永久磁石間の磁気力の剛性に関する基礎的検討

正 員 村 上 力 (都立科技大)

Fundamental Investigation on Stiffness of Magnetic Forces of Permanent Magnets

Chikara Murakami, Member, (Tokyo Metropolitan Institute of Technology)

In this paper, mutual magnetic forces between two permanent magnets which have no pole piece or yoke are discussed using equivalent current sheets around the magnets are discussed and two important results are obtained. The first result is two decrease methods of unwanted horizontal or lateral unstable stiffness in case of vertical repulsion configurations. The second one deals with 45-degree direction stiffness, which is shown to be zero, using a two parallel straight sheets model. At first, a very simple two parallel currents model is used. This simple model gives us very important insight into the magnetic forces. Yonnet's theorem about magnetic force stiffness is applied to two above-mentioned results, showing correctness of the analyses. Finally, several numeric examples from published papers are shown.

キーワード：磁気軸受，磁気力，剛性，永久磁石，表面電流，磁気浮上

1. ま え が き

Tsui の提案による永久磁石の磁気モーメントを表面（磁極面に対する側面）電流ループに置換する手法は，永久磁石の磁化分布が一樣であれば，相互作用力の式の簡易化が容易で，かつ反発力の実験では，計算値とよく合うこと⁽¹⁾が海老原ら⁽²⁾⁽³⁾によっても報告されている。磁石間の磁気力は電流間の力で計算されるので，電流間の力，特に電流間の相対変位に対する力の剛性を把握しておくことが重要となる。

本論文では，主として磁気浮上への応用を念頭において，まず逆方向の平行電流間の斥力およびそれと直角方向の横ずれの力，およびそれらの剛性を子細に検討する。平行電流間の力の剛性を理解すると，磁気浮上や磁気軸受などの浮上力や剛性の近似計算ができる場合があったり，永久磁石の形状や配置に対して直感性や洞察力が得られる点で有利であると思われる。特に，平行電流の45度方向の剛性がゼロであることを示すとともに，その延長として，磁石の場合の剛性ゼロ方向の存在も示す。

応用例として，磁石の斥力浮上の際の横ずれ剛性の

低減化法を提言する。以上の剛性に関する新知見は Yonnet の剛性に関する定理⁽⁴⁾に含まれることを示すとともに，同定理を利用して，軸対称に配置された磁石間の剛性にもゼロとなる方向が存在することを示す。

最後に，公表された文献からの計算例から剛性を求め，新知見との関連も論ずる。

2. 平行電流の相互作用力

2本の無限長の平行電流 I_1 , I_2 の単位長に作用する力 F は，

$$F = k I_1 I_2 / r \quad (\text{N/m}) \dots\dots\dots (1)$$

ここに， k ：比例係数 ($k = 2 \times 10^{-7} \text{ H/m}$)，

r ：線間距離 (m)

力の作用方向は r の方向である。以後，右手系の直交座標系 $o-xyz$ の $x-z$ 座標の原点 o に片方の電流を固定し (y 軸が電流)，他方の平行電流位置 A を任意に選んで，その点における x および z 方向の力と剛性を調べる。ここでは A の位置として，図1に示すように， x 軸に平行な直線 $z=g$ (g はギャップと考えてよい) 上に任意の一点として選び， A を通る $-y$

図 1 座標系と記号
Fig. 1. Coordinate system and notation.

方向の電流（原点とは逆方向）に対する斥力を検討してみる。つまり $z=g$ の面を浮上される側の磁石の磁極面とし、A の位置を側面の下端とする。 $z=g$ を保持したまま側面を x 方向にゼロから A 点まで横ずれさせた場合の A 点の側面電流が原点の電流に及ぼす斥力の x, z 方向の成分や剛性が、A の x 座標位置によってどのように変化するかを調べてみる。

