インバータ誘導機駆動システムにおける非線形効果とカオス

正 員 尾 崎 誠 一 (長崎総合科学大)

Nonlinear Effects and Chaos in a Inverter-Induction Machine Drive System

Seiichi Ozaki, Member (Nagasaki Institute of Applied Science)

In the most of the study of the stability problem in inverter-induction motor drive systems, the stability at the equilibrium point has been assumed to be globally stable in the whole system. Induction motor drive systems, however, inherently have a nonlinear nature. In this paper, two nonlinear phenomena in the system are studied by numerically integrating the equation describing the system. One of them is a chaos, that occur in the system having ordinary values of the motor parameters. Another nonlinear effect is existence of two or more attractors at the same system parameters, which is the very important fact to the system design and operation. Namely, it means that the trajectory may converge to oscillatory solutions at parameters of the system having a stable equilibrium point. Regions in the parameter space for such nonlinear effects are shown.

キーワード：インバータ誘導機駆動系，カオス，安定性，アトラクタの共存

1. ま え が き

誘導電動機は、周知のように、固定子コイルにながれる電流によって生じる回転磁界と、この回転磁界が回転子コイルに誘起する電圧によって流れる電流とのあいだに生じる電磁力によってトルクを発生している。なんらかの原因で回転速度が変化すれば、回転子誘起電圧が変わり、回転子電流が変化するためにトルクが変化する。これによって回転速度が影響を受ける。このようにして誘導電動機による駆動システム自体が本来的に非線形系であり、自励振動を発生する要因をはらんでいる。誘導電動機を、入力側にL, Cフィルタをもつインバータによって駆動する場合には、インバータ入力側の電圧、電流が変動することによってシステムのダイナミクスはさらに複雑な様相をていする。

これまで、インバータ誘導電動機駆動システムにおいて、システム全体が振動する現象について数多くの論文が発表され、フィルタや電動機パラメータのほか、高調波、鉄心の飽和やヒステリシス、あるいはインバータのデッドタイムの影響などについて報告がなされている^{(1)~(4)}。

これらの論文では、システムを記述する非線形微分方程式を平衡点のまわりで線形化し、平衡点の安定性を判別してシステムの安定性を検討している。しかしながらこのような解析方法では非線形系特有の現象を把握することはできない。

本論文では、システムを記述する非線形微分方程式をそのまま数値積分することによってその応答をしらべ、非線

形系特有の現象を解明する。近年、非線形系の研究がさかんに行われ、電子回路ばかりでなく、大きな電圧、電流を扱う非線形回路においてもカオスの存在が報告されている⁽⁵⁾。また電動機駆動システムについてはブラシレスDCモータにおけるカオスの報告例がある⁽⁶⁾。本論文では、ごく常識的な定数値をもつ誘導電動機をインバータによって駆動するシステムにおいてカオスが発生することを報告し、インバータ出力電圧、出力周波数、およびフィルタのLとCの値をパラメータとして、カオスが発生する領域を明らかにする。

また、非線形系では一般に複数のアトラクタが共存し、初期値がことなればことなるアトラクタに引き込まれることがあるが、インバータ誘導電動機駆動システムにおけるこのような非線形効果について論ずる。すなわち、平衡点が安定な場合でも、すべての初期値がゼロの状態から出発した軌道が周期解に収束する場合があることをしめし、そのような解の存在するパラメータ領域を明らかにする。このことは、平衡点が安定であっても、可逆運転や速度指令値の急変などシステムが大きく動揺したときに振動的な運転状態に収束する可能性があることを意味しており、従来の、平衡点の安定性を判別してシステム全体の安定性を論ずる方法には限界があることをしめしている。

2. インバータ誘導機駆動システムの解析モデル

本論文でもちいた解析モデルと方程式については同種の式が多く文献^{(1)~(4)}にみられるのでここでは簡単にのべるが、若干の記号や添字のちがいをのぞけばほぼ文献(1)

図 1 システム構成
Fig. 1. System configuration.

