電磁石と鉄片間の磁気吸引力の近似計算法

正員 山口 仁 (富士電機総研)

正員 渡部 俊春 (富士電機総研)

正員 山田 一 (信州大)

An Approximate Calculation Method of Magnetic Attractive Force between an Electromagnet and an Iron Piece using FEM

Hitoshi Yamaguchi, Member, Toshiharu Watanabe, Member (Fuji Electric Corp. R. & D., Ltd.)
and Hajime Yamada, Member (Shinshu University)

Force between an electromagnet and an iron piece is usually calculated with a equation of Maxwell's stress, and for the exact result, the integration of stress is made along a route away from the iron. It, however, is necessary to calculate magnetic flux density components paralell to the integration route as well as perpendicular ones.

The authors propose a new method of calculation using FEM. This method presents that the integration of Maxwell's stress is made on the surface of an iron piece, and magnetic flux is regarded perpendicular to the iron surface. Calculated values of magnetic force, attractive force and restoring force under small parallel displacement to pole face, have been compared with measured ones on an experimental model. The following results are obtained. (1) The magnetic force is calculated using the results of FEM analyses where the number of nodes has been less than 1000. The differences between the calculated and the measured values are smaller than 5%. (2) To obtain the above results, it is necessary that relative permeability of the iron piece is larger than 100 and the side length of each triangle element near the iron corner is less than 2% of the gap length.

キーワード：磁気浮上，リニアモータ，電磁石，鉄，吸引力，マクスウェル応力，有限要素法

1. まえがき

吸引形磁気浮上鉄道では地上側の磁気レールを積層することで、磁気抗力が大幅に低下するとともに、電磁石を軽量化でき、電磁石の励磁損失も低減できる⁽¹⁾⁻⁽²⁾。この方式の案では吸引電磁石として進行方向にN極S極が並ぶ凸極電磁石を用いる。磁気レールの断面積を小さくすることが建設コスト低減のためには必要となるため、吸引電磁石の磁極の幅と長さの空隙長に対する比を大きく取することは得策ではない。そのため二次元有限要素法を使った解析法そのままでは、端部での磁束の集中の影響で吸引力の計算値の誤差が大きい。また、設計のためには繰り返し計算が必要になるが、三次元計算はまだ手軽に設計に利用できるとはいえない。そこでパソコンで手軽に計算できる程度の分割数で、現在普及している二次元有限要素法を使った磁界解析結果から磁気吸引力を計算する方法を検討した。

電磁石と鉄の間の磁気吸引力を有限要素法を使って計算する方法については、いくつかの方法があり、これまでに

も多くの検討がなされている。マクスウェルの応力による方法では、マクスウェルの応力の積分路に沿った磁界分布を、法線成分と接線成分の両方について精密に計算することが必要である。鋭い角を持つ鉄がある場合は角の近傍で磁界が急激に変化するので、計算精度を十分なものとするためには、鉄心の角の影響が小さくなるように鉄から離れた面に沿ってマクスウェルの応力を積分して計算する方法が推奨されている⁽³⁾⁻⁽⁴⁾。二次元有限要素法では計算領域を三角形要素に分割し、三角形要素の頂点のベクトルポテンシャルを求め、このベクトルポテンシャルから磁束密度を求めるのが普通である。節点でのベクトルポテンシャルの値から空气中に設定したマクスウェルの応力の積分路に沿った磁界分布を、積分路に垂直な成分と平行な成分について計算するためには補間を行う手間がかかる。また磁束密度の絶対値のみならず角度まで精密に計算するためには、磁界解析において積分路付近の分割数をかなり多くすることが必要である。

