空間分布が軸方向座標のみに依存する軸方向 外部磁気遮蔽用の超電導巻線型磁気シールド

正 員 武 智 盛 明 (三菱電機)

Magnetic shielding by superconducting windings for shielding axial external magnetic field
with spatial distribution of a function of axial co-ordinates

Moriaki Takechi, Member (Mitsubishi Electric Corporation)

This paper describes an analytical study on magnetic shielding by a set of superconducting windings for applications such as low magnetic field measurement using SQUIDs (superconducting quantum interference device) and magnetic resonance imaging. Fundamental equations to be satisfied by the coil system are studied and a direct method to determine coil parameters are proposed. The proposed method was applied to obtain coil configurations for shielding axial external magnetic field with spatial distribution of uniform or linear gradient along axis. Comparison of the shielding factor proves that superconducting windings can achieve better shielding factors than superconducting cylinder with same aspect ratio.

キーワード: 磁気遮蔽、超電導コイル、磁気雑音、SQUID

1. まえがき

SQUID(超伝導量子干渉素子)を用いた生体磁気計測などの微弱磁界の計測では、環境磁気雑音に比べて低い磁界の測定が必要となるため、環境磁気雑音を遮蔽した低磁界空間の形成が要求される。また、磁気共鳴イメージング装置においても、磁気共鳴周波数の変動による画質の低下を防止するため、磁気的外乱の遮蔽が要求される。

このような環境磁気雑音を遮蔽する遮蔽材として、磁性体や超電導体が利用されている。超電導シールドは、超電導体の完全反磁性と完全導電性を利用したもので、低周波においても高い遮蔽効果が得られる特徴を有するため、 $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 程度の高い磁気遮蔽率を要求される生体磁気計測などの、微弱磁界計測用の磁気遮蔽として関心が高まっている⁽¹⁾⁽²⁾。

超電導体を用いた磁気シールドとしては、従来、主として円筒状超電導体を用いたものが検討されている。円筒状超電導シールドの内部磁界解析については矢原⁽³⁾、Feng⁽⁴⁾等の報告があり、一端開放または両端開放の有限長円筒においても軸方向磁界に対する遮蔽効果を有することが示されている。しかし、軸方向の外部磁界に対して、両端開放の有限長円筒で高い遮蔽効果を得るためには、円筒の長さとの半径の比を大きくする必要がある。また、部分的な遮蔽特性の相違や、局所的な磁束トラップを防ぐためには、超電導材に均質な特性が要求される。従って、広い領域を遮蔽しうる大型磁気シールドの実現は容易でない。また、遮蔽効果を高めるために、一端を閉鎖した円筒状シールドも

研究されているが、被験者への圧迫感の緩和や、計器配置の自由度を確保する観点からは、両端開放、且つ短尺の形状が望ましい。

一方、超電導巻線による磁気遮蔽作用については、古くから着目されているが⁽⁵⁾、その応用は比較的遮蔽率の低い対象にとどまっている。また、巻線を用いた外部磁気遮蔽として、外部磁界を磁界測定素子で検出し、逆極性の磁界を発生するよう常電導コイルの通電電流を制御する能動型磁気シールドが報告されているが⁽⁶⁾、高遮蔽率の受動型磁気シールドは報告例をみない。

超電導巻線による磁気遮蔽は、外部磁界によって巻線に誘起される電流が発生する逆極性磁界を利用するものであり、巻線型で高い磁気遮蔽率の磁気シールドが実現できれば、超電導円筒シールドと同様、電源を必要としない受動型の磁気シールドが実現できる。また、超電導線材を巻回して製作するので、大型装置の製作も可能となる。しかし、超電導巻線で高い磁気遮蔽率を得るためには、誘導電流によって発生する磁界が、対象とする全領域にわたって印加磁界と大きさが等しく、逆極性である必要がある。超電導コイルで所定の磁界分布を得るためのコイル形状の決定法については、多数の報告があるが、何れも強制電流を前提としたものであり、コイルの形状と巻数および電流値は、超電導体の許容電流密度や、装置の許容寸法等の制約条件内で、任意に選定できることを前提としている。これに対し巻線型磁気シールドでは、巻線電流は外部磁界による誘起電流であって、シールドコイルの形状と巻数密度、および外部磁界によって定まり、任意に選定できな