に従っている。

図 1 は全システムの構成図である。システムを構成する装置とそれぞれがみだす仮定はつぎのとおりである。

直 流 電 源……定電圧で高調波がない。内部抵抗を考慮する。

フ ィ ル タ……L と C は線形。

インバータ……可変電圧可変周波数インバータ。直流入力電圧を、おくれも高調波もなく、また無損失で対称三相交流に変換する。

誘 導 機……鉄心のヒステリシスと飽和、および空間高調波がない。

回 転 機 系……線形の慣性モーメントのみを考慮し、負荷はないものとする。

現実のシステムでは、高調波や鉄心の飽和など上の仮定で無視した効果がそれぞれに運転特性に影響をあたえるものとおもわれる。しかしここでは、カオスなどの非線形現象がどのような原因で生ずるか、その本質を明らかにする意味で上述の比較的単純化されたモデルをもちいて解析を行う。

まず、誘導機を同期速度で回転する dq 軸上の変数、すなわち固定子の電圧、電流、 v_{ds} , v_{qs} , i_{ds} , i_{qs} , および回転子の電流 i_{dr} , i_{qr} によって表わすと次式がえられる⁽¹⁾。

$$\begin{bmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s + L_s p & -\omega L_s & M p & -\omega M \\ \omega L_s & R_s + L_s p & \omega M & M p \\ M p & -s \omega M & R_r + L_r p & -s \omega L_r \\ s \omega M & M p & s \omega L_r & R_r + L_r p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ i_{dr} \\ i_{qr} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで s はすべり、 ω は一次角周波数、 $p = d/dt$ 。
よく知られているように、これらの変数には一次周波数によって変動する成分がふくまれない。

電動機が発生するトルクは次式によって表わされる。

$$\tau = PM(i_{qs}i_{dr} - i_{ds}i_{qr})$$

ここで P は極対数。

したがって無負荷における回転機系の方程式はつぎのようになる。

$$J \frac{d\omega_r}{dt} = PM(i_{qs}i_{dr} - i_{ds}i_{qr}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで ω_r は回転角速度、 J は慣性モーメント。

また直流電源およびフィルタの部分の回路方程式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_d &= L \frac{di_s}{dt} + v_d \\ C \frac{dv_d}{dt} &= i_s - i_d \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3)$$

(1) 式中の v_{qs} はインバータ出力電圧の初期位相を適当にとればゼロとすることができる。また電動機の電圧 v_{ds} , 電流 i_{ds} , i_{qs} , i_{dr} , i_{qr} は一次周波数で変動する成分をふくまないでインバータはただの電圧変換器として機能する。インバータの電圧変換係数を a とすると、インバータの入力側と出力側の電圧と電流の関係はつぎのようになる。

$$v_{ds} = a v_d, \quad i_d = a i_{ds}$$

これを(3)式に代入して v_{ds} と i_d を消去すれば、七つの変数 i_{ds} , i_{qs} , i_{dr} , i_{qr} , v_d , i_s , および ω_r をもつ微分方程式がえられる。これらの式のなかで非線形項はすべて変数間の積の形で表われる。すなわち(1)式中のすべり s がふくまれる項が四つと(2)式中の二つ、合わせて六つである。強制項は直流電源電圧 E_d のみであり、システム全体は 7 次の非線形オートノマス系としてモデル化される。

3. 解の分岐とカオス

上の式にみるように、システム全体ではパラメータの数がたくさんあり、それぞれにシステムのダイナミクスに大きな影響をあたえる。しかし、ここでは電動機に関するパラメータを表 1 のとおりとし、以後本論文ではこれらの値を固定しておく。これらの値は文献(7)からえたもので、架空の電動機のものとおもわれるが、実際に存在するごく常識的な値と考えてよい。

従来、回転速度やトルクが脈動しない正常な運転状態を「安定」、脈動する場合を「不安定」と呼んでいたが、これを平衡点の安定性に対応させていたので、その限りではこの呼称で不都合はない。しかし本論文では、平衡点が安定であっても振動的な運転状態になりうることを論ずるのであり、その場合の定常解は数学的には「安定」なりリミットサイクルと呼ばれるから、従来の「安定」、「不安定」という呼び方は適切とはいえない。そこで本論文では、以後、回転速度や電流が脈動しない場合を「非振動的」、脈動する場合を「振動的」と呼ぶことにする。

