ロバスト制御に基づいた2質点系の制振制御 ——実機による検証——

正員 川 路 茂 保 (熊本大)
学生員 金 澤 一 伸 (熊本大)

Vibration Suppression Control of 2-Mass System Based on Robust Control ——Experimental Studies——

Shigeyasu Kawaji, Member, Kazunobu Kanazawa, Student Member (Kumamoto University)

2-mass system is an important first order approximated model of flexible joint robot, flexible arm, and its vibration suppression control is of a great importance for motion control. For this control problem, there have been many researches on vibration suppression control of 2-mass system in the face of parameter variations, but the effectiveness of their control methods has been only confirmed through simulations.

This paper is concerned with the experimental evaluations of the vibration suppression control of a 2-mass system. Three typical controllers, a PID controller, an H_∞ controller, and a μ controller, are designed and compared from the viewpoint of the control performance against the parameter variations. In the design procedure of H_∞ control and μ -synthesis method, we consider the parameter variations in the mass of the cart2 and the spring constant which correspond to the change of the natural frequency of the 2-mass system between 4.68 and 6.66 rad/sec. Based on these variations, eight kinds of the perturbed models are defined. Then we regard those models as uncertainties and apply μ -synthesis method to 2-mass system. From the experimental results, it is observed that PID control and H_∞ control may lead to poor performances in the presence of the parameter variations, but μ -synthesis yields better transient and steady state responses even if the parameter variations exist.

キーワード：2質点系，ロバスト制御性能， H_∞ 制御， μ -シンセシス

1. ま え が き

2質点系は，フレキシブルジョイントロボットやフレキシブルアームなどの第1次近似モデルとして重要であり，その振動抑制と外乱抑圧制御が大きな課題となっている。

2質点系の制御問題は古くから取り扱われており⁽¹⁾，古典制御では，1)制御対象を剛体と考え制御帯域を共振周波数より十分小さく設計し振動モードを励起させない，2)ノッチフィルタを挿入し共振周波数の振幅を小さくする，などの手法が用いられてきた。しかし，前者は制御帯域を共振周波数より大きくすることができず十分な速応性が得られない，また後者はパラメータ変動による共振周波数の変化に対応できず，システムティックな設計が困難である，などの問題が指摘されている。現代制御では，外乱オブザーバとLQ制御を組み合わせた手法⁽²⁾があるが，モデルと実プラントの間の不確かさが陽に表わされてなく，ノミナルプラントに対して設計したコントローラを実装しても制

御系が不安定になったり，望ましい制御性能が得られないなどの問題がある。

これを克服する制御手法としてロバスト制御⁽³⁾が近年さかんに研究されている。ロバスト制御では，モデルと実プラントの間の誤差を設計段階へ陽な形で取り込むことができ，モデルの不確かさをコントローラ的设计へ積極的に利用している点が古典制御や現代制御理論と違う点である。特にここ数年 H_∞ 制御理論⁽⁴⁾⁽⁵⁾ は数多くの応用事例が報告され着実に成果を発揮しつつある^{(6)~(8)}。しかし， H_∞ 制御理論はモデル化誤差に対するロバスト安定化には優れた性質を示すが，プラント内に複数の摂動を有する制御対象には適用できず，コントローラが保守的になりやすい⁽⁹⁾，などの問題点も残している。

この問題に対して最近，構造化特異値による μ -シンセシス⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ が注目されている。この制御系設計法は，ロバスト安定化はもちろん， H_∞ 制御では満たされないロバスト制御性能をも満足する手法である。また，制御系設計支

援ソフト⁽¹²⁾も手軽に利用することができ H_∞ 制御を凌ぐ強力な制御系設計法として期待されている。現在までに μ -シンセシスを用いた2質点系の制振制御も提案されており⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾、従来の方法と比べて著しい改善が見られることが指摘されている。

しかし、これらの制御手法の有効性は文献(6)を除いてシミュレーションによる確認のみであり、実機実験による検討がなされていない。文献(6)では、PI 制御、 H_∞ 制御による実験結果は示してあるが、 μ -シンセシスによる実験結果については言及されていない。また、 μ -シンセシスを用いた手法である文献(13)(14)では、シミュレーション結果のみであり実機実験による検討がなされていない。さらに、ごく最近、堀はPID制御のゲインを系固有のパラメータを用いて設定する方法⁽¹⁵⁾を提案しているが、シミュレーション結果のみである。一般に、シミュレーションは実システムを理想化した状態で行われるため、シミュレーションで優れた性能を示すコントローラを実システムに適用してもうまくいかない場合がある。したがって、真の意味での2質点系の制振制御に対する各制御手法の有効性は実機実験より比較されるべきである。この実機実験による比較を通して、これまでの研究で得られたシミュレーションによる知見が実機へ適用できるかどうかを検証し、実際の応用に際しての留意点を示すことができる。

