主軸の回転角度の周期関数となる目標入力に対する 高精度位置決め制御

准員 余 錦 華 (東京工業大)

正員 中 野 道 雄 (東京工業大)

High Precision Positioning Control to Reference Input Given as Periodic Functions of Rotational Angle of Spindle

Jin-Hua She, Associate, Michio Nakano, Member (Tokyo Institute of Technology)

In positioning control systems, the reference input is frequently given as periodic functions of the rotational angle of the spindle. To obtain high precision, it is very effective to design a repetitive controller in 'time domain' while the spindle is rotating ideally. However, disturbances caused by the spindle structure and machining, which are dependent on the rotational angle, will result in rotational speed fluctuations of the spindle, and this will hinder all efforts to improve the precision of such systems.

This paper proposes a systematic approach in 'angle domain' to design a control system when the rotational speed of the spindle is fluctuated by the rotational angle dependent disturbances. A model in 'angle domain' is obtained as a linear periodic model by introducing a transformation from 'time domain' into 'angle domain'. Focusing on it, a repetitive controller is designed in 'angle domain' as to trace a periodic reference input in 'angle domain' and eliminate the effects of such rotational speed fluctuations of the spindle. And a repetitive ripple-free deadbeat controller is designed to obtain a desired transient response.

キーワード：「角度領域」における周期関数，周期係数線形系，高精度位置決め，二自由度制御系，繰返し制御，リプルフリーデッドビート制御， H_∞ 制御

1. はじめに

位置決め制御系において，その目標入力はしばしば回転角度に関する周期信号として与えられる。例えば図1のような切削システムでは，ワークピースの断面形状を加工する際，バイトの先端位置の目標入力は主軸の回転角度に関しての周期信号として与えられる。このとき，主軸は一定な回転速度で理想的に回転しているものとする，目標入力は時間領域での周期信号となるため，時間領域での繰返し制御系を構成することにより，高精度位置決めが実現できる。

しかし，主軸の駆動系では構造および加工などに起因する外乱が生じることがある⁽¹⁾。もし，このような

図1 切削システム
Fig. 1. A cutting system.

図 2 主軸回転速度の変動による「時間領域」における目標入力波形の変化

Fig. 2. Variation of the reference input in 'time domain' caused by the rotational speed fluctuations of the spindle.

外乱により、主軸の回転速度が変動するならば、その回転速度の変動は時間領域における目標波形に影響を与える。一例として、 $r(t) = \sin\{\theta(t)\} + \sin(2\theta(t))$ のような目標入力信号の時間領域における波形は、主軸の回転速度が一定で $\omega(t) = 10 \text{ rad/s}$ のとき、 $\omega(t) = 10 + 5 \sin\{\theta(t)\} \text{ (rad/s)}$ で変動する場合を図 2 に示す。明らかに、主軸の回転速度変動の影響により、時間領域での目標入力はひずみが生じたり、信号周期が変わったりすることがある。そのため、時間領域での繰返し制御では高精度位置決めが実現できないことになる。このとき、位置決めの高精度を得るには新たな設計手法を考えなければならない。

本論文では、先に提案した「角度領域」⁽²⁾ という概念を導入し、主軸の回転に同期する外乱によって主軸の回転速度が変動する場合の高精度位置決め制御問題を考える。このとき、まず主軸回転速度が変動する場合、「角度領域」で制御対象が主軸の回転と同じ周期をもつ周期係数線形系となることを明らかにする。そのうえで、「角度領域」で繰返し制御を適用することにより、この種の主軸回転速度の変動の影響が完全に除去でき、主軸の回転角度に関する周期関数の目標入力に対して定常偏差なく追従できることを提案する。また、繰返し制御系の設計にあたって、繰返しリプルフリーデッドビート制御の設計法を提案する。

本方式でいう「角度領域」とは主軸の回転角度上で定義された関数の集合である。

なお、本論文では次の数学記号を用いる。

λ : 遅延作用素 ($=z^{-1}$)⁽⁴⁾

R^m : m 次の実数列ベクトルの集合

$R^{m \times n}$: $m \times n$ の実数マトリックスの集合

RH_∞ : 複素数平面上の閉単位円領域に極をもたない λ の実有理関数空間

$R[\lambda]$: λ の実数多項式環 ($\subset RH_\infty$)

$\|G(\lambda)\|_\infty := \sup_{0 \leq \theta < 2\pi} |G(e^{j\theta})|$ [$G(\lambda) \in RH_\infty$]