磁気吸引力を求める別の方法として、鉄片の位置を変え

て磁気エネルギーを計算し、その変化から電磁力を求める方法がある^{(5) - (7)}。この方法では、鉄の位置を変えて最低でも2回の磁界解析を必要とするため、計算量が増してしまう。また改良法として仮想変位の原理を使って変位を生じた空隙の要素についてのみ積分して和をとることで、1回の磁界解析を行うだけですませる方法も考えられており計算精度も良いと言われている^{(8) - (9)}。しかし、この方法は普通の有限要素法による磁界解析結果を利用して手軽に計算するというわけには行かない。

ここに筆者らが提案する計算方法は、鉄と空気の透磁率の比が大きいことを利用して計算する方法である。鉄の透磁率を十分大きいものとすれば、鉄の表面では磁界の接線成分が無視でき、力についても接線成分は無視できる。鉄表面に垂直な磁束密度成分は、二次元有限要素法により磁界解析してベクトルポテンシャルを求め、鉄の表面上に沿った隣合う節点間のベクトルポテンシャルの差を節点間の距離で割ることで容易に求められる。この方法によれば、比較的少ない分割数の二次元有限要素法による磁界解析結果から、実用的精度で鉄に作用する磁気吸引力を計算することが可能である。この方法の実用性を確認するため、実験モデルにより実測し計算結果と比較した。ここでは下記について述べる。

- (1)電磁石と鉄の間の吸引力の計算方法
- (2)吸引力の実測結果と計算結果の比較
- (3)実用精度を得るための条件

2. 磁気吸引力の計算法

ある面に垂直な磁界と磁束密度を H_N , B_N , 平行な磁界と磁束密度を H_T , B_T とすると、マクスウェルの応力の面に垂直な成分 f_N と平行な成分 f_T は次式で求められる⁽¹⁰⁾。

$$f_N = H_N B_N / 2 - H_T B_T / 2 \quad [\text{N/m}^2] \quad (1)$$

$$f_T = H_T B_N \quad [\text{N/m}^2] \quad (2)$$

もし鉄の透磁率を無限大とすると、鉄の表面では磁界および磁束密度は鉄の表面に垂直な成分のみである。したがって、 H_T , B_T が0となるため、鉄の表面に平行な電磁力成分 f_T はなく、垂直な吸引力成分のみとなり、(1)式は次のようになる。

$$f_N = H_N B_N / 2 \quad (1')$$

この電磁力を鉄の表面に沿って計算して和を取ることで電磁力を求める。

具体的な例として、図1に示す検討モデルについて考える。図2はその断面図である。まず図2の断面で紙面に垂直なy方向に無限に長い二次元モデルで、鉄片の面ABに作用する吸引力について考える。鉄片表面を表面の磁束密度がほぼ均一と見なせる程度にm分割して磁界解析が行われているものとする。鉄表面の線分要素Jの長さを Δx_J [m]、その表面に垂直な磁束密度成分を B_J [T]とすると、鉄片表面ABに垂直に作用する吸引力は(3)式で計算できる。

$$f_N = \sum_{j=1}^m \frac{B_J^2 \Delta x_J}{2 \mu_0} \quad [\text{N/m}] \quad (3)$$

図1 磁気吸引力計算法の検討モデル

Fig.1. Model for study of magnetic attractive force calculation.

図2 磁気吸引力計算法検討のための磁界解析モデル (単位: mm)

Fig.2. Model for magnetic analysis for study of magnetic attractive force calculation.

B_J は図2の二次元モデルで磁界解析して得られたベクトルポテンシャルから求める。鉄心表面上の隣接する節点 p_J と p_{J+1} の点のベクトルポテンシャルをそれぞれ A_J と A_{J+1} とすると次式により求められる。

$$B_J = (A_J - A_{J+1}) / \Delta x_J \quad (4)$$

以上は鉄片幅 w [m]が無限に長い場合について考えたが、検討モデルでは有限長である。鉄心が有限長の場合、鉄心

の端部近傍に磁束の集中が生ずるため、中間部より大きなマクスウェルの応力となる。例として図3に図2の検討モデルについて、空隙 δ が10[mm]と14[mm]の条件で磁界解析して求めた鉄片表面ABにおける磁束密度の分布を示す。紙面に垂直な y 方向分布の端部での磁束集中の影響を補正するため、(5)式の係数を乗ずることとする。