い。本論文でも例示するごとく、一般に、外部磁界によって超電導コイルに誘起する電流は、印加磁界を相殺するのに必要な電流とは一致しない。このため、巻線型で高い磁気遮蔽特性を実現し得るか否かについては明らかにされていない。

本論文では、超電導線材を用いた巻線型超電導シールドによる外部磁気遮蔽の可能性を検討するための第一段階として、軸方向成分のみを有し、その空間分布が軸方向座標のみに依存する外部磁界を対象に、巻線型超電導シールドの可能性を検討する。まず、超電導円筒および超電導ソレノイドコイルの軸方向外部磁界に対する磁気遮蔽特性を解析し、無作為の形状では良好な遮蔽特性が得られないことを示す。次いで、超電導巻線で外部磁界遮蔽を行うための条件を検討し、所要の遮蔽特性をもつ巻線諸元を決定するための基本式を導出する。また、この基本式の解を得るための陽解法を示す。さらに、この方法を用いて得られた具体的な巻線型磁気シールドの形状例を示し、超電導巻線を用いて、短尺で高い磁気遮蔽率を有する磁気シールドが実現可能であることを示す。

2. 超電導シールドの磁気遮蔽特性

超電導円筒や超電導コイルは、超電導体の完全導電性または完全反磁性の特性によって、受動的な磁気遮蔽作用を示す。Feng⁽⁴⁾は有限長の両端開放超電導円筒に軸方向一様磁界が印加された場合の、軸上における磁界遮蔽効果を求めているが、非軸上の遮蔽効果や勾配磁界の遮蔽効果については述べていない。また、Gabrier⁽⁵⁾は超電導単層ソレノイドコイルの磁気遮蔽効果を求めているが、シールドコイルの発生する逆磁界の均一性が問題とならない用途が対象となっている。何れも、無作為の形状では、微弱磁界計測などに要求される高い磁気遮蔽率は実現できないことを示している。そこで、巻線型超電導シールドの実現可能性を検討するに先立ち、超電導円筒および超電導コイルの磁気遮蔽特性について考察し、高遮蔽率の磁気シールドの満たすべき条件を検討する。

<2.1> 超電導円筒の磁気遮蔽特性 有限長の両端開放超電導円筒に、軸方向磁界が印加される場合の磁気遮蔽特性について検討する。この場合の誘起電流は周回成分のみを有するので、図1に示す如く、円筒を軸方向に分割した円環に置換しても電流分布は変化しない。また、円環は零抵抗閉回路を構成するので、鎖交磁束は変化しない。従って、半径 a 、長さ $2l$ の超電導円筒を n 個の円環に分割し、円環要素 i の中心座標を z_i 、誘起電流を I_i 、円環要素 i と円環要素 j の相互インダクタンスを M_{ij} とすれば、次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} I_j + \phi_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

ここに ϕ_i は外部磁束と円環要素の鎖交磁束を示す。外部磁界が軸方向成分のみを有し、円筒座標系で

$$\mathbf{B}_e(r, z, \varphi) = B_{ez}(r, z, \varphi) \cdot \mathbf{e}_z \quad (2)$$

と表されるものとすれば、 ϕ_i は次式で与えられる。

$$\phi_i = \int_0^a \int_0^{2\pi} B_{ez}(r, z, \varphi) r dr d\varphi \quad (3)$$

(1)(3)式から、超電導円筒に誘起される電流の分布を求めることができる。

一方、図2に示す半径 a_i 、電流密度 j_i の円環電流による磁界 $\mathbf{B}_i$ は、 φ 成分を持たず、その分布も φ に依存しない軸対称磁界であり、 $\rho < a$ の領域に対し、ルジャンドル関数 P_k を用いて次の級数式で表すことができる⁽⁷⁾。

$$\mathbf{B}_i(r, z) = B_{iz}(r, z) \cdot \mathbf{e}_z + B_{ir}(r, z) \cdot \mathbf{e}_r \quad (4)$$