$\Omega[a(\lambda)]$: 多項式 $a(\lambda)$ の零点の集合

2. 「角度領域」における制御対象の数学モデル⁽²⁾

1 入力、1 出力の制御対象の時間領域における数学モデルは次式によって与えられているとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $y(t)$: 制御対象の位置、 $u(t)$: 制御入力、 $x(t)$: 制御対象の状態

主軸の回転角度 $\theta = \theta(t)$ の逆関数を $t = t(\theta)$ とする。このとき、

$$\left. \begin{aligned} t &= t(\theta) \\ \omega &= \omega(t) = \omega\{t(\theta)\} = \bar{\omega}(\theta) \\ u &= u(t) = u\{t(\theta)\} = \bar{u}(\theta) \\ y &= y(t) = y\{t(\theta)\} = \bar{y}(\theta) \\ x &= x(t) = x\{t(\theta)\} = \bar{x}(\theta) \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{d\bar{x}(\theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \bar{\omega}(\theta) \frac{d\bar{x}(\theta)}{d\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

を用いると、「角度領域」における制御対象の数学モデルは

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\theta)}{d\theta} &= \bar{A}\bar{x}(\theta) + \bar{B}\bar{u}(\theta) \\ \bar{y}(\theta) &= \bar{C}\bar{x}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$\bar{A} = \frac{A}{\bar{\omega}(\theta)}, \quad \bar{B} = \frac{B}{\bar{\omega}(\theta)}, \quad \bar{C} = C \quad \dots\dots\dots (4)$$

と求められる。

主軸の回転に同期した外乱によって回転速度に変動が生じた場合、 $\bar{\omega}(\theta)$ は目標回転速度 ω_0 のまわりで $T = 2\pi(\text{rad})$ を周期として周期的に変動する。すなわち、このとき、「角度領域」におけるプラントの数学モデル(3)式は周期 $T = 2\pi(\text{rad})$ の周期係数線形系となっている。

また、主軸が目標回転速度 ω_0 で理想的に回転しているとすると、「角度領域」における制御対象のノミナルな線形モデルはただちに次式と求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{x}(\theta)}{d\theta} &= \bar{A}_0\bar{x}(\theta) + \bar{B}_0\bar{u}(\theta) \\ \bar{y}(\theta) &= \bar{C}_0\bar{x}(\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\bar{A}_0 = \frac{A}{\omega_0}, \quad \bar{B}_0 = \frac{B}{\omega_0}, \quad \bar{C}_0 = C \quad \dots\dots\dots (6)$$

主軸の回転速度の変動がひとまず微小なものであると仮定すると、制御系を構成する際、コントローラは

ノミナルな線形モデル(5)式を用いて設計すればよい。ただし、制御系を構成する際、実際の制御対象(3)式は周期係数線形系となっているため、位置決めに対しての影響を抑えることも併せて考慮しなければならない⁽³⁾。

3. 「角度領域」における位置決め制御系の設計法

本制御系の設計にあたり、

- (1) 目標入力に対する良好な過渡特性、定常特性
- (2) 主軸の回転速度変動などに起因する制御性能劣化の抑制

という要求を満たすために、「角度領域」における制御対象のモデル(5)式を用いて、図3のような2自由度制御系⁽⁴⁾⁽⁵⁾を構成する。

制御対象の出力は「角度領域」において一定角度でサンプリングされ、また制御入力には主軸の回転角度に関しての零次ホールドが設けてある。離散化した制御対象のパルス伝達関数を $P(\lambda)$ とし、 $P(\lambda)$ は単位円上には極、零点をもたないものとする。

$P(\lambda)$ の既約分解を

$$P(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{\lambda^m b(\lambda)}{a(\lambda)} \\ = \frac{\lambda^m (b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_n \lambda^n)}{a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n} \dots \dots \dots (7)$$

$$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, N(\lambda), D(\lambda), a(\lambda), b(\lambda) \in R[\lambda]$$

とすると、Bezout 方程式

$$X(\lambda)N(\lambda) + Y(\lambda)D(\lambda) = 1 \dots \dots \dots (8)$$

を満たす $X(\lambda), Y(\lambda) \in R[\lambda]$ が存在し、図3の系を内部安定化するコントローラ $C(\lambda) = [C_1(\lambda)C_2(\lambda)]$ の一般形は

$$C(\lambda) = [C_1(\lambda)C_2(\lambda)] = \left\{ \begin{array}{l} Y(\lambda) - K_2(\lambda)N(\lambda) \\ K_1(\lambda), X(\lambda) + K_2(\lambda)D(\lambda) \end{array} \right\}^{-1} \dots \dots \dots (9)$$

と表せる。

図3 「角度領域」における位置決め制御系の構成

Fig. 3. Configuration of the positioning control system designed in 'angle domain'.