$$c = F_l / (f_m w) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで F_l は端部への磁束集中を考慮した場合の吸引力であり、側面図について磁界解析した結果から(3)式により求めることができる。 f_m は端部での磁束密度の集中を無視したときの単位長当たりの吸引力で、 NI を起磁力とすると次の式で計算できる。

$$f_m = \mu_0 (NI / \delta)^2 / 2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

モデルの形状が相似なら、磁束分布も相似形となることを考慮すると、図3から磁極端から空隙長分の長さよりも内側の空隙部分では磁束密度が一定であると考えてよいことが分かる。そこで、磁極幅 w が空隙長 δ の2倍以上ある場合には、端部から空隙長分の吸引力を F_c とすると、 F_l は(7)式で近似的に求めることもできる。

$$F_l = 2F_c + f_m (w - 2\delta) \quad \dots\dots\dots (7)$$

磁界解析結果から(3)式により F_c を計算することにより、直方体鉄心が一定空隙で対向すると見なせる場合には、補正係数は数値計算結果から求めた次の式で近似できる。

$$c = 1 + 0.63 \delta / w \quad \dots\dots\dots (5')$$

したがって鉄片のAB面に働く磁気吸引力は(8)式で求めることができる。

$$F_N = \frac{c w}{2 \mu_0} \sum_{j=1}^n B_j^2 \Delta x_j \quad [\text{N}] \quad \dots\dots\dots (8)$$

(8)式により鉄の表面全体について垂直な磁気吸引力を求めてベクトル和をとることで、鉄心全体に作用する磁気吸引力を計算することができる。

3. 磁気吸引力の計算結果と実測結果の比較

図1のモデルについて吸引力および左右方向復元力の計算結果および実測結果との比較について以下に述べる。

<3.1> 吸引力 水平方向のずれがない状態で空隙長が

図3 鉄片表面の磁束密度分布

Fig.3. Magnetic flux distribution of on the iron surface.

10[mm]と14[mm]の場合について、直流励磁したときに鉄片に作用する磁気吸引力を計算した。鉄心の角付近の磁束密度は空隙中央部の値の数倍にまで急激に増大するので、正確な計算値を得るために、端部近傍の分割を最も細かい部分では、三角形要素の辺長を空隙長の1%まで細かくして二次元有限要素法で磁界解析を行った。節点数は600である。その結果をもとに計算した吸引力と起磁力の関係を図4に○印で示した。この図で実線と点は測定値を示す。磁気吸引力は鉄片をロードセルで支持して計測した。図4は計算結果が実測結果とよく一致することを示す。

製作した実験モデルでは図5に空隙中心での磁束密度の実測値と起磁力との関係を示すように、電磁石の鉄心の一部で磁気飽和が生じた。ここでは磁界解析を容易にするため、透磁率は一定として解析し、空隙における磁束密度が

図4 吸引力と起磁力の関係

Fig.4. Relation between magnetic attractive force and magnetomotive force.

図5 空隙における磁束密度と起磁力の関係

Fig.5. Relation between magnetic flux density in air gap and magnetomotive force.

図6 左右力と起磁力の関係

Fig.6. Relation between lateral force and magnetomotive force.

