V. 車両制御と非線形制御理論 —— ノンホロノミックシステムの制御 ——

キーワード

ノンホロノミックシステム, 車両制御, 非線形制御理論,
連続状態フィードバックで安定化できないシステム

正員 三 平 満 司

東京工業大学 情報理工学研究所 情報環境学専攻

1. はじめに

工場内で物資の自動搬送などのためには車両やけん引車両の制御が必要となる。しかし近年, 車両システムがノンホロノミックシステム⁽²⁾であり, 非常に制御しづらいシステムであることが非線形制御理論により明らかになった⁽⁵⁾。ここではこの車両システムの制御の問題点と制御方策について解説する。

2. ノンホロノミックシステム

車両システムはよくノンホロノミックシステムであるといわれる。それではノンホロノミックシステムとはどのようなものであろうか。

2.1 ホロノミックな拘束

ホロノミックな拘束とは剛体の力学において速度によらず, 位置や角度のみで表される拘束のことである。例えば図1において二次元空間上の一つの剛体の運動を考える。一般に1個の剛体(図1)は二次元空間上の位置 (x, y) と回転 θ の3自由度を持っている。しかし, この剛体の一点を図1のように拘束すると以下の2つの拘束条件式を満たす必要がある。

$$L\cos(\theta)=x, \quad L\sin(\theta)=y \dots\dots\dots (1)$$

この拘束は位置 x, y と角度 θ のみの関数であり, 速度に依存していない。このような拘束がホロノミックな拘束である。さて, 一点を拘束された剛体(図1)の自由度は基本的に回転角 θ の1自由度だけである。これは元々3自由度のシステムが2つのホロノミックな拘束式(1)式により1自由度のシステムになったと考えられる。このようにホロノミックな拘束は拘束の数だけシステムの自由度を減らすことが知られている。また, このようなシステムの運動方程式を求めることは容易である。

2.2 ノンホロノミックな拘束

ノンホロノミックな拘束とはホロノミックでない拘束のことである。つまり, 位置(角度)のみでは表されない拘束

図1 ホロノミックな拘束

図2 三輪車両

束(例えば, 拘束式に速度が含まれる場合)のことである。その中の代表的なものとして車両などの転がり拘束があげられる。図2の三輪車両を考える。車両のボディーには後輪の中点Pの位置 (x, y) と姿勢角 θ の3自由度がある。しかし, 車両が移動する場合, 車輪が横滑りしないと仮定すると, P点は後輪の方向(θ 方向)にしか移動できないことになる。この拘束を式で表せば

$$\frac{dx}{dt} = \cos(\theta)z, \quad \frac{dy}{dt} = \sin(\theta)z \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで z は車両の道のり, z は車両の速度である。これから z を消去すれば次の拘束式を得る。

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) \dots\dots\dots (3)$$

これがシステムの挙動を示す拘束式である。この拘束式は速度 $dy/dt, dx/dt$ の関数であり, ノンホロノミックな拘束となる。このシステムの自由度は1つの拘束式(3)式をもつにも関わらず3自由度のままである(これは一般の自動車が任意の位置姿勢に移動できることから明らかであろう)。このようにノンホロノミックな拘束はシステムの自

Control Theory and Industrial Application.
V. Analysis and Control of Mobile Robots using Nonlinear Control Theory—Control Problems in Non-Holonomic Systems.
By Mitsuji Sampei, Member (Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology)

由度（一般化座標の数）を減らさない拘束であり、その分このようなシステムの運動方程式の導出は煩雑になる。

ノンホロノミックな拘束としては車両のような転がり拘束のほかにも宇宙ロボットにおける運動量保存の法則などがよく知られている。

2.3 三輪車両の状態方程式⁽³⁾

ノンホロノミックな拘束を持つシステムの挙動を運動方程式（2階の常微分方程式）で記述し、制御することは煩雑であるが、拘束条件に着目して車両の挙動を状態方程式に書き表すことはそれほど困難ではない。例えば図2の三輪車両について考えれば、3つの車輪が横滑りをしないという仮定より、車両は図2のO点を中心に回転することが容易にわかる。このとき車両の姿勢 θ の時間変化は