そこで、本論文では、従来の代表的設計法であるPID制御、 μ -シンセシスの第1ステップで得られる H_∞ コントローラ、さらに μ -シンセシスを2質点系へ適用し、実機実験により各手法の制御性能を比較する。さらに、2質点系のパラメータ変動に対する制御性能を実験的に検証する。まず、2章で2質点系の実験システムについて説明し、ノミナルモデルを導く。次に2質点系の固有周波数を変化させるパラメータの変動幅を設定し、八つの摂動モデルを定義する。3章では、これらの変動に対してPIDコントローラを用いて実機実験を行った結果について示す。4章では H_∞ コントローラ、 μ -コントローラを用いて実機実験を行った結果について示し、パラメータ変動に対する制御性能の比較を行う。さらに、三つのコントローラ特性の違いを周波数領域において考察する。

2. 2 質点系の構成

〈2・1〉 実験システム 本論文では、二つの台車間をばねで結合した2質点系を制御対象とする。実験装置は図1に示すように、2質点系、12ビットのカウンタボード、パーソナルコンピュータ(PC 9801 RA 21(80386+80387))、12ビットのD/A変換器、アンプ、サーボドライバから構成されている。台車1はベルトを介した定格120WのDCサーボモータ1によって駆動され、その力がばねに伝わり台車2を駆動する。この際ばねによる振動が台車2に働き、台車2の位置決め精度が劣化する問題がある。ここでは、台車2の振動を抑えつつその位置を制御することが目的となる。

図1 2質点系実験装置
Fig. 1. Experimental apparatus of 2-mass system.

図2 DCサーボモータ
Fig. 2. DC servo motor.

本実験装置の特徴は、台車1と台車2をメカニカルなばねではなくサーボモータの弾性特性を利用して擬似的にばね特性を実現している点である。台車1上にばね特性を実現するための定格10Wのサーボモータ2が取り付けられており、モータ2の回転がラック&ピニオンにより直線方向の運動に変換され台車2を駆動する。このサーボモータ2により擬似的にばね特性を実現するためには、台車1と台車2の相対的な位置に比例する力をモータ2により発生させればよい。図2はDCサーボモータの原理図であり、 L_a , R_a , L_f , R_f は、それぞれ電機子回路、界磁回路のインダクタンスと抵抗である。また、 v_a , i_a はそれぞれ電機子電圧、電機子電流であり、 v_f , i_f はそれぞれ界磁電圧、界磁電流である。

このとき電機子回路において次の関係が成り立つ。

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = v_a - v_w \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 v_w はモータ2の逆起電力でありモータの回転速度 $\dot{\theta}_2$ に比例するため、逆起電力定数 K_w を用いて $v_w = K_w \dot{\theta}_2$ と表わされる。(1)式において時定数 L_a/R_a は十分小さいため、 $L_a/R_a \approx 0$ とすると(1)式は

$$i_a = \frac{1}{R_a} (v_a - v_w) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。またモータの発生トルク f は電機子電流 i_a に比例するからトルク定数 K_t を用いて、

$$f = K_t i_a \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。したがって(2)、(3)式よりモータの発生

するトルク f は,

$$f = \frac{K_t}{R_a}(v_a - v_w) \dots \dots \dots (4)$$

となる。この(4)式で表わされるトルクが台車1と台車2をつなぐばね項による力 $f = -k(x_2 - x_1)$ と等しいと考えると次式が成り立つ。

$$\frac{K_t}{R_a}(v_a - v_w) = -k(x_2 - x_1) \dots \dots \dots (5)$$

したがってモータ2によって台車1・台車2間に擬似的にばねによる力を発生させるには,

$$v_a = -\frac{R_a k}{K_t}(x_2 - x_1) + v_w \dots \dots \dots (6)$$

の電圧をモータ2に印加すればよい。ただし、 x_1 は台車1の位置、 x_2 は台車2の位置、 k はばね定数である。

本実験装置では、ばね特性を変化させる際ハード的なばねの交換は必要なく、(6)式から明らかなようにばね定数 k をソフト的に変更するのみで容易に台車間のばね特性を変更できる。

〈2・2〉 モデリング 図3は、図1に示した2質点系の簡略化モデルである。ここで、2質点系をモデリングするにあたり次のような仮定をおく。

- 1) 図1に示す二つの台車はともに質点とみなせる。
- 2) モータ1と台車1をつなぐベルトの伸びは無視できる。
- 3) 粘性摩擦は台車の速度に比例する。
- 4) サーボドライバ、アンプの電気系の遅れは十分小さく無視できるとする。