吸引力の場合は F の符号が逆になるだけで、取扱いは斥力の場合と全く同様であるから省略する。 z はしばらく g に固定せずに z と置く。 x および z 方向の成分をそれぞれ下添字で表現すると (F_z は斥力, F_x は横ずれ力と考えてよい)

$$F_x = F \sin \theta = C(1/r)(x/r) \dots\dots\dots (2)$$

$$F_z = F \cos \theta = C(1/r)(z/r) \dots\dots\dots (3)$$

ただし,

$$C = kI_1 I_2 \dots\dots\dots (4)$$

は r が単位距離にあるときの斥力で, x, z に直接には無関係な量である。また,

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \dots\dots\dots (5)$$

である。

次に x, z 方向の剛性 K_x, K_z を求めると,

$$K_x = \frac{\partial}{\partial x} F_x = C(-x^2 + z^2)/r^4 \dots\dots\dots (6)$$

$$K_z = \frac{\partial}{\partial z} F_z = C(x^2 - z^2)/r^4 \dots\dots\dots (7)$$

これら 2 式から次の重要な関係が得られる。

$$K_x + K_z = 0 \dots\dots\dots (8)$$

この結果は、平行な 2 本の無限長磁石間の剛性でも導出されている⁽⁶⁾。

(2), (3), (6), (7) 式を横座標 x の関数として示したのが図 2 である。同図においては、横ずれ剛性 K_x は横ずれ力 F_x 曲線の接線の x 軸に対する傾度であり、 $-K_x/C$ として示してある。 $x=g$ すなわち $\theta=45^\circ$ の位置が F_x の最大位置となるが、 K_x はそこではゼロとなる。つまり 2 本の平行電流を 45° 方向に動かそうとすれば、 45° 方向の作用力は存在するが一

図 2 図 1 の A 点の x 変化に対する力と剛性の変化
Fig. 2. Force and stiffness at point A of Fig. 1.

定なので 45° 方向の剛性はゼロなのである。 $x>g$ では K_x の符号が逆転することに注意されたい。また、上下の反発剛性 K_z は (8) 式から K_x の逆符号であり、ともに $x=0$ に対して対称であるが、 K_z はこの図の F_z 曲線の接線の傾度でないことにも注意されたい。以下、これらの結果を幾つかの具体的な例に適用してみる。

3. 応 用 例

〈3・1〉 横ずれ剛性を小さくする ここでは簡単のため、着磁方向の薄い磁石でギャップが狭いという条件をつける。これは二つの円形コイルで半径がほぼ等しく、両者が接近している場合には、両者間の力は平行電流による近似が良好であること⁽⁶⁾を参考にした条件である。つまり接近した 2 本の電流は、近傍のみの影響が大きいの、無限長の平行電流間の部分的な力で近似できるであろう、という前提で議論を進め、角柱や円柱のような具体的な例への推論を下すことにする。

例えば反発浮上で横ずれ剛性 K_x を小さくすることを検討する。磁石も含めた浮上体の全質量を m とすれば、重力 W は $W=mg$ (g : 重力加速度) であるから、横ずれない位置での浮上の釣り合い点 z は、(3) 式において $x=0$ とおいて直ちに

$$z = C/W \dots\dots\dots (9)$$

これを (6) 式で $x=0$ とおいて代入すると、

$$K_x = C/z^2 = W^2/C = W/z \dots\dots\dots (10)$$

この式の意味は「 K_x を小さくするには、 C の大きい、つまり強力な磁石を用いて浮上の高さをなるべく高くせよ」ということに等しい。

次に、これを更に小さく方法を提案する。(3) 式の $F_z(x=0)$ を図で示すと図 3(a) のようになり、 $-W$

図3 反発、吸引と反発併用と安定点の剛性
Fig. 3. Vertical force, stiffness, and stable point.

と交わった点が $K_z < 0$ なので z 方向に対して安定な平衡点である。下側の永久磁石を例えば半分にして浮上磁石の上方へもっていった、それを上から吸引する場合を考えてみよう。上側だけの場合には吸引であるから、横ずれ剛性は安定である。上下方向 (z 軸) の吸引力と W の関係を (b) 図に示す。 $-W$ との交点は今度は不安定な平衡点となる。上下を同時に置くと、両者の力の方向はともに上向きである。従って、両者を合成した力は U 字形となる ((c) 図)。このとき、この U 字曲線が $-W$ と交わるように両者の距離を調節する必要がある。もしも (c) 図のように $-W$ と接する場合には安定、不安定の両平衡点が重なり、上下方向剛性も横ずれ剛性とともにゼロとなるが、上方の安定マージンもゼロとなって、ほんの少しの上方外力によって上方の不安定領域に入るので実用にはならない。