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\tan(\alpha)\dot{z}}{L} \dots\dots\dots (4)$$

となる。これと先ほどの拘束式(2)より状態方程式は

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{z} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \dot{z} \tan(\alpha) \dots\dots\dots (5)$$

となる。このシステムの操作入力には車両の速度 $\dot{z}$ と操舵角 α であるが、後の議論を簡略化するため $u_1 = \dot{z}$ と $u_2 = \dot{z} \tan(\alpha)$ を入力と考え、適当な状態 ξ を定義して状態方程式を、

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{pmatrix} \cos(\xi_3) \\ \sin(\xi_3) \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_2 = f_1(\xi)u_1 + f_2(\xi)u_2 \dots\dots\dots (6)$$

と表しておこう。このようにノンホロノミックシステムであっても加速度を考えなければ（入力として速度などをとれば）状態方程式を得ることは困難なことではない。

そこではなぜ、ノンホロノミックなシステムが注目されるのであろうか。それは次の章で示すように、ノンホロノミックなシステムの多くが非常に制御しづらい状態方程式で表されるからである。これは非常に簡単にみえる三輪車両の状態方程式(6)式も例外ではない。

3. 連続な状態フィードバックで安定化できない状態方程式

車両の状態 ξ を0にする制御を考えよう。

3.1 近似線形化で制御できないシステム

非線形状態方程式で表されるシステムを制御する一番簡単な方法は状態方程式の左辺をテーラー展開の一次近似をして近似線形状態方程式で表し、この近似線形システムに対して従来の線形制御理論を用いて制御系を設計する方法である。しかし、三輪車両の状態方程式(6)式ではこの方法が使用できない。なぜなら線形近似システムは

$$\frac{d\xi}{dt} = f_1(0)u_1 + f_2(0)u_2 + O^2(\xi, u_1, u_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_2 + O^2(\xi, u_1, u_2) \dots\dots\dots (7)$$

となり、明らかに不可制御なシステムとなる。

3.2 非線形システムの可制御性

前節で述べたように状態方程式(6)式の線形近似システムは不可制御である。それでは元の非線形状態方程式も不可制御なのであろうか（非線形システムの可制御性の定義は複雑であるのでここでは直感的な意味で解釈されたい）。答えは否である。それは物理学的に車両を原点 $\{(x, y, \theta) = (0, 0, 0)\}$ に移動させることができることから明らかであろう。これを非線形制御理論を用いて考えてみよう。

状態が $\xi = \xi_0$ であると仮定する。 $u_1 = 1, u_2 = 0$ とすれば状態の時間微分は $\dot{\xi} = f_1(\xi_0)$ となり、状態は $f_1(\xi_0)$ の方向に移動できる。同様に $u_1 = 0, u_2 = 1$ とすれば状態は $f_2(\xi_0)$ 方向に移動できる。つまり、状態は $\xi = \xi_0$ のとき $f_1(\xi_0)$ と $f_2(\xi_0)$ 方向に移動できることになる。それでは状態はこれらの方向以外には移動できないのだろうか。このことを調べるために初期値 $\xi(0) = \xi_0$ のときに次のような入力を考える。以下で t_1 と t_2 は十分小さい定数と仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_1(t) &= 1 & u_2(t) &= 0 & (0 \leq t < t_1) \\ u_1(t) &= 0 & u_2(t) &= 1 & (t_1 \leq t < t_1 + t_2) \\ u_1(t) &= -1 & u_2(t) &= 0 & (t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + t_2) \\ u_1(t) &= 0 & u_2(t) &= -1 & (2t_1 + t_2 \leq t < 2t_1 + 2t_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