実測と同じとなる条件から鉄心の消費起磁力を求め、図4の計算結果の起磁力に加えて示した。この検討条件では空隙中心付近での磁束密度はせいぜい0.2[T]であるので、鉄片と対向する磁極部分では、鉄心端部での磁束の集中を考慮しても飽和していない。

〈3.2〉 左右力 図6に空隙長 δ が10[mm]と14[mm]の場合について、鉄片がy方向に10[mm]変位した場合について計算した左右力（復元力） F_y と起磁力の関係を○印で示す。また同じ図に実測結果を実線と点で示す。左右力の測定は、鉄片を水平方向には自由に動きうるように支持して、ばね秤で10[mm]の変位を与え、そのときの力の大きさを測定した。この図から左右力についても計算と実測の差は5%以下であり、比較的良く一致することが分かる。

4. 実用精度を得るための条件

以下に鉄心の透磁率、分割数の計算精度への影響について述べる。

〈4.1〉 透磁率の影響 以上では鉄の透磁率が十分大きいと仮定した。しかし前述のように、鉄の角の近傍には磁束が集中するため、起磁力が大きい場合には角の近傍で飽和が生じ、鉄心の透磁率が小さくなり、誤差の原因となる。そこで、磁極部分の透磁率を変えてどの程度の透磁率まで磁束の鉄心表面の接線成分はないとした仮定が有効であるかを有限要素法で数値解析して検討した。

図7の単純なモデルについて、鉄の比透磁率 μ_r を無限大から20まで変えて検討した。図8に鉄心の対向面（図7でx軸上の部分）に作用する磁気吸引力 F_z を、それぞれ鉄心上面20[mm]全体、角から5[mm]、2[mm]までの部分についてこの近似計算法で求め、それぞれの誤差 ε と比透磁率 μ_r の関係を示す。基準となる吸引力 F_{z0} は比透磁率を無限

図7 計算モデル

Fig.7. Model for magnetic analysis.

図8 透磁率の吸引力計算値への影響

Fig.8. Effect of magnetic permeability on error of approximate calculation.

大とした $z=10$ [mm]の境界面に沿って積分して求め、誤差 ε は $(F_{z0}-F_z)/F_{z0}$ で計算した。

この結果では比透磁率が100以下では比透磁率の減少により急激に誤差が増大している。鉄心対向面幅が20[mm]の場合には比透磁率が20であっても誤差は3%程度である。しかし端部近傍5[mm]あるいは2[mm]のみに着目した場合から、磁極対向面幅が空隙長より小さい場合には、誤差を5%以下にするためには比透磁率が100以上であることが必要であると言える。

図9に鉄心の対向面での磁束密度の表面に垂直な成分 B_z の分布を、比透磁率が無限大、100、20の場合について示す。この図に示す磁束密度は、それぞれの比透磁率ごとに $x=0$ における磁束密度の値 B_{z0} を基準にした比で示した。実線は比透磁率が無限大の場合、×印は100の場合、○印

は20の場合を示す。この図では空隙における磁束密度の比は x が0から15[mm]の範囲については比透磁率によらずほぼ一定であるが、端部の $x > 15$ [mm]の部分については比透磁率により少し差が生じており、比透磁率の高いものほど端部における磁束密度が中心部より大きくなっている。 B_z/B_{z0} の端部における最大値は比透磁率が20の場合には2.2程度である。

実際は鉄心が非線型であることを考慮すると、磁極端部での磁束密度が1.8[T]を越えても、端部以外は飽和しないため透磁率が大きいので、端部での飽和の影響はこの検討結果より小さい。端部の1[mm]四方の比透磁率を20、その他の鉄磁極部分の比透磁率を1000として吸引力を計算すると全体の比透磁率が1000の場合との差は0.2%であった。

通常の吸引電磁石では空隙長より磁極の対向面を広くとるので、端部近傍の比透磁率が20程度になるまで飽和しても、吸引力への影響は大きくないと考えられる。しかし磁極対向面に平行な方向の変位に対する復元力については、電磁力が先端から空隙長程度の部分に集中して作用するので、比透磁率が100程度以上であることが実用精度を得るためには必要であろう。電磁鋼板の比透磁率は磁束密度1.8[T]のとき200程度であるので、端部での磁束の集中を考慮すると、空隙中央部の磁束密度が0.8[T]程度までであればこの計算法が実用できると考えられる。