以下、仮定1)より台車1、台車2をそれぞれ質点1、質点2と呼ぶことにする。

図3において、 m_1 、 m_2 は質点1、質点2の質量、 d_1 、 d_2 はそれぞれ質点1または質点2とレール間の粘性摩擦係数、 d は質点1・質点2間の粘性摩擦係数、 k は質点1・質点2間のばね定数である。さらに x_1 、 x_2 を質点1、質点2の位置、 u を制御入力、 α をモータ1の電圧・トルク変換係数とすると、2質点系の運動方程式は次式のように表わされる。

$$m_1 \ddot{x}_1 - k(x_2 - x_1) + d_1 \dot{x}_1 - d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = \alpha u \dots \dots (7-a)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + d_2 \dot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \dots \dots (7-b)$$

一方、質点1と質点2の位置はそれぞれモータ1、モータ2に取り付けられたエンコーダによって検出することができる。ここではアクチュエータとセンサの配置場所が異なるノンコロケート問題を取り扱う。すなわち、アクチュエータは質点1を駆動し、質点2の位置のみが検出できる

図3 2質点系のモデル
Fig. 3. Model of 2-mass system.

とする。したがって出力方程式は,

$$y = x_2 \dots \dots \dots (8)$$

となる。(7),(8)式より2質点系の伝達関数は次式のように求まる。

$$G_{nom} = \frac{b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s} \dots \dots \dots (9)$$

ただし

$$a_4 = m_1 m_2, \quad a_3 = m_1(d_2 + d) + m_2(d_1 + d)$$

$$a_2 = (m_1 + m_2)k + d_1 d_2 + (d_1 + d_2)d$$

$$a_1 = (d_1 + d_2)k, \quad b_1 = \alpha d, \quad b_0 = \alpha k$$

なお、実験システムの各パラメータはパラメータ同定実験により表1のように得られた。この値を2質点系のノミナルパラメータとする。

〈2・3〉 2質点系のパラメータ変動 表1に示される2

質点系のパラメータには、パラメータ同定精度の限界や経年変化による誤差が生じる。また、2質点系をモデリングする際に無視した高次のダイナミクスや非線形性などのモデル化誤差が存在する。2質点系の制振制御に要求される仕様はこれらのパラメータ変動やモデル化誤差が存在しても制御系がロバスト安定であり、かつ制御系が与えられた設計仕様を満たすことである。特にパラメータ変動は2質点系の制御性能と密接に関連しており、この関係を考察することは意義がある。

本論文では、表2に示す質点2の質量 m_2 とばね定数 k のパラメータ変動を考える。すなわち、質量 m_2 はノミナル値 0.460 kg を中心に ± 0.065 kg 変化し、ばね定数 k はノミナル値 10.0 kg/s² を中心に $\pm 25\%$ 変動すると仮定する。このパラメータ変動はシステムの固有周波数 $\omega_n = \sqrt{k(m_1 + m_2)/m_1 m_2} = 5.65$ rad/sec が 4.68~6.66 rad/sec の範囲で変動することに相当する。

表2に示すパラメータ変動を用いて表3に示す摂動モデルを定義する。表3において、 m_{2min} 、 m_{2max} は表2に示す質量 m_2 の変動の最小値と最大値であり、同様に k_{min} 、 k_{max} はばね定数 k の最小値と最大値である。たとえば、Model 1は(9)式で表わされる2質点系の伝達関数で、質量 m_2 のノミナル値の代わりに m_2 の最大変動値 m_{2max} を代入したときのものである。Model 2~Model 8につ

表1 2質点系のパラメータ
Table 1. Parameters of 2-mass system.

Symbol	Nom. Val.	Units	Symbol	Nom. Val.	Units
m_1	0.99	kg	m_2	0.46	kg
d_1	2.46	kg/s	d_2	1.25	kg/s
d	1.48	kg/s	k	10.0	kg/s ²
α	5.55	N/V	R_a	10.0	Ω
K_t	0.04	Nm/A	K_w	4.36	mV/rpm

表2 パラメータの変動幅
Table 2. Parameters variations.

Symbol	Min. Val.	Nom. Val.	Max. Val.	Units
m_2	0.395	0.460	0.525	kg
k	73.5	98.0	122.5	kg/s ²

表 3 摂動モデル
Table 3. Perturbed model.

Pert. Model	Pert. Value	Pert. Model	Pert. Value
Model 1	$m_{2\max}$	Model 5	$m_{2\max}, k_{\max}$
Model 2	$m_{2\min}$	Model 6	$m_{2\max}, k_{\min}$
Model 3	$k_{\max}$	Model 7	$m_{2\min}, k_{\max}$
Model 4	$k_{\min}$	Model 8	$m_{2\min}, k_{\min}$

いても同様である。

制御目的は、表 2 に示すパラメータ変動がある場合でも制御系が安定であり、制御性能の劣化が少ないコントローラを設計することである。

3. PID 制御

後述のロバスト制御と対比するため、従来の代表的設計法である構造の簡単な PID 制御を適用する。図 4 は、PID コントローラを用いた場合の制御系の構成であり、 $G(s)$ は制御対象、 K_{PID} は PID コントローラを示す。ここで、PID コントローラは次式で表わされる。

$$K_{PID}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (10)$$

ただし、 K_P は比例ゲイン、 T_I は積分時間、 T_D は微分時間である。PID コントローラのゲインは、まず P 制御のみを行い十分な立ち上がり時間が得られるように設定し、次に I 動作と D 動作を加え、オーバーシュートを抑え、質点 2 の応答が振動的にならないよう思考錯誤的に $K_P = 10.0$ 、 $T_I = 5.0$ 、 $T_D = 0.3$ と選んだ。

図 5 にこのゲインを用いたときの PID コントローラのボード線図を示す。図 5 のゲイン線図より、低周波数域に

図 4 PID コントローラを用いた制御系
Fig. 4. Control system with PID controller.