このとき、時刻 $t = 2t_1 + 2t_2$ において状態 $\xi(2t_1 + 2t_2)$ は

$$\xi(2t_1 + 2t_2) = \xi_0 + [f_1, f_2](\xi_0)t_1t_2 + O^3(t_1, t_2) \dots\dots\dots (9)$$

となることがわかっている。ここで、 $[f_1, f_2](\xi)$ はLie bracket⁽¹⁾であり、 $f(\xi)$ の第 i 要素を $f_{(i)}\xi$ とすると

$$[f_1, f_2](\xi) = \frac{\partial f_2}{\partial \xi} f_1(\xi) - \frac{\partial f_1}{\partial \xi} f_2(\xi) \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{(1)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_{(1)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_{(1)}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_{(2)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_{(2)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_{(2)}}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial f_{(3)}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_{(3)}}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_{(3)}}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

と定義される。これは、初期値が $\xi(0) = \xi_0$ のとき、状態が $[f_1, f_2](\xi_0)$ 方向にも移動できることを示している。これを繰り返せば、状態は初期値 $\xi(0) = \xi_0$ から $f_1(\xi_0), f_2(\xi_0), [f_1, f_2](\xi_0), [f_1, [f_1, f_2]](\xi_0), \dots$ 方向に移動できることになる。もし、これらが全空間を張るならば、状態は任意の方向に移動できる。つまり（何らかの意味で局所的に）可制御と考えることができる。三輪車両の場合

$$[f_1, f_2](\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\sin(\xi_3)}{L} \\ -\frac{\cos(\xi_3)}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、任意の ξ において $f_1(\xi), f_2(\xi), [f_1, f_2](\xi)$ は三次

元空間を張る。つまり、三輪車両システムは直感のみでなく、非線形システム理論的にも（なんらかしらの意味で）可制御であることが示された。

3.3 連続状態フィードバックで安定化できないシステム⁽⁵⁾

これまで述べたように三輪車両システムは線形近似システムは可制御ではないが、非線形システムの意味では可制御なシステムである。とすればこのシステムを安定化することは容易なのであろうか。状態方程式(6)式を安定化させるためには状態フィードバック

$$u_1 = \gamma_1(\xi), u_2 = \gamma_2(\xi) \quad \cdots \cdots (12)$$

を考えるのが普通であろう。しかし、車両システムの場合には $\gamma_i(\xi)$ が状態 ξ に関して連続な関数では安定化できないことが以下のように容易に証明できる [$\gamma_i(\xi)$ が状態 ξ に関して連続な関数であるとき、このフィードバックを連続状態フィードバックと呼ぶことにする]。

状態方程式(6)式を安定にする連続状態フィードバックの(12)式が存在したと仮定しよう。つまり、閉ループ系

$$\frac{d\xi}{dt} = f_1(\xi)\gamma_1(\xi) + f_2(\xi)\gamma_2(\xi) \quad \cdots \cdots (13)$$

が安定である ($\xi \rightarrow 0$ となる) と仮定する。このとき簡単な考察により絶対値の十分小さな定値外乱 $\delta \in R^3$ に対して

$$\frac{d\xi}{dt} = f_1(\xi)\gamma_1(\xi) + f_2(\xi)\gamma_2(\xi) + \delta \quad \cdots \cdots (14)$$

の解は最終的に原点の十分近い近傍内にとどまることが証明できる (絶対値の十分小さな外乱に対して状態が原点近傍にとどまるようにすることは実際の制御でも重要である)。さらにこのとき、この近傍の中に平衡点 ξ_s が存在することが証明できる。 ξ_s が平衡点であるということは状態の時間微分が 0 ということだから

$$0 = f_1(\xi_s)\gamma_1(\xi_s) + f_2(\xi_s)\gamma_2(\xi_s) + \delta \quad \cdots \cdots (15)$$

