受け

にくい制御系を構成するのは、やはり制御系の感度 S を低く抑えなければならないことがわかる。

そこで、以下のような評価関数

$$J_2 = \left\| \frac{1}{1-\lambda^T} S \right\|_\infty = \|D(Y' - K_2' N)\|_\infty \quad (22)$$

を考える。 $\inf_{K_2 \in RH_\infty} J_2$ を達成するように K_2' を決めることによって、外乱の影響が抑制され、しかも低周波領域における入出力特性変動も抑制されている。この H_∞ 制御問題は

$$T_1 = DY'; T_2 = D; T_3 = N \quad (23)$$

とおけば、標準的なモデルマッチング問題に帰着でき、本問題において T_2 と T_3 は単位円上に零点をもたないため可解であり⁽⁴⁾⁽⁵⁾、 $K_2' \in RH_\infty$ が求められる。

(2) パラメータ K_1 の決定法 ステップ状の回転速度の設定値変化に対し出力の回転速度が高速応答できるように、 K_1 は、ステップ状の設定値変動に対し出力が有限整定し、しかも整定するまでの出力誤差および制御入力を小さく抑えるように決める⁽⁷⁾。

ここで、制御対象を

$$P(\lambda) = \frac{\lambda^m b(\lambda)}{a(\lambda)} = \lambda^m \frac{b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_l \lambda^l}{a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n} \quad (24)$$

$a_0, b_0 \neq 0$; $a(\lambda), b(\lambda)$: 互いに素

とすると、前節における N, D はそれぞれ

$$N(\lambda) = \lambda^m b(\lambda); D(\lambda) = a(\lambda) \quad (25)$$

となる。(24)式において、 $a(\lambda)$ と $b(\lambda)$ を

$$\left. \begin{aligned} a(\lambda) &= a_-(\lambda) a_+(\lambda) \\ b(\lambda) &= b_-(\lambda) b_+(\lambda) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

と分解し、更に入出力誤差を

$$\tilde{e}(\lambda) = \tilde{r} - \tilde{w} = \frac{1 - NK_1}{1 - \lambda} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{e}_i \lambda^i \quad (27)$$

とすると、 K_1 に課されているデッドビート性をもつための制約条件は以下のものである⁽⁷⁾。

ステップ状の設定値変化に対して、出力が有限整定となる $K_1 \in RH_\infty$ が存在するための必要十分条件は、適切な多項式 $f(\lambda) \in R[\lambda]$ が存在し、

$$1 - (1 - \lambda) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \tilde{e}_i \lambda^i \right) = \lambda^m b_+(\lambda) f(\lambda) \quad (28)$$

が満たされることである。

$f(\lambda)$ は、制約(28)式のもとで、次の評価関数

$$J_1 = \sum_{i=0}^{\infty} (|\tilde{e}_i|^2 + \rho^2 |\Delta \tilde{u}_i|^2) \quad (29)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta \tilde{u}_i \lambda^i = (1 - \lambda) \tilde{u}(\lambda)$$

ρ : 重み係数

を最小にするように定め、 K_1 を決定すると、

$$K_1(\lambda) = \frac{f(\lambda)}{b_-(\lambda)} \quad (30)$$

となる。

4. シミュレーション

まず、時間領域における回転系は

$$J \frac{d\omega}{dt} + D\omega = Bu_p + \nu \quad (31)$$

J : 回転系の慣性モーメント (kgm^2), D : ダンピング係数 (Nms/rad), B : 入力係数 (Nm/V) とし、そのパラメータは

$$J = 0.1; D = 1; B = 1 \quad (32)$$

とし、その基準目標速度 ω_r を

$$\omega_r = 20 \text{ rad/s} \quad (33)$$

とする。

入力が目標設定値のときの角度領域における制御対象の伝達関数を求め、サンプリング・インターバル

$$\Delta\theta = 0.174533 \text{ rad} (= 10 \text{ deg}) \quad (34)$$

で離散化すると、制御対象のパルス伝達関数のノミナル値は

$$P(\lambda) = \frac{\beta\lambda}{\lambda - \alpha} \quad (35)$$

$$\alpha = 1.091187; \beta = -0.091187$$

となる。

角度依存性外乱は、角度領域において、基本周期 $T = 2\pi(\text{rad})$ の周期関数となるので、繰返しコントロールの段数は

$$L = T/\Delta\theta = 2\pi/\Delta\theta = 36 \quad (36)$$

である。(35)式に対し、上で提案した設計法でコントローラを設計する。

まず、制御対象の伝達関数について

$$P(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\lambda^m b(\lambda)}{a(\lambda)} \quad (37)$$

と分解すると

$$\left. \begin{aligned} D(\lambda) &= \lambda - \alpha; N(\lambda) = \beta\lambda \\ a(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda = -\alpha + \lambda; b(\lambda) = b_0 = \beta; m = 1 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

となる。更に、 $a(\lambda)$ と $b(\lambda)$ を(26)式のように分解すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_-(\lambda) &= -\alpha + \lambda; a_+(\lambda) = 1 \\ b_-(\lambda) &= \beta; b_+(\lambda) = 1 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

方程式(12)式を解くと、

$$X = \frac{1 + \alpha\lambda^{L-1} - \lambda^L}{\alpha\beta}; Y' = -\frac{1}{\alpha} \quad (40)$$

図 2 系の感度特性

Fig. 2. Sensitivity characteristic of the designed system.