図 5 PID コントローラのボード線図
Fig. 5. Bode plot of PID controller.

おいては PID コントローラの積分動作が働き、高周波数域においては微分動作が作用することがわかる。特に高周波数域においては、コントローラのゲイン特性が大きいため、モデル化誤差などに対応できないことがわかる。また、2 質点系の固有振動数 5.65 rad/sec は PID コントローラの設計段階に反映されていないため、5.65 rad/sec より低い周波数からゲイン特性が増加していることがわかる。さらに、中間周波数域におけるオールパス特性が少なく、制御帯域が狭いことがわかる。

〈3・1〉 PID 制御を用いた実験結果 PID コントローラを図 1 の 2 質点系に適用し、パラメータ変動に対する実験結果について示す。ただし、連続系の PID コントローラはオイラー法を用いてサンプリング時間 3 msec でデジタル近似し、離散系のコントローラとして実装した。また、実時間制御は当研究室で開発した MRCOS⁽¹⁶⁾ (Multitask Real-time Operating System) の下で行われた。実験における目標値は質点 2 の位置 $x_2 = 0.1$ m である。ここで 2 質点系のパラメータ変動に対する制御性能を比較するため、表 3 で定義した摂動 Model 1, Model 4, Model 6 を考える。これはノミナル値に対して固有周波数がそれぞれ、4.3%、13.4%、17.2% 変動することに相当する。摂動 Model 1 は固有周波数の変動幅がノミナル値を用いた場合の固有周波数に対して最も小さく、逆に Model 6 は最も大きくなる。Model 4 はその中間の摂動である。したがって、表 3 で定義した八つの摂動モデルのうち、代表的なこれら三つの摂動のみを用いて実験を行った。

図 6 に実験結果を示す。図中で実線はノミナル応答、破線は Model 1 の応答、点線は Model 4 の応答、1 点鎖線は Model 6 の応答である。図よりノミナル応答はオーバーシュートもほとんど見られず良好な特性が得られていることがわかる。しかし、Model 1 のパラメータ変動がある場合にはノミナル応答と比較して立ち上がりが遅く、Model 4, Model 6 のパラメータ変動がある場合には、オーバーシュートが大きくなり制御性能が劣化していることがわかる。これは PID 制御ではパラメータ変動が制御系

図 6 PID 制御を用いたときの台車 2 の応答
Fig. 6. Response of cart 2 with PID control.

設計時に考慮されていないためであり、ノミナル応答に対して調整されたPIDコントローラのゲインではこれらのパラメータ変動には対応できないことを示している。なお、目標値近傍において多少オフセットが生じ、また時刻0.6秒以降振動が現われていないが、これは台車とレール間の摩擦による影響のためと考えられる。

4. ロバスト制御による設計

PID制御では2質点系のパラメータ変動を陽に考慮していないため、パラメータ変動がある場合は制御性能が劣化することが示された。この制御性能の劣化を防ぐためにはパラメータ変動を設計段階に取り込む必要がある。これはロバスト制御問題でありさまざまな手法が提案されているが、ここではロバスト安定性を満たし、パラメータ変動に対しても制御性能が劣化しない μ -シンセシスを用いる。 μ -シンセシスにおける第1ステップでは通常の H_∞ コントローラが設計され、これを基にD-K iterationを用いて μ -コントローラが設計される。そこで、 μ -シンセシスの第1ステップで得られる H_∞ コントローラおよび μ -コントローラを用いて実機実験を行い、前章のPID制御との制御性能の比較を行う。さらに、周波数領域における三つのコントローラの関連について示す。

〈4・1〉 制御対象の集合 一般に、ノミナルモデルと摂動モデルとの間にはパラメータ変動に起因する誤差が存在する。ここでは、(9)式のノミナルモデルと表3に示す摂動モデル間の誤差を次式に示す乗法的な不確かさとして扱うことにする。

$$G_{real} = G_{nom}(I + \Delta_m), \quad (i=1, \dots, 8) \quad (11)$$

上式の乗法的な不確かさ Δ_m を Δ_m で表わされる摂動にまとめ、次式で表わされる制御対象の集合 $\mathcal{G}$ を考える(図7)。

$$\mathcal{G} = \{G_{nom}(I + \Delta_m W_{del}) : \Delta_m : \text{安定かつ} \|\Delta_m\|_\infty < 1\} \quad (12)$$

ただし W_{del} は不確かさ Δ_m を評価する周波数重み関数であり、 $\Delta_m W_{del}$ は、実プラントとノミナルモデルとの間の変動分を表わす。また W_{del} は周波数に依存するが、これは不確かさが周波数に依存するためである。PID制御では不確かさ Δ_m は考慮されておらず、 G_{nom} に対してPIDコントローラのゲインがチューニングされていた。したがって、ノミナルモデルに対してチューニングされたゲインを用いてもパラメータが変動した場合には対応できなかった。

図7 制御対象の集合
Fig. 7. Set of plant.