以上は巻線のない鉄片の周囲に沿った積分について述べたが、巻線を持つ鉄心表面に沿って積分を行う場合には、巻線に作用する電磁力を計算して補正すればこの近似法を適用できる。

<4.2> 分割の影響 前述のように、鉄表面の磁束密度は磁極の端部に近づくにつれて急激に大きくなる。そのため有限要素法で磁界解析するとき、要素分割の仕方により

図9 鉄心表面の磁束分布への透磁率の影響

Fig.9. Influence of magnetic permeability on distribution of magnetic flux density along iron surface

端部付近で磁束密度の計算値が異なる。空隙長に比べ幅の広い磁極の場合は吸引力への端部の影響は小さいが、磁極の面積が狭い場合や、主として端部近傍で力を発生する磁極面に平行な方向の左右力には影響が大きい。そこで鉄心の角近傍の空隙部分の分割により、鉄心表面の磁束密度と復元力にどの程度の差がでるかを検討した。

図7のモデルについて磁界解析して得た磁極側面での磁束密度分布の計算結果を図10に示す。角の近傍の鉄表面の要素辺長を空隙長 δ の1, 2, 5, 10%とした場合について磁界解析した。この図の縦軸は空隙中心部における磁束密度に対する比で示す。実線は端部から0.4[mm]までを0.1[mm]に分割したものであり、等角写像により求めた結果とほぼ一致している。鉄片端部の分割寸法を空隙長 δ の2, 5, 10%とした場合に対応する磁束密度の最大値(最端部)を図10にそれぞれ○, □, ×で示してある。鉄心の上端から離れたところでは分割による差はほとんどなかった。

分割が粗くなると最大値が小さくなるため、吸引力の計算値が小さくなる。図10から分かるように、磁束密度は端から空隙長以上離れると急激に小さくなるため、復元力は主として端部付近に作用する。そこで、磁極端から10[mm]までの側面部分に作用する磁気力 F_y の計算結果を等角写像による計算結果 F_y' に対する比で表1に示す。この表から、精度良く計算するためには、鉄心の角近傍での要素辺の長さを空隙長の2%以下に分割することが必要であることが分かる。

<4.3> 従来のマクスウェルの応力法との比較 空隙長 δ 10[mm]、 y 方向変位10[mm]の場合について、空隙部分の分割数と積分路の位置を変え、(1), (2)式を使用して、マクスウェルの応力法により電磁力の計算を行い比較した。

吸引力は鉄心の角付近の分割が粗い場合2~3%小さい値となったが、積分路と空隙部分の分割数の影響はあまり見られなかった。

左右力については、空隙長 δ を3層に分割した例では、磁極表面から積分路までの距離が1.5[mm]と5[mm]とでは20

図10 鉄表面の磁束密度と鉄片端部の分割数

Fig.10. Influence of division number on magnetic flux density along a iron surface.

表1 鉄心側面に作用する磁気力と分割の関係

角部分の分割寸法	磁気力比 F_y/F_x
1 %	1.00
2	0.986
5	0.94
10	0.93

%の差があった。また、磁極表面から積分路までの距離を5[mm]にとっても、角の近傍を細かく分割した場合は8%程度の誤差を生じた。空隙長を5層に分割した例では、磁極表面から積分路までの距離を1, 3, 5[mm]とした場合、分割の仕方を変えると5%程度のばらつきになった。磁極表面から積分路までの距離が3~5[mm]のとき、左右力の計算値は2%程度の誤差となった。

この例では、分割の仕方と積分路の取り方に注意すれば、計算精度の点では、空間部分に積分路をとる従来のマクスウェルの応力法と、鉄表面に積分路をとる本提案で、同じ程度の実用精度が得られた。

しかし計算の手間の点では、鉄心表面に垂直な磁束密度成分のみを使用し、計算範囲も鉄心表面に限ることができる本提案の方が、従来のマクスウェルの応力法より容易である。特に、物質の境界のみを入力し、完全自動でメッシュ分割して解析する場合に有利である。