〈3・1〉 繰返しリプルフリーデッドビート制御

図3の制御系において、(9)式によって与えられたコントローラを用いると、系の入出力特性は

$$G_{\tilde{r}\tilde{y}}(\lambda) = N(\lambda)K_1(\lambda) \dots \dots \dots (10)$$

となる。(10)式は $K_1(\lambda) \in RH_\infty$ を適切に選ぶことにより、望みの入出力特性が達成できることを示している。以下では、 $K_1(\lambda) \in RH_\infty$ の一設計法として、文献(6)、(7)の設計法を繰返し制御に拡張し、目標入力に対して出力がリプルフリーデッドビート特性をもつような $K_1(\lambda) \in R[\lambda]$ の設計法を提案する。本設計法はまず繰返し制御のリプルフリー最短デッドビート制御を達成するための最小次数の $K_1^*(\lambda) \in R[\lambda]$ を求め、更に整定ステップ数を延ばして得られた自由度を用いて過渡応答の最適化を図ることによって $K_1(\lambda) \in R[\lambda]$ を決める。

(1) 周期信号の離散表現 図4に示すように、 L 段の繰返しコントローラが基本周期 L 段の周期信号の発生機構となっていることがよく知られている⁽⁸⁾。

ここで、もし初期関数 $\tilde{r}(\lambda)$ を

$$\tilde{r}(\lambda) = r_0 + r_1 \lambda + r_2 \lambda^2 + \dots + r_{L-1} \lambda^{L-1} \dots (11)$$

とすると、図4からわかるように、周期関数 $\tilde{r}(\lambda)$ は

$$\tilde{r}(\lambda) = \frac{\tilde{r}(\lambda)}{1 - \lambda^L} \\ = \frac{r_0 + r_1 \lambda + r_2 \lambda^2 + \dots + r_{L-1} \lambda^{L-1}}{1 - \lambda^L} \dots (12)$$

と表せる。(12)式は周期関数の一般的な離散表現だと考えられる。以下ではこのような周期目標信号に対するリプルフリーデッドビートコントローラの一設計法を提案する。

(2) 周期目標信号に対するリプルフリー最短デッドビート制御 目標入力に対して出力がリプルフリーデッドビートとなるための条件は以下のとおりである⁽⁷⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

図4 周期関数発生器

Fig. 4. Periodic function generator.

(i) (デッドビートの条件)系の入出力誤差

$$\bar{e}(\lambda) := \bar{r}(\lambda) - \bar{y}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{e}_i \lambda^i$$

が λ の多項式になる。すなわち $\bar{e}(\lambda) \in R[\lambda]$ になる。

(ii) (リプルフリーの条件)目標入力から制御入力までのパルス伝達関数 $G_{\bar{r}\bar{u}}(\lambda) = D(\lambda)K_1(\lambda)$ が λ の多項式になる。すなわち $G_{\bar{r}\bar{u}}(\lambda) \in R[\lambda]$ になる。

まず、リプルフリーの条件から

$$K_1(\lambda) \in R[\lambda] \quad \dots\dots\dots (13)$$

ということがわかる。また、系の入出力誤差は

$$\begin{aligned} \bar{e}(\lambda) &= \bar{r}(\lambda) - \bar{y}(\lambda) \\ &= \{1 - N(\lambda)K_1(\lambda)\} \bar{r}(\lambda) \\ &= \{1 - N(\lambda)K_1(\lambda)\} \\ &\quad \times \frac{r_0 + r_1\lambda + r_2\lambda^2 + \dots + r_{L-1}\lambda^{L-1}}{1 - \lambda^L} \\ &\quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

と表せる。(14)式から明らかに、系がデッドビート制御となるためには、適切な多項式 $f(\lambda) \in R[\lambda]$ が存在し、次式を満たさなければならない。

$$1 - N(\lambda)K_1(\lambda) = (1 - \lambda^L)f(\lambda) \quad \dots\dots\dots (15)$$

(15)式より、

$$K_1(\lambda) = \frac{1 - (1 - \lambda^L)f(\lambda)}{N(\lambda)} = \frac{1 - (1 - \lambda^L)f(\lambda)}{\lambda^m b(\lambda)} \quad \dots\dots\dots (16)$$