を満たさなければならない。これは

$$f_1(\xi_s)u_1 + f_2(\xi_s)u_2 = -\delta \quad \cdots \cdots (16)$$

を満たす原点に十分近い ξ_s と u_1, u_2 が存在することを示している。これがシステムが連続状態フィードバックで安定化できるための必要条件となる。逆に条件が満たされないとき (原点に十分近い ξ_s と u_1, u_2 が存在しないとき) にはシステムは連続状態フィードバックで安定化できないことになる。

これを三輪車両の状態方程式(6)式に応用すれば、絶対値の十分小さな $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)^T$ に対して

$$\begin{pmatrix} \cos(\xi_3) \\ \sin(\xi_3) \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u_2 = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad \cdots \cdots (17)$$

を満たす原点に十分近い ξ と u_1, u_2 が存在するかどうかを調べればよい。いま、十分小さい正の実数 ε に対して

$$\delta_1 = \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \delta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon$$

とすると明らかに u_1 と ξ_3 は

$$u_1 = \varepsilon, \quad \xi_3 = \frac{\pi}{3} \quad \cdots \cdots (18)$$

となり、 ξ_3 が十分原点に近いとはいえない。つまり、三輪車両システムは連続フィードバックで安定化できないシステムということになる。このように簡単にみえる三輪車両の状態方程式(6)式が非線形制御理論的にみれば非常に複雑なシステムであることがわかる。

一般にノンホロミックな拘束を持つシステムはこのような連続状態フィードバックで安定化できない状態方程式で表されることが多いので、近年注目を浴び多くの研究がなされるようになった。

4. 連続状態フィードバックで安定化できないシステムの制御

前章で述べたように可制御であるにも関わらず連続状態フィードバックで安定化できないノンホロミックシステムについて経路計画、軌道追従制御、時変座標変換を用いた安定化などさまざまな研究がロボットの分野で行われている。これらについては文献(2)に中村氏の詳細な解説があるので、ここでは筆者らが行った制御系の設計について簡単に述べるにとどめておく。

4.1 時間軸状態制御形⁽⁶⁾

元の(5)式は次のシステムに変換することができる。

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L \cos(\theta)} \end{pmatrix} \tan(\alpha) \quad \cdots \cdots (19)$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos(\theta) \dot{z} \quad \cdots \cdots (20)$$

ここで(19)式は入力を操舵角 α 、状態を (y, θ) とするシステムであり、その時間軸は x となっている。さらに、このシステムの原点における線形近似システムは

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \alpha + O^2(y, \theta, \alpha) \quad \cdots (21)$$

となり、線形近似システムが可制御になる。つまり、このシステムは従来の方法で連続状態フィードバックにより安定化できるシステムである。このシステムの時間軸は x であるから、従来の方法で安定化連続状態フィードバックを設計すると、閉ループ系は時間軸 x が増加するに従って状態 (y, θ) が 0 に収束することになる。

これに対して(20)式は(19)式の時間軸 x を状態とし、車両速度 $\dot{z}$ を入力するシステムであり、もちろん可制御である。

つまり、このシステムは(20)式で(19)式の時間軸 x を制御し、この時間軸 x のもとで状態 (y, θ) を(19)式で制御するように元のシステムを分解したものと考えることができる。この意味で(19)式と(20)式の形を時間軸状態制御形と呼び、(19)式を状態制御部、(20)式を時間制御部と呼ぶことにする。このシステムの状態と入力は元の(5)式と同じ (x, y, θ) と $(\dot{z}, \alpha)$ であるが、状態制御部の時間軸が

x となっていることが唯一の違いである。しかし、この状態方程式を用いると車両の経路追従制御と位置姿勢制御の両方が可能となる。

4.2 経路追従

まず、入力 $\dot{x}$ と時間制御部(20)式を用いて状態制御部(19)式の時間軸にあたる x を単調増加するように制御する。さらに、このとき状態制御部を安定化するフィードバックを用いれば明らかに x が単調増加するに従って状態制御部の状態 (y, θ) は 0 に収束する。これは車両が前進するに従って x 軸に追従することを示している。