た。しかし、ここではパラメータ変動に伴う誤差を不確かさとして評価し、制御系設計段階へ取り入れている点がPID制御と異なり、パラメータ変動に対してロバストな制御性能を有することが期待される。

〈4・2〉 μ -シンセシス 図7で示される制御対象の集合に目標値応答を規定する周波数重み関数 W_p を付加し、制御対象の集合を安定化するコントローラを K とし、さらに、ブロック構造 $\underline{A}$ を

$$\underline{A} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_m & 0 \\ 0 & \Delta_p \end{bmatrix} : \Delta_m \in C, \Delta_p \in C \right\} \quad (13)$$

と定義すると、図8に示す閉ループ系が得られる。ここで Δ_p は出力端感度関数の H_∞ ノルムで表わされた制御性能を μ -シンセシスの枠組みに入れるための仮想的な不確かさに相当し⁽¹¹⁾、 P は一般化プラント、 u, y, d, r はそれぞれ制御入力、出力、外乱および目標値を表わす。このときロバスト制御性能が満たされる条件は、構造化特異値 $\mu^{(10)}$ と線形分数変換 $F_l(P, K)$ を用いると、

$$\sup_{\omega \in R} \mu_d(F_l(P, K)) < 1, \quad \forall \omega \quad (14)$$

となる⁽¹¹⁾。ただし $\mu_d(M)$ 、 $F_l(P, K)$ はそれぞれ

$$\mu_d(M) = \frac{1}{\inf \{ \sigma(\Delta) : \Delta \in \underline{A}, \det(I - M\Delta) = 0 \}}$$

$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

と定義されている⁽¹⁰⁾。ここで(14)式の最小化問題は、D-K iterationを用いて解くことができる⁽¹¹⁾。D-K iterationは $\sup_{\omega \in R} \mu_d(F_l(P, K))$ の最小化を $\|DF_l(P, K)D^{-1}\|_\infty$ の最小化に帰着させ、スケーリング行列 D とコントローラ K の最小化を交互に行い $\|DF_l(P, K)D^{-1}\|_\infty$ のノルムを最小化する方法である。ここで、スケーリング行列 D は、

$$D = \begin{bmatrix} d(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

で定義され、 $d(s)$ は安定かつ最小位相とする。

〈4・3〉 H_∞ コントローラおよび μ -コントローラの設計

図8の閉ループ系における設計パラメータは、パラメータ変動に伴うモデルの誤差を評価する重み関数 W_{del} および目標値追従特性を規定する重み関数 W_p である。(11)式よ

図8 閉ループ系
Fig. 8. Closed-loop system.

図9 乗法的摂動 Δ_m と周波数重み W_{del}
Fig. 9. Multiplicative uncertainty Δ_m and weighting function W_{del} .

り乗法的な不確かさ Δ_m^i を $\Delta_m^i = G_{nom}^{-1}(G_{real}^i - G_{nom})$ とし、表3に示すパラメータの変動値を用いると Δ_m^i の周波数応答が図9のように得られる。

この Δ_m^i のゲイン特性より大きなゲインを持つように W_{del} は次式のように決定する。

$$W_{del} = \frac{20(0.001s+1)}{s+1} \quad (16)$$

ただし、乗法的な不確かさ Δ_m^i はパラメータ変動による誤差のみしか考慮されていないが、実際にはモデリング時に無視された非線形性や高次のダイナミクスが高周波数域で顕著になるため W_{del} は高周波数域で安全率を考慮して設定されている。また低周波数域は問題の可解性を考慮し、制御実験を試行的に繰り返して決定した。

一方、目標値追従特性は低周波数域で達成されれば十分なため周波数重み関数 W_P は、低周波数域でローパス特性を持つように

$$W_P = \frac{1}{3 \times 10^5} \frac{10^5 s + 1}{0.1s + 1} \quad (17)$$

と設定する。

μ -コントローラを得る第1ステップとして、まず $D=I$ とおき $\|F_i(P, K)\|_\infty < \gamma_1$ で表わされる H_∞ 標準問題を解く。このとき得られるコントローラを K_1 とする。このコントローラ K_1 は、制御対象にスケールリングが施されていないため通常の H_∞ コントローラとなる。

$$K_1(s) = \frac{7.41 \times 10^4 (s+10^3)(s+8.60 \times 10^{-1})}{(s+1.62 \times 10^3)(s+10^{-6})} \times \frac{(s+2.52)}{(s+2.89+6.78j)(s+2.89-6.78j)} \times \frac{(s+3.69+4.28j)(s+3.69-4.28j)}{(s+6.43+1.88j)(s+6.43-1.88j)}$$