が得られ、(16)式から、 $K_1(\lambda) \in R[\lambda]$ の必要十分条件は

$$\Omega[\lambda^m b(\lambda)] \subset \Omega[1 - (1 - \lambda^L)f(\lambda)] \quad \dots\dots\dots (17)$$

であることがわかる。この場合、最小次数の $f(\lambda)$ は

$$f^*(\lambda) = f_0^* + f_1^*\lambda + \dots + f_{m+l-1}^*\lambda^{m+l-1} \quad \dots\dots\dots (18)$$

とおくと、(17)式の制約から $f^*(\lambda)$ が一意に決められる。ここで簡単のため、 $b(\lambda) = 0$ の l 個根はすべて単根であるとし、それらを $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ で表す(重根をもつ場合でも得られた結果は簡単に拡張できる)。簡単な計算により、以下の結果が導かれる。

(i) まず、原点における m 個の重根を用いて、 $f_0^*, f_1^*, \dots, f_{m-1}^*$ を定めると、

$L > m - 1$ の場合:

$$f_i^* = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 0 & i=1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$L \leq m - 1$ の場合:

$$\begin{aligned} \eta &\leq \frac{m-1}{L} < \eta + 1 \quad (\eta: \text{正整数}) \text{ とすると} \\ f_i^* &= \begin{cases} 1 & i = kL (k=0, 1, 2, \dots, \eta) \\ 0 & i \neq kL (k=0, 1, 2, \dots, \eta) \& i \leq m-1 \end{cases} \\ &\quad \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。

(ii) 更に、 $b(\lambda) = 0$ の l 個の根 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_l$ を用いて、 $f_m^*, f_{m+1}^*, \dots, f_{m+l-1}^*$ を定めると、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_m^* \\ f_{m+1}^* \\ \vdots \\ f_{m+l-1}^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \xi_1^m & \xi_1^{m+1} & \dots & \xi_1^{m+l-1} \\ \xi_2^m & \xi_2^{m+1} & \dots & \xi_2^{m+l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_l^m & \xi_l^{m+1} & \dots & \xi_l^{m+l-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g(\xi_1) \\ g(\xi_2) \\ \vdots \\ g(\xi_l) \end{bmatrix} \\ &\quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

となる。ただし、ここで

$$g(\lambda) := \frac{1}{1 - \lambda^L} - \sum_{i=0}^{m-1} f_i^* \lambda^i \quad \dots\dots\dots (22)$$

とする。

このとき、リプルフリー最短デッドビートを達成するためのパラメータ $K_1^*(\lambda)$ は

$$K_1^*(\lambda) = \frac{1 - (1 - \lambda^L)f^*(\lambda)}{N(\lambda)} \quad \dots\dots\dots (23)$$

によって与えられる。

(注意) 上で求めたリプルフリー最短デッドビートコントローラは L ステップを周期とする周期信号という一般的な意味で最短であり、初期関数 $\bar{r}(\lambda) = r_0 + r_1\lambda + r_2\lambda^2 + \dots + r_{L-1}\lambda^{L-1}$ と $(1 - \lambda^L)$ の既約性を要求しないため、具体的な周期目標信号に対しては必ずしも最短とは限らない。

(3) 過渡応答の最適化 (13), (15)式より、リプルフリーデッドビート制御が達成できるための $K_1(\lambda) \in R[\lambda]$ は一般的に以下のように表せることができる。

$$K_1(\lambda) = K_1^*(\lambda) + (1 - \lambda^L)\bar{K}_1(\lambda) \quad \left. \begin{matrix} K_1^*(\lambda), \bar{K}_1(\lambda) \in R[\lambda] \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

(24)式において、 $K_1^*(\lambda)$ は前項で求めたリプルフリー最短デッドビートを達成するためのパラメータであり、 $\bar{K}_1(\lambda)$ は任意な多項式である。 $\bar{K}_1(\lambda) \neq 0$ とその次数を任意に選ぶことにより整定ステップ数が任意に指定でき、系の過渡応答の改善を図ることができる。

ここで、 $\bar{K}_1(\lambda) \in R[\lambda]$ を

$$\begin{aligned} \bar{K}_1(\lambda) &= \bar{k}_0 + \bar{k}_1\lambda + \dots + \bar{k}_q\lambda^q \\ &= \sum_{i=0}^q \bar{k}_i \lambda^i \quad \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