ここに

$$B_{iz}(r, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_0 j_i}{2} \epsilon_{ik}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k P_k(\cos \theta) \quad (5)$$

$$B_{ir}(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_0 j_i}{2} \epsilon_{ik}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k \frac{P'_k(\cos \theta)}{k+1} \quad (6)$$

ただし、

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (7)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{r}{z} \quad (8)$$

また、係数 ϵ_{ik} は、円環電流による磁界の、原点におけるテイラー展開の係数を与え、円環の形状変数 a_i 、 z_i 、 w_i によって定まる。その表式を付録1に示す。

図1 超電導円筒シールドの磁気遮蔽率解析モデル
Fig.1 Schematic diagram for analysis of shielding factor of superconducting cylindrical shield

図2 円環要素の磁界計算モデル
Fig.2 Analytical model of single layer solenoid for magnetic field calculation

超電導円筒に誘起された電流による磁界は、全円環要素の磁界の合成値として、次式で与えられる。

$$B_{\alpha}(r, z) = \sum_{i=1}^n B_{i\alpha}(r, z) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 j_i}{2} \varepsilon_{ik}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k \right\} P_k(\cos \theta) \quad (9)$$

$$B_{\alpha}(r, z) = \sum_{i=1}^n B_{i\alpha}(r, z) \\ = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 j_i}{2} \varepsilon_{ik}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k \right\} \frac{P'_k(\cos \theta)}{k+1} \quad (10)$$

超電導円筒内部の残留磁界 $\mathbf{B}_{res}$ は、超電導円筒による磁界と印加磁界の合成値として求められる。

$$\mathbf{B}_{res}(r, z, \varphi) = \{B_{\alpha}(r, z, \varphi) + B_{\alpha}(r, z)\} \cdot \mathbf{e}_z + B_{\alpha}(r, z) \cdot \mathbf{e}_r \quad (11)$$

超電導円筒の誘起電流による磁界は、 φ に依存しない軸対称磁界であるので、外部磁界の φ に依存する分布は、超電導円筒では相殺できない。そこで、ここでは、外部磁界が z 軸方向成分のみを有し、且つ、その空間分布が z 座標のみの関数である場合について、遮蔽特性を検討する。特に本項は、超電導円筒の基本的な遮蔽特性を考察することが目的であるので、 z によらず一定の大きさを有する磁界(以下一様磁界と呼ぶ)と、大きさが z 座標に比例して変化する磁界(以下 z の一次勾配磁界と呼ぶ)について検討する。

図3は、 $l/a = 1.0$ の形状の超電導円筒に、 z 軸方向の一様磁界が印加された場合の磁束分布を示したものである。また、図4は、この場合の残留磁界と印加磁界の比 B_{res}/B_e の軸上分布を求めたものである。(10)式からも明らかな通り、 z 軸上($\theta = 0$)では磁界の径方向成分は零であるので、 B_{res} は残留磁界の z 成分の大きさに等しい。図より、超電導円筒の中心においても、印加磁界の2.4%の磁界が残留しており、中心から離れるに従って残留磁界が増加することがわかる。図5は、超電導円筒の長さとの比 l/a を変化した場合の、原点および z 軸上 $\rho = 0.3a$ の点、および r

図3 一様分布外部磁界に対する超電導円筒の磁束分布
Fig.3 Flux distribution for a superconducting cylinder in uniform external field

軸上 $\rho = 0.3a$ の点における残留磁界の z 成分と印加磁界の比を示したものである。 z 軸上および r 軸上では、残留磁界は r 成分を持たないので、 z 成分が残留磁界の大きさを表す。超電導円筒の半径を $0.5m$ とし、磁気遮蔽の対象領域として $\rho \leq 0.15m$ の領域を想定すれば、対象領域の残留磁界を印加磁界の 10^{-5} 以下とするためには $l > 3a$ すなわち超電導円筒の全長を $3m$ 以上とする必要があることがわかる。