さて、このようなシステムにおいて、パラメータ値の変化に応じた分岐の様子を知るために、まず、フィルタの L と C を、 $L=30$ mH, $C=1$ mF, そして電源抵抗を $R_s=0$ Ω とし、横軸に電動機の一次周波数 f , たて軸に一次電圧 V (この電圧は直流電源電圧 E_d とインバータの電圧変換率 a の積である。電動機の ds 軸上の電圧 v_{ds} は一般に時間とともに変化するが、システムが非振動的ならば一定値で、 $R_s=0$ のときはこの電圧と一致し、インバータ出力の三相電圧の線間電圧にもひとしい) をとった 2 パラメータ分岐図を図 2 にしめす。図において、曲線は平衡点の安定領域と不安定領域の境界曲線で、ハートフーンの部分が不安定領域である。図示する V と f の範囲内において、横軸 1 Hz, たて軸 4 V 間隔のメッシュ状の各点を、初期値

表 1 INV. -IM 系パラメータ
Table 1. INV. -IM system parameters.

1 kW, 200 V, 50 Hz, 2 極
直流電源電圧 $E_d=280$ V
一次, 二次巻線抵抗 $R_s=0.5 \Omega$, $R_r=1.0 \Omega$
〃 〃 リアクタンス $L_s=L_r=0.105$ H
〃 〃 間相互リアクタンス $M=0.1$ H
回転系慣性モーメント $J=0.005$ kgm ²

図 2 パラメータ分岐図 ($L=30$ mH, $C=1$ mF, $R_s=0 \Omega$)
Fig. 2. 2-parameter bifurcation diagram ($L=30$ mH, $C=1$ mF, $R_s=0 \Omega$).

をすべてゼロとして数値積分し、アトラクタがリミットサイクルおよびカオスとなる場合を、それぞれ、点および四角でプロットし、平衡点の場合は無印としている（たて、横両軸上はのぞく）。これらのアトラクタの種類はリアプノフ指数を計算して、第一、第二指数の収束値が、それぞれ、正、0 ならばカオス，0，負ならば周期解，負，負ならば平衡点，として判別している⁽⁸⁾。電動機が非振動的に運転を継続するのはアトラクタが平衡点の場合であり，リミットサイクルまたはカオスとなる場合には，電圧，電流，回転数に異状な振動をともなう。したがって，図のまん中下のあたりの領域で，平衡点が安定であっても初期値によってはリミットサイクルにいたる場合があることは，実際運転上注目すべき現象である。この点については 4 章においてくわしくのべる。

図 3 (a) は，パラメータとして周波数を変化 ($f=30 \sim 70$ Hz) させたときの分岐図で，図 2 の直線 AF の部分に相当する。たて軸には回転子の角速度 ω_r の時間波形の極大値および極小値をプロットしている。周波数を小さくしてゆくと周期倍分岐をくりかえしてカオスにいたる様子がよく表われている。カオス領域の内部には周期解の窓がみられる。図 3 (c) はカオス領域の一部 ($f=45 \sim 53$ Hz) を 5 倍に拡大してしめたもので，細部にわたって窓が分布している様子を知ることができる。図 3 (b) は図 3 (a)

(a) 分岐図 ($f=30 \sim 70$ Hz)

(b) リアプノフ指数 ($f=30 \sim 70$ Hz)

(c) 分岐図 ($f=45 \sim 53$ Hz)

図 3 分岐図とリアプノフ指数

Fig. 3. bifurcation diagrams and Lyapunov exponents.

に対応する部分の第 1，および第 2 リアプノフ指数をプロットした図であり，よい対応がえられている。図 4 (a) ～ (f) は図 2 および図 3 (a) の A～F 点における， $i_{ds}-i_{qs}$

図 4 トラジェクトリ ($i_{ds}-i_{qs}$) 平面
Fig. 4. trajectories ($i_{ds}-i_{qs}$ plane)

図 5 カオス状態での角速度 ω_r
Fig. 5. angular velocity ω_r at chaos.

平面でのトラジェクトリ, また図 5 は E 点 (カオス) における回転角速度 ω_r の時間波形である。カオス状態で運転した場合, 回転数はある範囲内でたえず変化するが, 特定の周期をもたずランダムに変動し, その値の長期予測はできない。

図 6 カオスが発生する領域
Fig. 6. regions of chaos.