H_∞ コントローラ K_1 を用いて閉ループ伝達関数 $F_i(P_1, K_1)$ を μ 解析し、最大特異値および μ プロットを図10の $\bar{\sigma}_1$, μ_1 に示す。図より μ の最大値は2.31でありロバスト制御性能の条件(14)式を満足していないことがわかる。

そこでスケールリング行列 D を1次の安定な有理関数で近似し、 $P_2 = DP_1 D^{-1}$ として $\|F_i(P_2, K_2)\|_\infty < \gamma_2$ で表わされる H_∞ 最適問題を解く。これにより $\gamma_2 = 1.70$ が得られる。

図10 最大特異値 σ および μ プロット
Fig. 10. Maximum singular value σ and μ plot.

この場合もロバスト制御性能の条件を満足していないことがわかる。さらにスケールリング行列 D を2次の有理関数で近似し、 $P_3 = DP_2 D^{-1}$ として $\|F_i(P_3, K_3)\|_\infty < \gamma_3$ で表わされる H_∞ 最適問題を解くと $\gamma_3 = 0.989$ が得られる。これはロバスト制御性能の条件を満足しており、 K_3 が μ -コントローラとなる。

$$K_3(s) = \frac{7.96 \times 10^3 (s+10^3)(s+2.49)(s+3.40 \times 10^1)}{(s+9.50 \times 10^{-6})(s+2.43 \times 10^3)(s+4.57 \times 10^1)} \times \frac{(s+4.257 \times 10^1)(s+8.42 \times 10^{-1})}{(s+4.258 \times 10^1)(s+3.39 \times 10^1)} \times \frac{(s+1.07 \times 10^{-1})(s+1.59 \times 10^{-2})}{(s+2.64 \times 10^1)(s+8.31 \times 10^{-1})(s+1.14 \times 10^{-1})} \times \frac{(s+3.71+4.18j)(s+3.71-4.18j)}{(s+9.84 \times 9.31 \times 10^{-1}j)(s+9.84-9.31 \times 10^{-1}j)}$$

H_∞ コントローラ K_1 と μ -コントローラ K_3 を比較すると、 H_∞ コントローラ K_1 の次数は6次であるのに対して μ -コントローラ K_3 の次数は10次となっていることがわかる。これはD-K iterationの際にスケールリング行列をまず1次の安定な伝達関数で近似し、さらに2次の安定な伝達関数で近似したことに起因する。

コントローラを実装する際には実時間制御の要請から高次のコントローラのままではサンプリング時間が問題となる場合がある。その際にはモデル低次元化法を用いてコントローラの次数を低減する必要がある。特に μ -シンセシスを用いた場合にはコントローラの次数が大きくなりやすく注意が必要である。しかし、本論文においてはコントローラの低次元化は行っておらず、 H_∞ コントローラ K_1 は6次、 μ -コントローラ K_3 は10次のまま用いた。

4.4 三つのコントローラの関連 PID コントローラ K_{PID} , H_∞ コントローラ K_1 , μ -コントローラ K_3 の関係について考察する。図11に、PID コントローラ、 H_∞ コントローラ、 μ -コントローラのボード線図を示す。図においてゲイン線図を比較すると、PID コントローラ、 H_∞ コントローラ、 μ -コントローラはいずれも低周波数域においては積分特性を有し目標値と出力の誤差を小さくする働きがあることがわかる。また、高周波数域においては、

図 11 PID, H_∞ , μ -コントローラのボード線図
Fig. 11. Bode plot of PID, H_∞ and μ -controllers.

図 12 閉ループ系のボード線図
Fig. 12. Bode plot of closed-loop system.

K_{PID} は微分特性のため周波数が大きくなるにつれてゲインも大きくなっているが、 K_1 , K_3 は高周波数域においては逆にゲインが小さくなっている。これは、モデル化誤差やセンサノイズは高周波数域で顕著になることにより、PID コントローラではこれらに対処できないことを意味している。

制御帯域である中間周波数域においては、PID 制御では 2 質点系の固有振動数 5.65 rad/sec は考慮されていないためこれより低い周波数からゲイン特性が上昇しているが、 H_∞ コントローラおよび μ -コントローラでは中間周波数域において固有振動数まではオールパス特性を有していることがわかる。 μ -シンセシスにおいては、2 質点系の固有振動数は陽な形で設計段階には考慮されていないが、 H_∞ コントローラや μ -コントローラには系の固有振動数が自動的に反映される。PID コントローラで 2 質点系の固有振動数を考慮しながらパラメータチューニングするためには、思考錯誤にたよらなければならずシステムティックな設計が困難である。これに対して μ -シンセシスを用いればシステムティックな設計が容易に行える利点があるといえる。なお H_∞ コントローラと μ -コントローラの違いは、中間周波数域におけるオールパス特性の帯域幅の違いであり、 μ -コントローラのほうがオールパス特性が大