<2.2>超電導巻線の磁気遮蔽特性

次に超電導巻線の磁気遮蔽特性について考察する。超電導巻線系は、同軸に配置した n 個の円筒状コイルを直列接続して、閉回路が構成されているものとする。巻線 i と外部磁束 B_e との鎖交磁束を λ_i 、誘起電流を ΔI 、巻線系の合成インダクタンスを L とすれば、鎖交磁束保存の条件から次式が成立する。

$$L \cdot \Delta I + \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (12)$$

(12)式より誘起電流を求めれば(11)式から残留磁界を求めることができる。

図6は、半径 a 長さ $2l$ の単層ソレノイドコイルについて、 z 軸方向に一様磁界が印加された場合の、コイル中心における残留磁界の印加磁界に対する比、 B_{res}/B_e を求めたものである。残留磁界は、ソレノイドコイルの形状比 l/a によって異なり、特定の形状、即ち $l/a = 0.876$ の場合のみ、中心における残留磁界が零となることがわかる。

図7は、この場合の磁束分布を示したものである。また、図8は軸上残留磁界を示す。中心においては誘起磁界が印加磁界を相殺し、残留磁界が零となるが、中心以外の点では磁界が残留し、 $z/a = 0.3$ の点における残留磁界は、

図4 一様分布外部磁界に対する超電導円筒の軸上残留磁界
Fig.4 Axial distribution of residual field for a superconducting cylinder in uniform external field

図5 一様磁界に対する超電導円筒シールドの磁気遮蔽特性
Fig.5 Shielding factor of a superconducting cylindrical shield for uniform field

印加磁界の0.0434である。これは、ソレノイドコイルの誘起電流によって発生する逆磁界が、空間的に均一でないためである。一様磁界に対して広い領域で高い遮蔽効果を得るためには、コイルの誘起電流による発生磁界が、空間的に均一であることが要求される。そこで、高均一磁界発生用マグネットの磁気遮蔽効果を試算する。

図9は、0.5T高均一磁界発生用超電導マグネットのコイル諸元例を示したものである。このコイルについて、軸方向一様磁界印加時の磁界分布を求めると、図10および図11の通りであり、印加磁界の0.286に相当する大きな磁界

図6 超電導単層ソレノイドコイルの中心残留磁界
Fig.6 Residual field at the center of superconducting single layer solenoid

図7 一様分布外部磁界に対する単層ソレノイドコイルの磁束分布
Fig.7 Flux distribution for a single layer solenoid in uniform external field

図8 一様分布外部磁界に対する超電導単層ソレノイドコイルの軸上残留磁界
Fig.8 Axial distribution of residual field for a superconducting single layer solenoid in uniform external field

中心磁界 0.5T
電流 138.38A
インダクタンス 24.81H

コイル番号	巻数	コイル中心座標		コイル厚さ (m)	コイル長さ (m)
		z(m)	r(m)		
#1, #6	1830	0.6213	0.50	0.01	0.1575
#2, #5	725	0.2785	0.5025	0.005	0.1212
#3, #4	520	0.0831	0.5025	0.005	0.0853

図9 高均一磁界発生マグネットの磁気遮蔽率解析モデル
Fig.9 Analytical model for calculation of shielding factor of a high homogeneity magnet

図10 一様分布外部磁界に対する高均一磁界発生用マグネットの磁束分布
Fig.10 Flux distribution for a high homogeneity magnet in uniform external field

図11 一様分布外部磁界に対する高均一磁界マグネットの軸上残留磁界
Fig.11 Axial distribution of residual field for a high homogeneity magnet in uniform external field

が残留する。これは、外部磁界による誘起電流が、印加磁界を相殺するには不足するためである。本例では、0.5Tの磁界を発生するに要する電流が138.38Aであるのに対し、0.5Tの軸方向一様磁界が印加された場合の鎖交磁束は $2.45 \times 10^3 \text{ Wb}$ 、誘起電流は98.9Aであり、0.5Tの外部磁界を相殺しうる電流には達しない。高均一磁界マグネットでは、誘起電流によって、広い空間にわたって一様な逆磁界を発生するが、逆磁界が印加磁界を相殺するには不足し、高い遮蔽効果が得られないことがわかる。