5. あとがき

本論文を要約すると次のようである。

(1) 電磁石と鉄片の間の磁気吸引力を二次元有限要素法による解析結果をもとに、磁束が鉄の表面に垂直であると仮定して磁気吸引力を計算する方法を提案した。この方法では1000点以下の分割数での1回の磁界解析結果から、簡単な方法により磁気吸引力を計算できる。

(2) 検討モデルについて空隙における磁束密度0.03~0.2[T]、吸引力0.5~50[N]の範囲において、磁気吸引力の実測と計算の比較を行った結果、誤差は5%以下であり、実用性があることを示した。

(3) 本方法は、直流励磁では鉄の比透磁率が100程度以上であれば実用性があり、さらに高精度の結果を得るには、鉄の角の付近の要素を空隙長の2%以下に分割すればよいことも判った。

(平成7年2月6日受付, 平成7年8月23日再受付)

文 献

- (1) 山口仁・渡辺俊春・山田一:「吸引形磁気浮上鉄道の積層形磁気レールの鉄損による磁気抗力解析」, 電学論D, 114巻7/8号, pp.753-760(1994)
- (2) S.Yamamura & H.Yamaghi: "Electromagnetic Levitation System by means of Salient-Pole Type Magnets Coupled with Laminated Slotless

Rails", IEEE Trans. on Vehicular Tech., Vol.39, No.1, Feb., pp.83-87(1990)

- (3) 中田高義・高橋則雄・堀之内浩・柊島武文:「有限要素法によるトルク解析の精度向上法」, 昭59電気学会全大, No.634 (1984)
- (4) 中田高義・高橋則雄:「磁束密度の計算誤差とトルクの精度」, 昭60電気学会全大, No.696 (1985)
- (5) 沢孝一郎・山崎雅史・藤岡茂雄・宮地邦夫:「仮想変位の原理に基づく有限要素法による電磁力の計算」, 昭62電気学会全大, No.748 (1987)
- (6) 沢孝一郎・山崎雅史・石野裕嗣・宮地邦夫:「仮想変位の原理に基づく有限要素法による電磁力の計算法の検討」, 昭63電気学会全大, No.766, pp.939-940(1988)
- (7) 木村昭穂・松坂知行・加川幸雄・村井忠邦:「パーミアンスの変位による電磁力の計算」, 平2電気学会全大, No.815, pp.(8)22-23 (1990)
- (8) J.L.Coulomb: "A Methodology for the Determination of Global Electro-mechanical Quantities from a Finite Element Analysis and its Application to the Evaluation of Magnetic Force, Torque and Stiffness", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-19, NO.6, Nov., pp.2514-2519(1983)
- (9) 中田高義・高橋則雄・藤原耕二・森分俊雅:「改良エネルギー変位法による電磁力解析」, 平4年電気学会全大, No.841, p.8-17(1992)
- (10) 例えば, 電気学会編:「電磁気学(第2次改定版)」, pp.103-104 (1986)

山口 仁

(正員) 1940年12月生。1963年3月九州大学工学部電気工学科卒業。同年4月富士電機(株)入社。遮断器の研究開発, 設計に従事。1971年から主として研究所にてリニアモータ, 磁気浮上鉄道の研究に従事。

渡部 俊春

(正員) 1943年4月生。1962年3月秋田県立秋田工業高等学校卒業。同年4月富士電機(株)入社。研究所にて主として回転機, リニアモータの研究に従事。

山田 一

(正員) 1933年4月生。1954年東京工業大学大学院修士課程終了。1984年信州大学教授。工学博士。電磁回路解析を中心に据えてリニアモータ, 磁気センサと電磁形人工心臓の研究に従事。広島大学医学部教授(併任)。機械学会, 人工臓器学会, IEEE等の会員。中国・太原工業大学名誉教授。