きいことがわかる。

図 12 は、PID コントローラ、 H_∞ コントローラ、 μ -コントローラを用いたときの目標値 r から出力 y までの閉ループ系のボード線図である。PID コントローラを用いたときは、8.51 rad/sec でピーク特性があることがわかる。 H_∞ コントローラを用いた場合、中間周波数域あたりでゲインが 0 dB よりやや大きくなり、制御帯域で信号が増幅されることがわかる。 μ -コントローラを用いた場合は低周波数域から中間周波数域までオールパス特性を有し、高周波数域では十分なゲインの減衰が達成されていることがわかる。

2 質点系へ PID 制御を適用し所望の時間応答が得られない場合、2 質点系のパラメータ変動やモデル化誤差などを評価する重み関数 W_{del} を導入し、さらに目標値追従特性を評価する重み関数 W_p を導入する。ここで、 W_p はローパス特性を持つように設定する。重み関数の設定には若干の試行が必要となるが、一度所望の応答が得られる重み関数が設定されれば、 W_p を微調整することで H_∞ コントローラが得られる。さらに、 H_∞ コントローラを基に μ -シンセシスを行うことでパラメータ変動に対してロバストな制御性能を有するコントローラが得られる。

なお、本研究で用いた制御対象は図 1 に示したようにレール上に台車を配し、モータの発生するトルクがプーリおよびベルトを介して伝達される構造のため台車とレール間の摩擦が無視できず、表 1 のように粘性摩擦の値が大きい。また、台車間のばね項を擬似的に作るモータ 2 の摩擦やラックとピニオン間の摩擦も粘性摩擦を大きくしている一因である。この摩擦による影響のため H_∞ コントローラや μ -コントローラの設計は粘性摩擦項が十分小さい場合に比べて若干容易となるが、所望の制御性能を得るためにはいずれの場合も重み関数 W_p の調整に十分な注意を要する。さらに、粘性摩擦項が存在する場合でも図 11 に示したように H_∞ コントローラおよび μ -コントローラは系の固有振動数を考慮した設計になっており、2 質点系の振動を制御するコントローラといえる。

4・5 実験結果 H_∞ コントローラ、 μ -コントローラを図 1 の 2 質点系に適用し、パラメータ変動に対する実験結果を示す。ただし、 H_∞ コントローラ、 μ -コントローラは双一次変換を用いてサンプリング時間 5 msec で離散化した離散系のコントローラを実装した。

図 13、図 14 はそれぞれ H_∞ コントローラ、 μ -コントローラを用いた場合の実験結果である。図中実線はノミナルパラメータを用いたときの応答、破線は Model 1 の応答、点線は Model 4 の応答、1 点鎖線は Model 6 の応答である。 H_∞ 制御を用いた場合、ノミナル応答はややオーバーシュートが見られ、パラメータ変動が起こった場合にはさらにオーバーシュートが大きくなり、振動的になることがわかる。図 13 より、 H_∞ 制御を用いた場合、制御性能が劣化することがわかる。一方、 μ -コントローラを用いた場合は、ノミナル応答はオーバーシュートも見られず、さらにパ

図 13 H_{∞} 制御を用いた場合の台車 2 の応答
Fig. 13. Response of cart 2 with H_{∞} control.

図 14 μ -シンセシスを用いた場合の台車 2 の応答
Fig. 14. Response of cart 2 with μ -synthesis.

表 4 目標値に対するオーバシュート率
Table 4. Overshoot ratio.

	Nominal	Model 1	Model 4	Model 6
PID	0.46%	0.76%	5.71%	11.3%
H_{∞}	3.52%	7.42%	13.3%	18.2%
μ	0.59%	0.39%	0.59%	0.59%

ラメータ変動に対しても、ノミナル応答と酷似しており制御性能の劣化がほとんどみられないことがわかる。

表 4 は、図 6、図 13、図 14 をもとに、目標値に対するオーバシュート率を示したものである。表より、PID 制御、 H_{∞} 制御では、Model 1、Model 4、Model 6 のパラメータ変動に対してオーバシュート率が大きくなり、制御性能が劣化するのに対して、 μ -シンセシスを用いた場合、パラメータの変動に対してほとんどオーバシュート率は変化せず制御性能が劣化しないことがわかる。

これらの実験結果より、PID 制御、 H_{∞} 制御、 μ -シンセシスを比較すると μ -シンセシスを用いた場合がノミナル応答およびパラメータの変動に対する応答とも優れた制御性能を発揮することが確認された。