となり、パラメータ K_2 を求めると、

$$K_2 = -\frac{1}{a\beta(\lambda - \alpha)} \quad \dots\dots\dots (41)$$

となる。

整定ステップ数を10とおき、 K_1 を求めると、 K_1 は

$$\begin{aligned} K_1 &= [k_0, k_1, \dots, k_{10}] [1, \lambda, \dots, \lambda^{10}]^T \quad \dots\dots\dots (42) \\ [k_0, k_1, \dots, k_{10}] \\ &= [-0.792324, -1.256739, -1.474312 \\ &\quad -1.514654, -1.434792, -1.279291 \\ &\quad -1.081210, -0.863534, -0.640857 \\ &\quad -0.421159, -0.207555] \end{aligned}$$

となる。

設計した系の感度特性は図2に示す。感度の周波数特性から、低周波領域において、系の感度は低く抑えられており、しかも外乱の基本周波数およびその整数倍の周波数における系の感度は0となっており、外乱の影響は除去できることがわかる。

シミュレーションはパソコンを用いて行った。その結果を図3～図5に示す。シミュレーションは基本的に時間領域で行い、出力の回転速度を積分して得られた角度情報を基準にして、角度依存性外乱を発生させ、「角度領域」での制御をシミュレートした。

図3では、まず、同図(a)のような基準目標入力 $\omega_r = 20 \text{ rad/s}$ を与え、系が定常状態に入った後、 $t = 1.36 \text{ s}$ から(a)図のような角度依存性外乱：

$$\begin{aligned} v(t) &= \bar{v}\{\theta(t)\} \\ &= 2\sin\theta(t) + \sin 2\theta(t) + 0.5\sin 3\theta(t) \\ &\quad \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

が系に加ったとする。制御を施していない場合、(b)図からも明らかに、この外乱が出力の回転速度に影響を与え、回転速度には回転むらが生じていることがわかる。

次に、制御を施した場合、同様に(b)図からも明らかに、出力は目標設定値に定常偏差なく追従

図 3 基準目標入力時の外乱応答

Fig. 3. Responses to the disturbance against the standard command input.

図 4 入力設定値の変化に対する応答

Fig. 4. Response to the change of the command input.

図 5 「時間領域」で設計した定速回転制御系の応答

Fig. 5. Response of the constant speed rotation control system designed in the 'time domain'.

し、外乱の影響も二周期目から完全に除去されていることがわかる。

図4(a)では、 $t=3.55$ sの時点で目標設定値を20 rad/sから25 rad/sに変えた場合、そのときの出力応答を(b)図に示している。目標設定値が変えても、出力が入力に対して定常偏差なく追従し、外乱の影響も完全に除去できている。すなわち、目標設定値が設計値からずれても十分な制御効果が得られることがわかる。

ちなみに、時間領域で繰返しコントローラを設計し、制御系を構成した。そのシミュレーション結果を図5に示す。基準設定値の場合、外乱の除去効果が良いが、設計値が変化すると、外乱の除去効果は劣化する[(b)図]ことが確認された。

5. むすび

本論文では、回転系には回転むらの生じる原因となる様々な外乱が回転角度に依存し、回転角度の周期関数となるという特徴に注目し、「角度領域」でこの問題をとらえ、この種の外乱の除去について検討した。すなわち、

(1) この種の外乱を「角度領域」で設計したコントローラにより除去することを提案した。

(2) 上の考え方を実現するための制御系の構成を示し、その制御系の設計法を提案した。

(3) シミュレーションにより、本設計法の有効性を検証した。

最後に、本論文の作成にあたり御討論をいただいた本学助手ピーチャイ氏に深く感謝の意を表す。

(平成3年6月21日受付)

文 献

- (1) 後藤・小林：「直流モータのコギングトルクの解明と新しい低減方法」，電学論B，103 711 (昭58-11)
- (2) 小林・原・田中・中野：「繰返し制御を応用したモータの回転むら低減法」，同上D，107 29 (昭62-1)
- (3) 中野・井上・山本・原：繰返し制御 (平元) 計測自動制御学会
- (4) M. Vidyasager: Control System Synthesis: A Factorization Approach (1985) MIT Press

- (5) B. A. Francis: A Course in H_∞ Control Theory (1987) Springer-Verlag
- (6) S. Hara & T. Sugie: Independent Parameterization of Two-Degree-of-Freedom Compensators in General Robust Tracking Systems, *IEEE Trans. Automatic Control* AC-33 59/67 (1988)
- (7) 堀口・西村・長田・富田：「過渡応答を考慮した2自由度デッドビート制御」，計測自動制御学論，25，1046 (平元-10)

中野道雄 (正員)

昭和14年2月17日生。43年東京工業大学大学院博士課程電気工学専攻修了。同年同大学工学部助手，48年同助教授，61年同教授。49年より高エネルギー物理学研究所併任。工学博士。計測制御機器，パワーエレクトロニクス系の制御に関する研究に従事。計測自動制御学会，日本シミュレーション学会，IEEE会員。

余錦華 (准員)

1963年5月23日生。1983年7月中国中南工業大学工業自動化学科卒業。1990年3月東京工業大学大学院理工学研究科(制御工学専攻)博士前期課程修了。同年4月同博士後期課程(制御工学専攻)入学，現在に至る。計測自動制御学会学生会員。

松尾芳樹 (正員)

昭和32年1月1日生。59年3月東京工業大学大学院博士課程制御工学専攻修了。同年4月同大学工学部助手，平成2年12月より同助教授，現在に至る。工学博士。計測自動制御学会，IEEE会員。