とし、(24), (25)式を(14)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \bar{e}(\lambda) &= \{1 - N(\lambda)K_1(\lambda)\} \frac{\bar{r}(\lambda)}{1 - \lambda^L} \\ &= f^*(\lambda)\bar{r}(\lambda) - N(\lambda)\bar{r}(\lambda)\bar{K}_1(\lambda) \\ &:= \bar{e}^*(\lambda) - \phi(\lambda)\bar{K}_1(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{L+m+l+q-1} \bar{e}_i \lambda^i \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

を得る。ただし、ここで、

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}^*(\lambda) &:= f^*(\lambda) \bar{r}(\lambda) = \sum_{i=0}^{L+m+l-2} \bar{e}_i^* \lambda^i \\ \phi(\lambda) &:= N(\lambda) \bar{r}(\lambda) = \sum_{i=0}^{L+m+l-1} \phi_i \lambda^i \end{aligned} \right\} \dots\dots (27)$$

とする。

また、制御入力

$$\begin{aligned} \bar{u}(\lambda) &= G \bar{r} \bar{u}(\lambda) \bar{r}(\lambda) \\ &= D(\lambda) K_1(\lambda) \frac{\bar{r}(\lambda)}{1-\lambda^L} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\Delta \bar{u}(\lambda) := (1-\lambda^L) \bar{u}(\lambda) \dots\dots\dots (29)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u}(\lambda) &= D(\lambda) K_1(\lambda) \bar{r}(\lambda) \\ &= D(\lambda) K_1^*(\lambda) \bar{r}(\lambda) \\ &\quad + (1-\lambda^L) D(\lambda) \bar{r}(\lambda) \bar{K}_1(\lambda) \\ &:= \Delta \bar{u}^*(\lambda) - \gamma(\lambda) \bar{K}_1(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{2L+n+q-1} \Delta \bar{u}_i^* \lambda^i \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

を得る。ただし、ここで

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{u}^*(\lambda) &:= D(\lambda) K_1^*(\lambda) \bar{r}(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{2L+n-2} \Delta \bar{u}_i^* \lambda^i \\ \gamma(\lambda) &:= (1-\lambda^L) D(\lambda) \bar{r}(\lambda) \\ &= \sum_{i=0}^{2L+n-1} \gamma_i \lambda^i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

とおく。

$\bar{K}_1(\lambda)$ は整定するまでの入出力誤差および制御入力を小さく抑えるように決める。すなわち、以下のような制御系の過渡特性を表す評価関数

$$J_1 = \sum_{i=0}^{\mu+L+q-1} \{ |\bar{e}_i|^2 + \rho^2 |\Delta \bar{u}_i|^2 \} \dots\dots\dots (32)$$

$\mu = \max\{m+l, L+n\}$, ρ : 重み係数

を最小にするように決める。

ここで、以下のようなベクトルを定義する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_1 &:= [\bar{k}_0 \bar{k}_1 \dots \bar{k}_q]^T \in \mathbf{R}^{q+1} \\ \bar{e} &:= [\bar{e}_0 \bar{e}_1 \dots \bar{e}_{L+m+l+q-1}]^T \in \mathbf{R}^{L+m+l+q} \\ \bar{e}^* &:= [\bar{e}_0^* \bar{e}_1^* \dots \bar{e}_{L+m+l-2}^* 0 \dots 0]^T \in \mathbf{R}^{L+m+l+q} \\ \Delta \bar{u} &:= [\Delta \bar{u}_0 \Delta \bar{u}_1 \dots \Delta \bar{u}_{2L+n+q-1}]^T \in \mathbf{R}^{2L+n+q} \\ \Delta \bar{u}^* &:= [\Delta \bar{u}_0^* \Delta \bar{u}_1^* \dots \Delta \bar{u}_{2L+n-2}^* 0 \dots 0]^T \in \mathbf{R}^{2L+n+q} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} \bar{e} &= \bar{e}^* - \Phi \bar{K}_1 \\ \Delta \bar{u} &= \Delta \bar{u}^* - \Gamma \bar{K}_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & 0 & \dots & 0 \\ \phi_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \phi_{L+m+l-1} & \ddots & \ddots & \phi_0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \phi_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \phi_{L+m+l-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(L+m+l+q)(q+1)} \dots\dots\dots (35)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma_{2L+n-1} & \ddots & \ddots & \gamma_0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \gamma_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{2L+n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(2L+n+q)(q+1)} \dots\dots\dots (36)$$