次に、両者の距離をもう少し離すと $-W$ 直線は U 字曲線を横切り、2 点で交わる。この場合、下側は安定な、上側は不安定な平衡点である ((d) 図)。(a) 図との違いは、安定な平衡点における U 字曲線の接線の傾度がより低く選べることである。つまり、 K_z が小さくできた分だけ横ずれ剛性も小さくなる、ということである。ただし、上方の安定マージンが減少するという犠牲を伴うことは避けられない。

(a) 図において、弱い磁石を用いると、斥力曲線がより座標軸に近付き、平衡点も下方になり、その点における接線傾度が急になる。逆に、強力な磁石では、 W と交わる角度がより小さくなって横ずれ剛性も小さくできる。これらの事柄は (9), (10) 式の直感的説明にもなっている。

ここで、今述べた反発と吸引の併用方式における外力に対する安定限界を検討してみる。外力がなければ浮上位置は下側の安定な平衡点に落ち着き、下方への

外力に対しては、斥力の限界値まで耐えられるので、ここでは問題としないことにする。上方への外力に対しては、静的には $W - F_{\min}$ ($F_{\min}$ は図 3(d) の U カーブの最小値) まで耐えられることはいうまでもない。

$-W$ と U に囲まれた部分の面積 (ハッチ部分) は、浮上体を下側の安定点から上側の不安定点までもっていくために必要なエネルギーである。これを大きくするためには、なるべく強力な磁石で浮上の高さを大にすべきであることに変わりはない。弱い磁石では U 曲線の底部がとがってくるからである。強力な磁石を使うことはむだなようにも思われるが、ギャップも大きいので強力な渦電流ダンパのスペースにも利用できる。実用的には上側の安定点の少し下側にタッチダウンベアリングなどのストッパを設け、予測される外乱に応じて上下の距離を決める必要があろう。

ここで外力が打撃力の場合を考える。単発の打撃力 $f \cdot \Delta t$ の場合には、浮上体を与えられる速度を v とすると、 $1/2 \cdot mv^2$ が前述の U と W に囲まれた面積に等しい限界速度 v_l に対して

$$f \cdot \Delta t / m = v < v_l \quad \dots\dots\dots (11)$$

を満足すれば、力のピーク値 f が前述の静的限界力よりもはるかに大きくてもストッパにはあたらない。

なお、図 3(a), (b) の斥力と吸引力の曲線は同一磁石であっても、減磁力が異なるので等価的電流 I_1 , I_2 または (4) 式の C が異なり、(b) 図のほうが大となる。従って、(c) 図は左右対称とはならないが、前述の定性的説明はそのまま通用する。

(3・2) 積層磁石によるラジアル剛性増大法

z 軸を対称軸とする回転型の磁気軸受においては、軸方向に着磁した半径の異なる円筒磁石を同心円状に内外に配置して斥力によって安定なラジアル剛性を利用する場合が多い。この場合にはギャップで対向する面に同心円状に相互に逆方向の等価側面電流が周方向に平行に流れ、ギャップ面とは反対側の面にもそれぞれ逆方向の側面電流が流れている (図 4)。

図4 軸対称磁石のラジアル反発配置
Fig. 4. Radially repulsive arrangement.

従って、ラジアル剛性を上げるためには、ギャップ面の電流が近いのでこれだけに着目することにする。図2の K_x カーブからわかるように、 $|\theta|=45^\circ$ で剛性の符号が逆転するので、磁石を z 方向にあまり長くすべきではなく、理想的にはギャップ以下の厚さにして、 $|\theta|>45^\circ$ になるようにスペーサを間に挟んで、極性を逆にするのが望ましい。なぜなら、図4からわかるように、多数のギャップ面電流が、対向するそれらと相互作用するのであるが、磁石の z 方向の長さがギャップ以下だと、両端の電流間で最大の θ でも 45° 以下となり、ラジアル剛性は逆符号とならないからである。ただしこの考えは、磁石材料の量の節約から出たもので、実際には製作コストなどから実用的ではない。