車両が後退する場合には同様に入力 $\dot{x}$ と時間制御部(20)式を用いて x が単調減少するように制御する。さらに、このとき状態制御部を反安定化するフィードバックを用いれば明らかに x が単調減少(時間が逆行)するに従って状態制御部の状態 (y, θ) は 0 に収束する。これは車両が後退するに従って x 軸に追従することを示している。

ここでは車両の座標を直交座標で表しているため x 軸への経路追従しか説明しないが、車両の位置を示す座標を変えることで任意の経路に追従させる制御系を設計することが可能になる。

この設計手法は三輪車両より制御が難しいけん引車両や2重けん引車両の制御にも用いることができる。図3にはここで述べた方法でけん引車両の8の字バックを行ったときのシミュレーション結果を、図4には2重けん引車両の直線追従制御(後退時)の様子を示す。これらの有効性は実験でも確認している。ここで非線形システムである状態制御部(19)式に対する安定化補償器の設計は厳密な線形化を用いた(厳密な線形化は非線形システムに対する非常に有効な制御系設計手法であるが、文献(4)に詳細な解説があるのでここでは省略する)。

4.3 位置と姿勢の制御

前節の経路追従経路では (y, θ) を 0 にすることは可能でも x を 0 にすることができない。しかし、まず車両を前進させ(x を単調増加させ)ながら前節の方法で車両を x 軸に追従させ (y, θ) を 0 とし、次に車両を後退させ(x を単調減少させ)ながら同様に車両を x 軸に追従させ、 $x=0$ となったときに車両を停止させれば車両は原点 $(x, y, \theta)=(0, 0, 0)$ に十分近くすることができる。このように車両の位置と姿勢を制御することが可能となる。

このような制御方策は状態方程式が時間軸状態制御形に変換でき、時間制御部と状態制御部の線形近似が可制御なシステムならば同じように用いることができる。これらの中にある種の宇宙ロボットなども含まれる。

5. おわりに

本解説では車両などノンホロノミックな拘束をもつシステムとはどういうものか、制御論的に何が難しいのか、どのように制御すればよいのかを執者の経験に基づき非線形

図3 けん引車両の8の字追従制御(後退)

図4 二重けん引車両の直線追従制御(後退)

システム理論の観点から解説した。より広い観点からの解説としては中村氏の文献(2)を参照されたい。

本稿が車両などの制御をするときの少しでも助けになれば幸いである。
(平成6年8月1日受付)

文 献

- (1) 石島・石動・三平・島・山下・渡辺:「非線形システム論」, 計測自動制御学会(平5)
- (2) 中村:「講座非ホロノミックロボットシステム(第1~5回)」, 日本ロボット学会誌, 11, 4~7・12, 2(平5, 平6)
- (3) 三平・伊藤:「非線形制御理論を用いた車両の経路追従制御と移動計画一切返しを用いた車庫入れ制御」, システム制御情報学会論文誌, 6, 1, 37~47(平5)
- (4) 三平:「厳密な線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用」, 計測と制御, 31, 8, 851~858(平4)
- (5) R. W. Brockett: "Asymptotic Stability and Feedback Stabilization", *Differential Geometric Control Theory*, R. W. Brockett et al. Eds., Birkhauser, 181~191(1983)
- (6) 三平・田村・小林:「連続状態フィードバックにより安定化できないシステムに対する制御系の一設計法」, 第36回自動制御連合講演会, 特セ29~30(平5)

三 平 満 司 (平員) 1960年生まれ。1987年東京工業大学理工学研究科博士課程修了(工学博士)。千葉大学工学部助手, 同大学同学部助教授, 東京工業大学工学部助教授を経て現在東京工業大学情報理工学研究科助教授。非線形制御理論とその応用, ノンホロノミックシステムの制御, 線形制御理論とその応用などの研究に従事。電気学会, 計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本ロボット学会, IEEEなどの会員。