と表せ、評価関数 J_1 は

$$\begin{aligned} J_1 &= \|\bar{e}\|_2^2 + \rho^2 \|\Delta \bar{u}\|_2^2 \\ &= \left\| - \begin{bmatrix} \Phi \\ -\rho \Gamma \end{bmatrix} \bar{K}_1 + \begin{bmatrix} \bar{e}^* \\ \rho \Delta \bar{u}^* \end{bmatrix} \right\|_2^2 \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= [\Phi^T \quad -\rho \Gamma^T] \begin{bmatrix} \Phi \\ -\rho \Gamma \end{bmatrix} \\ F_2 &= [\Phi^T \quad -\rho \Gamma^T] \begin{bmatrix} \bar{e}^* \\ \rho \Delta \bar{u}^* \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

とおくと、(37)式を最小にする $\bar{K}_1$ は

$$\bar{K}_1 = F_1^{-1} F_2 \dots\dots\dots (39)$$

により与えられ、 J_1 の最小値は

$$\min J_1 = J_{1M} = F_2^T F_1^{-1} F_2 \dots\dots\dots (40)$$

$$\begin{aligned} J_{1M} &= \|\bar{e}^*\|_2^2 + \rho^2 \|\Delta \bar{u}^*\|_2^2 \\ &= \sum_{i=0}^{L+m+l-2} \bar{e}_i^{*2} + \rho^2 \sum_{i=0}^{2L+n-2} \Delta \bar{u}_i^{*2} \end{aligned}$$

となる。

〈3・2〉 ロバスト性の最適化 前節ではノミナルなモデルの場合に限定してコントローラ $C_1(\lambda)$ のパラメータ $K_1(\lambda) \in \mathbf{R}[\lambda]$ を適切に決めることによって系の出力が目標入力に有限時間内で定常偏差なく追従できることを示した。しかし、実際には、主軸の回転速度が変動しているため、制御対象のモデルはノミナルなモデルと違い、第2章で示したように周期係数線形系となっている。制御対象にこのようなモデル変動がある場合にも出力が定常偏差なく目標入力に追従できるためには、制御系の自由度 $K_2(\lambda) \in \mathbf{RH}_\infty$ を適切に

選ばなければならない。

本設計問題では、制御対象のパラメータの変動周期は目標入力の基本周期 $T=2\pi(\text{rad})$ と同じである。文献(3)の定理1によると、もし周期 $T=2\pi(\text{rad})$ の繰返しコントローラがコントローラ $C(\lambda)=[C_1(\lambda), C_2(\lambda)]$ に含まれていれば、すなわち $C(\lambda)=[C_1(\lambda), C_2(\lambda)]$ の分母 $\{Y(\lambda)-K_2(\lambda)N(\lambda)\}$ には因子 $(1-\lambda^L)$ が含まれていれば、定常状態において、パラメータの周期的変動が系の出力に及ぼす影響を完全に抑制することができ、出力が目標入力に定常偏差なく追従できる。ここで、 L は繰返しコントローラの段数であり、サンプリングインターバルを $\Delta\theta$ とすると、 $L=2\pi/\Delta\theta$ となる。

また、単位円上に極、零点をもたない制御対象モデルの $N(\lambda), D(\lambda)$ の既約性から、 $N(\lambda)$ と $(1-\lambda^L)D(\lambda)$ は既約であることがわかる。その既約性より、次の方程式

$$X(\lambda)N(\lambda)+(1-\lambda^L)Y(\lambda)D(\lambda)=1 \quad (41)$$

を満たす $X(\lambda), Y(\lambda) \in RH_\infty$ が存在することがわかる。

そこで、(9)式において、(8)式の代わりに(41)式によって求めた $X(\lambda), Y(\lambda) \in RH_\infty$ を用いて

$$Y(\lambda):=(1-\lambda^L)Y'(\lambda) \quad (42)$$

とおき、

$$K_2(\lambda):=(1-\lambda^L)K'_2(\lambda), \quad K'_2(\lambda) \in RH_\infty \quad (43)$$

とクラスを制限すると、明らかに、(43)式の $K_2(\lambda)$ は先に述べた定常状態における追従条件を満たすことになる。ここで、制御系はまだ $K'_2(\lambda)$ という自由度が残っている。この自由度は以下のように決める。

系の制御性能は制御対象の特性変動により激しく劣化されることがある。ここで、本制御系における主軸の回転速度変動などに起因する制御対象のモデルの変動による系の入出力特性の劣化を抑えるために、系に最適なロバスト性を付加するように $K'_2(\lambda) \in RH_\infty$ を決める。