極端な例として、無限長の磁石では $|\theta|>45^\circ$ が逆に作用して剛性はゼロとなる。これは図2の K_x または(6)式を x の全域にわたって積分するとゼロになることから簡単に証明できる(省略)。しかし、斥力そのものには有効であることは同図の F_z から明らかである。この斥力は無限長の磁石ではラジアル変位、つまりギャップの距離に依存しない一定値であることは興味がある。現実には磁石のラジアル肉厚の有限性から、反対面の逆方向の一定値も作用して、磁石内では強磁界、外部では磁界なしの状態となり、トロイダルコイルの磁束漏れがないことに似ている。

結局、軸方向に長い円筒磁石では、両端付近のみが剛性に寄与し、内部はむだになるので、適当な数と厚さのスペーサを挟んで着磁方向を逆にすべきである。

〈3・3〉 磁石面の 45° 方向の剛性 永久磁石の出現以来、Earnshawの定理に反するような各種の試みが今でもなされている(もちろん成功していない)のは、 45° 方向の剛性がゼロであることを指摘する文献がなかったことにも起因しているように思われる。以下これを証明しよう。

例として、図5(a)のような回転対称軸 z に対して

図5 リング磁石の 45° 対向と直線化近似モデル

Fig. 5. Ring magnets and approximated plane model.

45° 方向(矢印)に着磁した2個のリング状永久磁石を対向させたもの(原点を対称に、 $-z$ 側にもある)を、 y 軸に平行な直線に延ばし、原点を移動した無限長磁石モデル図5(b)を考える。 45° 直線に直交する二つの電流面 A, B が対向するが、この 45° 直線に対称であれば両面の大きさ[図5(a)の矢印の長さ]は同じでなくてもよい。

まず両面上の任意の点 a, b を取上げ、相互間の(この場合)斥力 F を求める。両点間の距離を r とする。 a, b の 45° 線に対称な2点が必ず存在し、それらを a', b' とすると当然その距離も r であり、斥力を F' とする。従って、例えば A の 45° 線で2等分された片方半分だけと B 全面との組合せと、残された A 面半分と B 全面との組合せは、それぞれ 45° 線に対称な直線で結ばれた組合せとなり、両者の合計がすべての組合せを網羅するので、各対称の組合せの斥力を合成し、全組合せを合算すれば A, B 間の全斥力の合成が求められる。

いま、1組だけを取上げ、 b, b' の2点を $x-z$ 座標の原点に同時に平行移動して画くと図6のようになる。 $a(-x, -z)$ と $a'(-x', -z')$ は 45° 線に対称であるから

$$x=z', z=x' \dots\dots\dots (12)$$

これを利用し、 F, F' の x 成分 F_x, F'_x だけを求めると(2)、(6)式より

$$\left. \begin{aligned} F_x &= Cx/r^2 \\ F'_x &= Cx'/r'^2 = Cz/r^2 = F_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

従って、両者の x 方向の剛性の和は

$$K'_x = \frac{\partial}{\partial x} F'_x = \frac{\partial}{\partial z} F_x = K_x \dots\dots\dots (14)$$

を用い、かつ(8)式から

$$K_x + K'_x = K_x + K_x = 0 \dots\dots\dots (15)$$

これで x 方向の剛性はゼロであることが証明された。同様にして z 方向剛性もゼロとなる。また、 A, B 面と反対側の電流の影響も同様に剛性はゼロである。

前述までの議論は図5(a)のように着磁方向(矢

図6 45° 線に対称な力の幾何学的関係
Fig. 6. Geometric relation between two forces.

印) が 45° 線と直角であったが、着磁方向が 45° 線に平行な場合でも x, z 方向の剛性がゼロであることを全く同様に証明できる。

以上の証明は、直線で無限長の磁石では厳密に成立するが、現実にはリング状の磁石なので、 x, z 方向の剛性が正確にゼロであるとは断言できない。リング状磁石を含めた軸対称の場合の検討を次章で行う。

4. Yonnet の剛性定理を用いた検討

Yonnet は磁極やヨークを伴わない裸の永久磁石間の磁気力の剛性の関係を heuristic な方法で導いている⁽⁴⁾。ここでは、これを Yonnet の剛性定理または単に剛性定理と呼ぶことにし、これを活用して剛性に関する直感的な概念を、等価側面電流ともからませて検討してみよう。