5. あとがき

本論文では、PID 制御、 H_{∞} 制御、 μ -シンセシスを 2 質点系へ適用して 2 質点系のパラメータ変動に対する制御性能を実験的に評価した。2 質点系の固有振動数が 4.3%、13.4%、17.2%と変化するパラメータ変動を与えた場合、PID 制御ではノミナル応答とのずれが大きくなり、制御性能に明らかな劣化が見られることが確認された。次に、これらのパラメータ変動をもとに制御対象の集合を定義し、 μ -シンセシスを用いてコントローラの設計を行った。 μ -シンセシスの第 1 ステップで得られる H_{∞} コントローラを用いた場合はパラメータ変動に対して制御性能の劣化が見られたが、 μ -コントローラを用いた場合は、パラメータ変動に対する応答がノミナル応答とほとんど変わらずロバストな制御性能を有していることが確かめられた。これより、これまでの文献で指摘されているように、 μ -シンセシスを用いた場合が最も優れた制御性能を有することが示された。

各制御手法を実機へ応用する際には、質点間の振動抑制とともに、各質点に働く摩擦力の影響に留意する必要がある。特に目標値近傍では摩擦力が無視できなくなり、位置決め精度に影響を与える。

コントローラの実装に関しては、実時間制御の要請からサンプリング時間が問題となることがある。特に μ -シンセシスを用いた場合には高次のコントローラが得られやすく、必要に応じてコントローラの低次元化を行う必要がある。

(平成 7 年 2 月 8 日受付, 同 7 年 7 月 21 日再受付)

文 献

- (1) Yoichi Hori: "Comparison of Vibration Suppression Control Strategies in 2-Mass Systems including a Novel Two-Degree-of-Freedom H_{∞} Controller", 2nd IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, 409 (1992)
- (2) 杉本・森本・武田・平紗: 「2 慣性共振系の状態フィードバックによる振動抑制制御とパラメータ変動を考慮した制御特性」, 平 5 電気学会産業応用部門大会, 843 (平 5)
- (3) 特集「実用機を迎えたロバスト制御」, 計測と制御, 30, 647 (平 3)
- (4) B. A. Francis: "A Course in H_{∞} Control Theory", Springer-Verlag (1987)
- (5) 美多: 「 H_{∞} 制御」, 昭晃堂 (平 6)
- (6) 大内・矢野・美多: 「二慣性系のロバスト制御と H_{∞} 制御の効果」, 平 5 電気学会産業応用部門大会, S-186 (平 5)
- (7) 森本・武田・平紗: 「 H_{∞} 制御理論に基づく 2 慣性共振系の速度制御」, 平 5 電気学会産業応用部門大会, 849 (平 5)
- (8) T. Hoshino, Y. Yoneyama & T. Soejima: "Torsional Vibration Suppression of Hot-rolling mill based on H_{∞} Control Theory", 3rd IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, 151 (1994)
- (9) G. J. Baras & J. C. Doyle: "Robustness and Performance Tradeoffs in Control Design for Flexible Structures", Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, 2999 (1990)
- (10) J. C. Doyle: "Analysis of feedback systems with structured uncertainties", Proc. of IEE Pt. D, 129, 242 (1982)
- (11) R. L. Dailey, K. Glover, M. Green & D. Limebeer: "Lecture Notes for the Workshop on H_{∞} and μ Methods for Robust Control", The 31st IEEE Conference on Decision and Control (1991)

- (12) G. J. Baras, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard & R. Smith: "μ-Analysys and Synthesis Toolbox", MUSYN Inc., (1991)
- (13) 劉・大作・美多: 「2 自由度ロバスト制御による ACC Benchmark 問題の解法」, 第 22 回制御理論シンポジウム, 65 (平 5)
- (14) 平田・劉・美多: 「2 慣性系に対する μ-Synthesis を用いた制振制御」, 電学論 D, **114**, 512 (平 6)
- (15) 堀: 「PID 制御のみによる 2 慣性系の制御」, 電学論 D, **115**, 86 (平 7)
- (16) 川路, 他: 「パーソナルコンピュータによる実時間制御用システムの設計」, 熊本大学工学部研究報告, **37**, 175 (昭 63)

金 澤 一 伸 (学生員) 昭和 43 年 5 月 29 日生。平成 5 年 3 月熊本大学大学院工学研究科電気情報工学専攻修了。同年熊本大学大学院自然科学研究科博士課程入学, 現在にいたる。ロバスト制御理論とその応用に関する研究に従事。計測自動制御学会会員。

川 路 茂 保 (正員) 昭和 19 年 1 月 18 日生。44 年熊本大学大学院工学研究科電気工学専攻修了。同年 4 月同工学部助手, 同助教授を経て, 現在電気情報工学科教授。工学博士 (東京工業大学)。ロバスト制御系, 知識型制御系などの設計法およびロボットへの応用に関する研究に従事。IEEE 会員。