図 6 は L と C の値にたいするカオス発生領域の変化をしめすために, 図 2 とおなじ V と f の範囲で, たて, 横ともメッシュを 2 倍に荒くにとってカオスのみをプロットしている。 L の増加 (図 6 (a)~(c)) にしたがってカオスの領域が低電圧, 低周波数の領域に拡大している。また C の変化 (図 2, 図 6 (a), (d)) にたいしてはおおきな変化はみられないが, さらに C を増加させるとカオス領域は急速に縮小し, $C=3$ mH では (図の V と f の範囲で) カオスはみられなくなる。

4. アトラクタの共存について

第 3 節でのべたように, 平衡点が安定であっても初期値ゼロから出発した軌道が周期解になることは実際運転上十分注意する必要がある。このような事実は, システムの安定性の判定を平衡点の安定性を判別することによっておこなっていた従来の方法には限界があることを意味している。ここではすべての初期値がゼロの状態から数値積分したとき, 解が平衡点に落ち着くか否かを問題としてその領域をしらべる。これは, 電動機静止状態において直流電源を投入し, 回転が上昇して何らかの定常状態にいたるまでに相当する。インバータ誘導電動機駆動システムにおいてこのような運転が一般的に広くおこなわれているとはおもわれないが, 現実の運転状況のもとでは, 可逆運転, 速度指令値の急変, 負荷の急変などさまざまな原因によってシステム全体が大きく動揺する場合がある。ここではシステム全体が動揺するひとつのケースとして, また数値計算上の便利のために, 初期値ゼロから数値積分する場合をとりあげてその解の性質と周期解の存在領域をしらべる。

図 7 は $L=3$ mH, $C=3$ mF, $R=0 \Omega$ の場合の 2 パラメ

図 7 2 パラメータ分岐図 ($L=3$ mH, $C=3$ mF, $R_s=0$ Ω)

Fig. 7. 2-parameter bifurcation diagram ($L=3$ mH, $C=3$ mF, $R_s=0$ Ω)

図 9 2 パラメータ分岐図 ($L=10$ mH, $C=10$ mF, $R_s=0.2$ Ω)

Fig. 9. 2-parameter bifurcation diagram ($L=10$ mH, $C=10$ mF, $R_s=0.2$ Ω)

(a) 初期値がすべてゼロの場合

(b) 初期値がゼロと平衡点との中間点の場合

図 8 i_{ds} の時間応答 ($V=200$ V, $f=50$ Hz)
Fig. 8. time responses of stator current i_{ds} ($V=200$ V, $f=50$ Hz)

ータ分岐図である。この場合には、平衡点の安定領域は図 2 の場合よりも大きくひろがり不安定領域は上方に後退しているが、全初期値ゼロからスタートして周期解となる領域は周波数約 45~55 Hz 以上の領域に大きなひろがりを見せている。図 8 (a) および (b) は、それぞれ、 $V=200$ V, $f=50$ Hz のときの、初期値がすべてゼロおよび平衡点との中間点 (平衡点を x^* とすれば $x^*/2$) のときの i_{ds} の応答波形である。

このような領域が図 2 や図 7 とは異なる形になる例とし

図 10 2 パラメータ分岐図 ($L=30$ mH, $C=10$ mF, $R_s=0.2$ Ω)

Fig. 10. 2-parameter bifurcation diagram ($L=30$ mH, $C=10$ mF, $R_s=0.2$ Ω)

て、 $L=10$ cm, $C=10$ mF, $R=0.2$ Ω の場合の分岐図を図 9 にしめす。この場合には平衡点の不安定領域は孤立した島状になっており、全初期値ゼロからスタートして周期解となる領域はその上方にひろがっている。図 10 は L の値を 30 mH に増加した場合で、平衡点不安定領域の島はさらに縮小しているが、初期値ゼロからスタートして周期解となる領域は下にたれ下がってむしろ拡大している。

この図で、A 点および B 点のトラジェクトリ (図 11 (a) および (b)) をみると両者はおなじ周期解であるが、その振幅は大きく異なっている。このことは以下のように説明できる。B 点と隣接する安定領域中の点 C をとると、

図 11 トラジェクトリ
Fig. 11. trajectories.