まず、剛性定理は次式で与えられる。

$$K_x + K_y + K_z = 0 \quad (16)$$

着磁方向が無限長の二つの磁石を平行に配置すると、〈3・1〉節でも述べたように、磁石の外部は磁界がゼロなので、どの方向の剛性もゼロで、(16)式は満たされる。

次に同じ無限長でも、着磁方向が長手ではなく、それと直角の方向ならば、等価表面電流はすべて長手方向で平行となる。従って、長手方向を y 軸に選べば $K_y = 0$ となるので、第2章の(8)式が得られる。

z 軸を対称軸とする図5(a)のような対称形状配置の場合には、対称条件から

$$K_x = K_y = -\frac{1}{2}K_z \quad (17)$$

と与えられる。(17)式は前章の形態とは全く無関係に、永久磁石が磁極などの磁性材料を伴わずに裸で存在し、 z 軸に対して軸対称であることが条件である。従って、もちろん、平面近似の必要はなく、対称であればいかに複雑な構造であっても、磁気力の重ね合せの原理が成り立ちさえすれば、厳密な立体構造のまま論ずることができる。

二つの電流線素 $d\mathbf{l}_1, d\mathbf{l}'_1$ 間に発生する力 $\mathbf{F}$ は(1)式の記号を使って (下線はベクトルを意味する)

$$\mathbf{F} = \mu_0 I_1 I_2 \iint \mathbf{r} (d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}'_1) / (4\pi r^3) \quad (18)$$

となる⁽³⁾。明らかに直交する線素間では力が発生しない。従って、例えば2個の円筒形の磁石の対称軸を z 軸に一致させた図7(a)のような場合には、(17)式から K_x に関しては全周の電流が寄与するが、 K_x に関しては全周の半分しか効いていない。従って、これと等価な磁石形状としては図7(b)に示すように周長の

等しい正方形の角柱磁石が対応する。

さて、(17)式に戻って K_x も K_z もゼロでない場合に剛性がゼロになる方向が存在することを次に示そう。例えば、図7に示す2個の磁石の一方を z 軸に対して θ の方向に ds だけ移動した場合を考える。対称であるからその方向を z - x 面内にあるものとしても一般性は失われない。図8から明らかなように、

$$dx = ds \sin \theta, \quad dz = ds \cos \theta \quad (19)$$

である。このときの ds 方向の力の増分 dF_s は

$$\begin{aligned} dF_s &= K_x dx \sin \theta + K_z dz \cos \theta \\ &= ds (K_x \sin^2 \theta + K_z \cos^2 \theta) \\ &= ds K_s \quad (20) \end{aligned}$$

すなわち、

$$K_s = K_x \sin^2 \theta + K_z \cos^2 \theta \quad (21)$$

これがゼロとなるのは

$$\tan^2 \theta = -(K_z/K_x) = 2 \quad (22)$$

$$\theta \approx \pm 54.7 \text{ deg} \quad (23)$$

軸対称でなく、 y 方向だけに側面電流が無限長の場合には $K_y = 0$ なので(22)式が1となり $\theta = \pm 45 \text{ deg}$ が得られ、第2章の結果と一致するのである。

以上の結果から、図5のような磁石配置では、 K_x, K_z が微弱であると予測されるだけでなく、対称軸に対して約 54.7 deg の方向の剛性ゼロとなるので無制御での浮上体の重心維持が不可能なのである。もちろん、重心回りの剛性は大きな不安定となるので無制御の浮上は不可能ではあるが、もしも z 軸回りの回転によってこまのような動的な安定を維持できたとして

図7 円筒磁石配置と剛性等価な正方形磁石配置
Fig. 7. Equivalent stiffness pairs of magnets.

図8 s 方向変位 ds と dx, dz との関係
Fig. 8. Relation between ds, dx and dz .