制御対象のノミナルなモデルを $P(\lambda)$ とし、実際のモデルを $\hat{P}(\lambda)$ とすると、系の入出力特性はノミナルの場合と実際の場合においてそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} G_{\tau\bar{y}}(\lambda) &= \frac{P(\lambda)C_1(\lambda)}{1+P(\lambda)C_2(\lambda)} \\ \hat{G}_{\tau\bar{y}}(\lambda) &= \frac{\hat{P}(\lambda)C_1(\lambda)}{1+\hat{P}(\lambda)C_2(\lambda)} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

となる。回転速度の変動などによる系の入出力特性の変動は

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{G}_{\tau\bar{y}}(\lambda)-G_{\tau\bar{y}}(\lambda)}{\hat{G}_{\tau\bar{y}}(\lambda)} \\ &= \frac{1}{1+P(\lambda)C_2(\lambda)} \frac{\hat{P}(\lambda)-P(\lambda)}{\hat{P}(\lambda)} \\ &= S(\lambda) \frac{\hat{P}(\lambda)-P(\lambda)}{\hat{P}(\lambda)} \quad (45) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、 $S(\lambda)$ は制御系の感度関数であり、次式のように定義されている。

$$S(\lambda):=\frac{1}{1+P(\lambda)C_2(\lambda)} \quad (46)$$

(45)式から系のロバスト性を向上させるために、系の感度を小さく抑えなければならないことがわかる。そこで、ロバスト性の指標として、次のような評価関数

$$J_2=\|W(\lambda)S(\lambda)\|_\infty=\left\|\frac{W(\lambda)}{1+P(\lambda)C_2(\lambda)}\right\|_\infty \quad (47)$$

を導入する。本研究では、この問題の可解性を考慮し、重み関数 $W(\lambda)$ を具体的に

$$W(\lambda)=\frac{1}{1-\lambda^L} \quad (48)$$

とし、 $K'_2(\lambda) \in RH_\infty$ は評価関数

$$\begin{aligned} J_2 &= \left\| \frac{1}{1-\lambda^L} S(\lambda) \right\|_\infty \\ &= \left\| \frac{1}{1-\lambda^L} \frac{1}{1+P(\lambda)C_2(\lambda)} \right\|_\infty \\ &= \|D(\lambda)\{Y(\lambda)-K'_2(\lambda)N(\lambda)\}\|_\infty \quad (49) \end{aligned}$$

が $\inf_{K'_2(\lambda) \in RH_\infty} J_2$ を達成するように決めるものとす(4)(5)。

4. シミュレーション

本章では、提案した手法で位置制御系を構成し、シミュレーションによりその有効性を検証する。

時間領域での制御対象の数学モデルを

$$\frac{d^2y}{dt^2}+16\frac{dy}{dt}+100y=100u \quad (50)$$

とする。基準回転速度を

$$\omega_0=10 \text{ rad/s} \quad (51)$$

とし、「角度領域」でのノミナルなモデルを求め、それをサンプリングインターバル

$$\Delta\theta=0.209440 \text{ rad} (=12 \text{ deg}) \quad (52)$$

で離散化すると、そのパルス伝達関数は

$$P(\lambda)=\frac{\lambda(0.0274089+0.0245104\lambda)}{1.398085-2.346165\lambda+\lambda^2} \quad (53)$$

と求められる。この制御対象のモデルに対して、

$$L=2\pi/\Delta\theta=30 \quad (54)$$

より30段の繰返しコントローラを用いて、提案した

図 5 主軸が理想回転時の最短リップルフリーデッドビート制御の応答

Fig. 5. Response using minimum ripple-free deadbeat design in the case of ideal rotation of the spindle.

図 7 主軸の回転速度が変動時の応答 (\$q=29, \rho=1\$)

Fig. 7. Response when the rotational speed of the spindle is fluctuated (\$q=29, \rho=1\$).

図 6 主軸の回転速度変動時の最短リップルフリーデッドビート制御の応答

Fig. 6. Response using minimum ripple-free deadbeat design when the rotational speed of the spindle is fluctuated.