図 12 2パラメータ分岐図 ($L=100$ mH, $C=10$ mH, $R_s=0.2$ Ω)
Fig. 12. 2-parameter bifurcation diagram ($L=100$ mH, $C=10$ mF, $R_s=0.2$ Ω).

両点間のパラメータの変化にたいして、方程式の特性根の変化は連続的で、安定な平衡点がホップ分岐して不安定となりその近傍に安定なリミットサイクルが発生する。したがって不安定領域の島が小さければ振動の振幅も小さい。この場合には電流やトルクも小さく脈動するが、実際運転上、用途によっては問題にならない場合もあり、負荷がかかればただちに脈動がおさまることがおおい。

これにたいして A 点では、安定な平衡点とそこからかなり離れた位置にあるリミットサイクルの 2 つのアトラクタが共存しており、ベイスインのちがいのために初期値に応じていずれかのアトラクタに吸引されるのであるから、2 つのアトラクタの間には一定の距離があり、リミットサイクルの振幅の大きさも B 点にくらべて大きくなる。A 点の場合電流値が大きく振動するため、実際運転上はこのような波形が観測されるよりは、過電流異状として検知されシステムが停止にいたるという形で経験されるものとおもわれる。

このようなアトラクタ共存の例は平衡点とリミットサイ

クルの場合だけに限らず、初期値のちがいによってべつべつのリミットサイクルにいたることもある。

図 12 はさらに L の値をふやして 100 mH にした場合で、平衡点が不安定な領域は消滅し、全域が安定な領域となっている。しかし、初期値ゼロからスタートして周期解となる領域はさらに下方に拡大している。

5. む す び

インバータ誘導機駆動システムは回転速度が変化すれば本来非線形系であり、この系を記述する非線形微分方程式を線形近似することなく、そのまま数値積分することによって、これまで報告されたことのない、非線形系特有の現象を解明し、それらの発生するパラメータ領域をあきらかにした。非線形系特有の現象とは、1 つのカオスであり、もう 1 つは複数のアトラクタの共存である。とくに安定な平衡点以外の他のリミットサイクルに解軌道が到達する可能性があることはシステムの設計上および実際運転上十分注意する必要がある。

本論文ではこのような現象の存在を報告することに主眼があり、かならずしもこれらの現象の全貌を解明するにはいたっていない。のこされた問題は、各種のパラメータや鉄心の飽和がこれらの非線形現象に与える影響、分岐現象の詳細、さらにカオスの利用にかんする研究などがかんがえられるが、今後の課題としておきたい。

(平成 6 年 8 月 24 日受付, 同 6 年 12 月 8 日再受付)

文 献

- (1) 村井・細野・常広: 「PWM インバータで駆動される誘導電動機の安定性について」, 電学論 B, **105**, 467 (昭 60-5)
- (2) 野中・伊藤: 「電圧形インバータ駆動による誘導電動機の安定性について」, 電学論 B, **97**, 85 (昭 52-2)
- (3) 岸本・松本・鎌倉・大上: 「電圧形 PWM インバータによる誘導電動機駆動系の安定性解析」, 電学論 B, **106**, 737 (昭 61-9)
- (4) R. Ueda, T. Sonoda, K. Koga, & M. Ichikawa: "Stability Analysis in Induction Motor Driven by V/f Controlled General-Purpose Inverter", *IEEE Trans. Industry Appl.*, IA-28, No. 2, 472 (1992-3/4)
- (5) 竜田・田所: 「パラメトリック発振におけるカオス振動」, 電学論 D, **114**, 157 (平 6-2)
- (6) N. Hemati: "Strange Attractors in Brushless DC Motors", *IEEE Trans. Circuits And Systems-I*, **41**, No. 1, 40 (1994-1)
- (7) 電気学会編「電気機器学」, 78 (1985-4)
- (8) A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, & J. A. Vastano: "Determining Lyapunov Exponents From a Time Series", *Physica* **16D** 285 (1985)

尾崎 誠一 (正員) 昭和 20 年 3 月生。昭和 47 年 3 月東京電機大学大学院修士課程修了。現在、長崎総合科学大学電気工学科助教授。パワーエレクトロニクスおよび非線形回路理論に関する研究に従事。