3. 巻線型超電導シールドの基本式

前章の考察により、通常の超電導巻線では、高い遮蔽率が得られず、また、シート状超電導体を用いた超電導円筒でも、軸方向外部磁界に対する遮蔽率は、円筒の長さ依存し、高い遮蔽率を得るためには、長尺の円筒が必要であることが明らかとなった。そこで、巻線型超電導シールドによる高遮蔽率の可能性と条件を検討する。

<3.1> 外部磁界の条件 磁気遮蔽の対象となる環境磁界は、一般に三軸方向の成分を有し、その各軸成分も空間座標の関数となるが、本稿では、検討の第一段階として、一軸(z軸)方向の成分のみを有し、且つ、その空間分布がz座標のみに依存する外部磁界を対象とする。三軸方向の遮蔽は、原理的には、本稿の一軸遮蔽を組み合わせることによって可能である。また、外部磁界が一軸成分の場合でも、その空間分布が、軸方向座標のみでなく、径方向、周方向座標に依存する場合は、本稿とは異なる構成の磁気シールドが必要となる。なお、磁気共鳴イメージング装置などのように、外部磁界に比べて高い一軸方向磁界を発生している装置では、軸と直角方向の外部磁界成分が、磁界の絶対値に与える影響は小さいので、通常、一軸方向のみの遮蔽が要求される。

<3.2> 巻線型超電導シールドの構成と動作 超電導シールドは、図12の如く、超電導線を巻回した複数の同軸円筒状ソレノイドコイルで構成され、コイルはすべて直列

図12 巻線型磁気シールドの構成

FIG.12 Schematic diagram of magnetic shielding with superconducting windings

接続されているものとする。さらに、コイル両端の端子間には永久電流スイッチを接続して、コイル系を短絡または開放できる構成とする。

永久電流スイッチを開路した状態で、コイル系を超電導状態とし、コイル系を零磁界空間に保持した状態で、永久電流スイッチを閉路するものとする。コイル系は零抵抗閉回路を構成するので、鎖交磁束が保存される。従って、外部から磁界が印加されると、コイル系には鎖交磁束の変化を妨げるよう電流が誘起される。外部磁界によるコイル系の中心部の磁界変動は、コイル系の誘起電流によって発生する磁界と印加磁界との合成値で与えられる。この合成磁界がマグネット中心部で無視できる値となるようコイル系の定数を定めることが出来れば、外部磁気遮蔽用のコイル系を実現することが出来る。

<3.3> 巻線型超電導シールドの基本方程式 外部磁界

はz軸方向成分のみを有し、その空間分布はz座標のみの関数で、zの多項式で表されるものとする。また、5章の解析例に示す如く、磁気遮蔽に必要なアンペアターンは比較的少なく、コイル厚さは直径に比し無視できる形状となるので、以下、コイルの厚みは無視できるものとする。このとき、外部磁界は、円筒座標系を用いて、次の様に表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_e(r, z) &= B_{ez}(r, z) \cdot \mathbf{e}_z = B_{ez}(z) \cdot \mathbf{e}_z \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} B_k \left(\frac{z}{d} \right)^k \right\} \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (13)$$

ここに、 $B_k (k=0, 1, \dots)$ は、zのk次成分の $z=d$ における値である。

コイルiの諸元を図2のごとく仮定すれば、コイルiと印加磁界 $\mathbf{B}_e$ との鎖交磁束 λ_i は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \int_{a_i}^{a_i} \int_{z_i - w_i/2}^{z_i + w_i/2} m_i dr dz 2\pi r B_{ez}(z) \\ &= m_i \phi_i \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 m_i はコイルiの巻数密度とし、

$$\phi_i = \sum_{k=0}^{\infty} \pi a_i^2 B_k \int_{z_i - w_i/2}^{z_i + w_i/2} \left(\frac{z}{d} \right)^k dz \quad (15)$$