も、併進の剛性が保証されないので浮上は不可能である。

5. 数値計算例

本章では、一部の実測データと、公表された文献からの計算データから剛性を求めて、前章までの検討の妥当性を示すことにする。

実測は2個のリング形希土類磁石を軸対称に配置し、 K_z 、 K_x を斥力と横ずれ力の微係数として求めた。リングの寸法は外径60×内径×48厚さ5mmである。ギャップを10mmにした点における剛性は

$$K_z = -1.76 \text{ N/mm}, K_x = 0.848 \text{ N/mm}$$

$K_z = -2K_x$ とするには約3.6%の誤差である。

以下の二例は、公表された文献からのもので、等価側面電流から変化に対する斥力と横ずれの力を計算して与えられた曲線に、接線を引いて剛性を求めたものである。

まず、無限長磁石を含む文献(7)の例を述べる。図9はその配置で、下側が無限長磁石で固定され、上側の二つが被浮上体で、すべて図の z 方向に着磁され、浮上のための斥力が得られる。同文献の図4の z 変位に対する F_z 曲線と、図6の y 変位に対する F_y 曲線から、 $[y(\text{mm}), z(\text{mmm})] = (2, 6), (2, 10), (10, 10)$ の3点を選んで接線から微係数を求めた結果、いずれも

$$K_y + K_z = 0 \quad (24)$$

を満足した。これは当然45°方向、つまり

$$y \pm z = 0 \quad (25)$$

方向の剛性がゼロであることを意味する。

次は、文献(3)の円柱磁石の等価側面電流からの計算データである。図7(a)と同配置であるが、同寸法で、ともに z 方向着磁である。やはり、与えられた曲線に接線をひいて、微係数を3点に対して求めたと

図9 剛性計算に利用した文献(7)の磁石配置
Fig. 9. Magnet arrangement of Ref. (7).

ころ、

$$K_z = -2K_x \quad (26)$$

の結果が得られた。このことは(23)式の $\theta = \pm 54.7$ deg 方向の剛性がゼロであることを意味する。

6. おわりに

前章まで鉄片などのない永久磁石間に作用する相互の力の剛性について、等価側面電流を用いて簡単な解析を行い、幾つかの新しい結果を得た。それらをまとめると以下のようになる。

(1) 2本の無限長平行電流、または2枚の無限長平行磁石面に直交する面内で、対向する方向に対して45 deg 方向の剛性はゼロである。

(2) (1)において、対向方向と、それと直角な方向の剛性の和はゼロである。

(3) 永久磁石による反発浮上において、横ずれ剛性を小さくするには、浮上高を大にすべく、強力な磁石を用いるか、上部からの吸引をも併用することの有効性と、安定/不安定平衡点との関係を示した。

(4) 軸対称形態に配置した固定部と浮上部の2組の磁石間の、軸に対して54.7 deg 方向の剛性はゼロである。

(5) 磁石の積層化による磁石の節約法を等価側面電流を用いて直感的解釈を与えた。

(平成4年5月25日受付、同4年10月6日再受付)

文 献

- (1) J. B. Y. Tsui, D. J. Iden & K. J. Strnat: "The Effect of Intrinsic Magnetic Properties on Permanent Magnet Repulsion", *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-8, No. 2 (1972-6)
- (2) 海老原・今川・渡部:「永久磁石反発形磁気浮上力と横ずれ力の解析」, 電学論 B, 106, 977 (昭61-11)
- (3) H. S. Nagaraj: "Investigation of Magnetic Fields and Forces Arising in Open-Circuit-Type Magnetic Bearings", *Tribology Trans.*, 31, 192 (1986-2).
- (4) Jean-Paul Yonnet: "PASSIVE MAGNETIC BEARINGS", 3rd Intn'l W/S on Rare Earth-Cobalt Magnets and Their Applications, 241, (1978)
- (5) 川本:「高速回転用の磁気軸受に関する研究」, 東工大学位論文, 52-62 (昭58-6)
- (6) 竹山: 電磁気学現象理論, p. 393 (昭30) 丸善
- (7) 海老原・鈴木:「PM 形磁気浮上装置の斥力特性」, 電学論 D, 18, 455 (昭63-5)

村上 力(正員)

東北大学通信工学科卒業。科学技術庁航空宇宙技術研究所において、衛星の姿勢運動と制御関連の研究(特に宇宙用磁気軸受)に従事。52年都立科学技術大学航空宇宙工学科教授。同研究を続行中。工学博士。