設計法で制御系を構成し、シミュレーションを行った。

図 5 では、主軸が $\omega(t) = \omega_0 = 10 \text{ rad/s}$ [(a) 図] という一定回転速度で回転する理想回転時の最短リップルフリーデッドビート制御のシミュレーション結果を示す。(b) 図のように、目標入力 $\tilde{r}(\theta) = \sin \theta + \sin 2\theta$ という基本周期 $2\pi(\text{rad})$ の周期関数を系に加えたとする。シミュレーション結果[(b) 図] からわかるように、系の出力は 2 周期目で整定されており、提案した高精度位置決めが達成されている。

図 6 では、主軸が $\omega(t) = 10 + \sin\{\theta(t)\}(\text{rad/s})$ [(a) 図] という回転速度で回転するときの最短リップルフリーデッドビート制御のシミュレーション結果を示す。(b) 図のように、目標入力 $\tilde{r}(\theta) = \sin \theta + \sin 2\theta$ を系に加えたとする。シミュレーション結果[(b) 図] から、系の出力は 4 周期目でほぼ整定され、定常状態では主軸回転速度変動の出力に対する影響が完全に抑えられている。すなわち、回転に同期した外乱によって主軸の回転速度が変動している場合でも、提案した高精度位置決めが達成されていることがわかる。

図 5 と図 6 において、定常状態では位置決めの高精度が達成されているが、過渡状態では制御入力に激しく変動している[図 5 (c) と図 6 (c)]。ここで、重み

係数 $\rho=1$ とし、 $\bar{K}_1(\lambda) \in R[\lambda]$ の次数を $q=29$ と整定ステップ数を伸ばして過渡応答の最適化を図る。そのシミュレーション結果を図7に示す。このとき、系の出力は4周期目でほぼ整定され[(b)図]、定常状態では主軸回転速度変動の出力に対する影響が完全に抑えられており、しかも過渡応答における制御入力も低く抑えられている[(c)図]ことがわかる。

シミュレーション結果から、本制御系は、理想回転時にはもちろん、主軸の回転速度が回転に同期した変動が生じている場合でもその影響が完全に抑制され、良好な位置決め精度が実現できていることがわかる。

5. ま と め

本論文では、位置決め制御系において、目標入力信号は主軸の回転角度に関しての周期関数として与えられたとき、主軸の回転に同期する外乱によって回転速度が変動する場合の高精度位置決め制御系の構成法を提案した。すなわち、回転系の回転に同期する外乱による回転速度の変動は、等価的に「角度領域」で制御対象が周期係数線形系となることに注目し、「角度領域」で繰返し制御を適用することにより、高精度位置決め制御系が構成できることを提案した。また、シミュレーションにより本設計法の有効性を検証した。

(平成4年3月31日受付、同4年6月15日再受付)

文 献

- (1) 井澤：総論「精密及び超精密位置決め技術の現状」, 精密工学会誌, 57, 1707(平3-10)
- (2) 中野・余・松尾：「定速回転制御系における角度依存性外乱の新しい除去法」, 電学論D, 112, 409(平4-4)
- (3) 小俣・原・中野：「周期係数線形系に対する繰返し制御」, 同上C, 105, 133(昭60-6)

- (4) M. Vidyasager: Control System Synthesis: A Factorization Approach (1985) MIT Press
- (5) 前田・杉江：アドバンスド制御のためのシステム制御理論(平3) 朝倉書店
- (6) 堀口・西村・長田・富田：「過渡応答を考慮した2自由度デッドビート制御」, 計測自動制御学論, 25, 1046(平元-10)
- (7) 舟橋・山田：「2自由度補償法によるリップルフリー最適デッドビート制御」, 同上, 27, 33(平3-1)
- (8) 中野・井上・山本・原：繰返し制御(平元) 計測自動制御学
- (9) J. Ragazzini & G. F. Franklin: Sampled-Data Control Systems (1958) McGraw-Hill
- (10) L. Jetto: "Ripple-Free Tracking Problem", Int. J. Control, 50, No.1, 349(1989)

余 錦 華 (准員)

1963年5月23日生。1983年7月中国中南工業大学工業自動化学科卒業。平成2年3月東京工業大学大学院理工学研究科(制御工学専攻)博士前期課程修了。

同年4月同大学大学院博士後期課程(制御工学専攻)入学、現在に至る。計測自動制御学会会員。

中 野 道 雄 (正員)

昭和14年2月17日生。43年東京工業大学大学院博士課程電気工学専攻修了。同年同大学工学部助手、48年同助教授、61年同教授。49年より高エネルギー物理学研究所併任。工学博士。計測制御機器、パワーエレクトロニクス系の制御に関する研究に従事。計測自動制御学会、日本シミュレーション学会、IEEE会員。