とする。

また、コイル系の合成インダクタンスLは、次式で与えられる。

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{i,j} m_i m_j \quad (16)$$

ただし、 $K_{i,j}$ は、コイルの形状と配置のみで定まる定数である。

(12)~(16)式より、誘起電流の条件として、次式を得る。

$$\Delta I \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{i,j} m_i m_j + \sum_{i=1}^n m_i \phi_i = 0 \quad (17)$$

次に、誘起電流 ΔI により発生する磁界を求める。各コイルの通電電流は全て等しく ΔI であるから、各コイルの電流密度は $m_i \Delta I$ で与えられる。円筒状コイルが発生する磁界が(4)~(8)式で与えられることを考慮すれば、コイル系の

発生する磁界 $\mathbf{B}_c(r, z)$ は、各コイルの磁界出力の和として次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_c(r, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 m_i \Delta l}{2} \varepsilon_{ik}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k \right\} P_k(\cos \theta) \cdot \mathbf{e}_z \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 m_i \Delta l}{2} \varepsilon_{ik}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k \right\} \frac{P'_k(\cos \theta)}{k+1} \cdot \mathbf{e}_r \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\rho) \cdot P_k(\cos \theta) \cdot \mathbf{e}_z + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\rho) \cdot \frac{P'_k(\cos \theta)}{k+1} \cdot \mathbf{e}_r\end{aligned}\quad (18)$$

ただし

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (19)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{r}{z} \quad (20)$$

$$b_k(\rho) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_0 m_i \Delta l}{2} \cdot \varepsilon_k(a_i, z_i, w_i) \cdot \left(\frac{\rho}{a_i} \right)^k \quad (21)$$

(13)式で与えられる外部磁界 $\mathbf{B}_e(r, z)$ が印加された場合の残留磁界 $\mathbf{B}_{res}(r, z)$ は、外部磁界とコイル磁界の和として次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{res}(r, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ B_k \left(\frac{z}{d} \right)^k + b_k(\rho) \cdot P_k(\cos \theta) \right\} \cdot \mathbf{e}_z \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\rho) \cdot \frac{P'_k(\cos \theta)}{k+1} \cdot \mathbf{e}_r\end{aligned}\quad (22)$$

<3.4>偶数次磁界の遮蔽条件 (22)式をもとに、外部磁界が z の偶数次多項式で表される場合の、遮蔽コイルの条件を検討する。遮蔽コイルは、 $z=0$ 面に対称に配置された n 対のコイル群で構成するものとする。中心点近傍で残留磁界が零となるためには(22)式で与えられる残留磁界の展開式の各次係数が零となればよい。コイル対数を n とし0次から $2(n-2)$ 次までの係数を零とするものとする。 $z=d$ における $2(n-2)$ 次までの磁界係数の消去条件から

$$\sum_{i=1}^n \mu_0 m_i \Delta l \cdot \varepsilon_0(a_i, z_i, w_i) + B_0 = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_0 m_i \Delta l \cdot \varepsilon_2(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{d}{a_i} \right)^2 + B_2 = 0 \quad (24)$$

⋮

$$\sum_{i=1}^n \mu_0 m_i \Delta l \cdot \varepsilon_{2n-4}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{d}{a_i} \right)^{2n-4} + B_{2n-4} = 0 \quad (25)$$

また、誘起電流の条件から

$$\Delta l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{i,j} m_i m_j + \sum_{i=1}^n m_i \phi_i = 0 \quad (26)$$

(23)~(26)式を満たすよう、コイル系の定数を定めればよい。

<3.5>奇数次磁界の遮蔽条件 z の奇数次多項式で表される外部磁界に対する遮蔽コイルを、 $z=0$ 面に対称に配置され、逆極性の n 対のコイル群で構成するものとする。この時 $z=d$ における磁界の消去条件および誘起電流の条件から以下の条件式がえられる。

$$\sum_{i=1}^n \mu_0 m_i \Delta l \cdot \varepsilon_1(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{d}{a_i} \right)^1 + B_1 = 0 \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_0 m_i \Delta l \cdot \varepsilon_3(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{d}{a_i} \right)^3 + B_3 = 0 \quad (28)$$

⋮

$$\sum_{i=1}^n \mu_0 m_i \Delta l \cdot \varepsilon_{2n-3}(a_i, z_i, w_i) \left(\frac{d}{a_i} \right)^{2n-3} + B_{2n-3} = 0 \quad (29)$$

$$\Delta l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{i,j} m_i m_j + \sum_{i=1}^n m_i \phi_i = 0 \quad (30)$$

(27)~(30)式を満たすよう、コイル系の定数を定めればよい。

4. 基本方程式の求解法

(23)~(26)および(27)~(30)式は、コイルの形状変数 a_i, z_i, w_i および巻線密度 m_i ($i=1 \cdots n$)に関する多元非線形連立方程式である。(23)~(25)式および(27)~(29)式は、多分割コイルの誤差磁界消去の条件式であり、磁気共鳴イメージング装置用などの高均一磁界発生用コイルの求解に用いられるものと同じである。しかし、巻線型磁気シールドの巻線電流は、外部磁界との鎖交磁束によって定まる誘導電流であって、誘導電流に関する条件式(26)又は(30)式が付加されるので任意に選定できない。従って、巻線電流を与える鎖交磁束条件式(26)または(30)式と、誤差磁界消去条件式(23)~(25)式または(27)~(29)式を連立させる必要のある点がある。高均一磁界発生用コイルの求解と著しく相違する点である。特に、高均一磁界発生用コイルの求解では、コイル形状変数 a_i, z_i, w_i を固定し、コイル電流密度 $m_i \Delta l$ のみを未知変数とすれば、基本方程式は線形代数方程式となるのに対し、巻線型磁気シールドでは、誘導電流に関する条件式が付加されるため、コイル電流密度のみを未知変数とする場合でも非線形方程式となる。このため、解の存在領域は、誤差磁界の消去条件のみの場合に比べて更に狭まり、ニュートンラフソン法などの反復解法による求解は容易でない。

しかし、(23)~(26)式は m_i ($i=1 \cdots n$)に関する $n-1$ 個の一次式と1個の二次式で構成されているので、この点に着目すれば、巻線密度を未知変数とする陽的な求解が可能である。この方法によれば、任意のコイル形状変数 a_i, z_i, w_i に対して、遮蔽条件を満たす巻線密度の求解が、反復計算を行うことなく可能となり、また、実数解の有無について判別式が得られるので、解の探索を効率的に実施できる。以下、この手法による基本方程式の求解法を述べる。なお基本式は偶数次外部磁界と奇数次外部磁界の何れに対しても同一形式であるので、偶数次外部磁界に対する基本式(23)~(26)式について説明する。

(23)~(26)式において

$$X_i = m_i \Delta l \quad (31)$$

とおき X_i を未知数とすれば(23)~(25)式は X_i ($i=1 \cdots n$)に関する一次式であり、次の様に表すことができる。

$$\begin{bmatrix} h_{0,1} & h_{0,2} & \cdots & h_{0,n-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & & h_{2,n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{2n-4,1} & h_{2n-4,2} & \cdots & h_{2n-4,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{0,n} \\ h_{2,n} \\ \vdots \\ h_{2n-4,n} \end{bmatrix} X_n = \begin{bmatrix} -B_0 \\ -B_2 \\ \vdots \\ -B_{2n-4} \end{bmatrix} \quad (32)$$

ただし

$$h_{k,i} = \mu_0 \epsilon_k (a_i, z_i, w_i) \left(\frac{d}{a_i} \right)^k \quad (33)$$

又、誘導電流の条件式(26)式は、 X_i ($i=1 \cdots n$)に関する二次形式で、次の様に表すことができる。

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdots & K_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \cdots & K_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0 \quad (34)$$

(32)式より、 $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ は X_n の一次式で与えられるので、これを(34)式に代入して展開することにより、(34)式は、一変数 X_n に関する次の2次方程式に帰着される(付録2)。

$$AX_n^2 + BX_n + C = 0 \quad (35)$$

(35)式は下記の判別式が非負の時、実根を有する。

$$D = B^2 - 4AC \geq 0 \quad (36)$$

判別式が非負の時、(35)式より X_n を求めれば、これを(32)式に代入することにより $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ が求められる。

以上の通り、コイルの形状と配置を定めると、遮蔽条件を満たす巻数の実数解の有無は、(36)式を用いて直ちに判別することができ、巻数比を(35)及び(32)式で求めることができる。

以上の陽解法によって得られる巻線密度は、一般に整数比の条件を満たさないで、各コイルの巻数が整数となる解を得るためには、改めて整数比条件を満たす解を求める必要がある。このため、上記の解法で得られた巻数密度に近い整数比の巻線密度を既知定数とし、新たに各コイルの中心 z とコイル電流 I を未知変数として求解する。前述の解法により近似解が得られているため、ニュートンラフソン法により容易に収束解が得られる。

なお、本稿では、厚みを見捨てるソレノイドコイルに対する表式を用いたが、矩形断面コイルの場合でも、矩形断面に対する磁界の展開係数を用いることにより、本稿の手法がそのまま適用できる。

5. 解析例

<5.1> 一様分布軸方向磁界遮蔽 z の偶数次多項式で与えられる外部磁界に対する巻線型超電導シールドの一例として、磁界の大きさが位置によらない一様分布の軸方向磁界に対する巻線型超電導シールドを検討する。巻線を、 $z=0$ 面に対称に配置された、4対の同極性コイル対で構成し、各コイルの巻数密度を未知変数とすれば、0次、2次、4次の残留磁界を消去することができる。

コイル諸元の一例を、第1表および図13に示す。各コイルのアンペアターンは、 $1mT$ の外部磁界に対する値を示している。磁気遮蔽の対象とする環境磁界変動を $0.1mT$ とすれば、誘起電流は 0.1 アンペア程度であり、既存の超電導線材を用いて容易に実現できる諸元であることがわかる。

図14は、原点近傍における残留磁界の、印加磁界に対する比 B_{res}/B_e を示す。半径 $0.15m$ の球面上の最大値は $\theta=90^\circ$ で生じ、その値は 0.438×10^{-5} 、すなわち $1/10^5$ 以上の遮蔽率が得られることがわかる。また、第2表は、 $z=0.15m$ における残留磁界の成分を示している。また、図15は磁束分布を示し、コイル径の中心部では、磁束が排除されることを示している。

本例の4対コイルで構成される超電導巻線型磁気シールドの形状比は、 $l/a=132$ に相当する。同一形状比の超電導円筒の磁気遮蔽効果は、図5から 0.0124 であり、超電導

図13 一様磁界遮蔽用4対コイル磁気シールドのコイル配置例

Fig.13 Example of coil configuration of four pairs coil system for shielding uniform external field

第1表 一様磁界遮蔽用4対コイルの諸元例

Table 1 Example of coil parameters of four pairs coil system for uniform field shielding

コイル	半径 a_i (m)	中心 z_i (m)	長さ w_i (m)	巻数	誘起電流 (A/mT)
#1	0.70	0.59319	0.10	99	-0.99886
#2	0.70	0.12000	0.20	309	-0.99886
#3	0.50	0.55866	0.20	381	-0.99886
#4	0.50	0.19819	0.05	53	-0.99866

円筒式シールドに比べて超電導巻線型シールドは、短尺で高い遮蔽効果を実現できることがわかる。

<5.2> zの一次勾配分布軸方向磁界遮蔽 zの奇数次多項式で与えられる外部磁界に対する巻線型超電導シールドの一例として、z座標に比例した一次勾配分布の軸方向磁界に対する超電導巻線型シールドを検討する。巻線は $z=0$ 面に対称に配置された逆極性の4対コイルで構成するものとすれば、1次、3次、5次の残留磁界成分を消去することができる。解析例を図16及び第3表に示す。また第4表は、 $z=0.15m$ における残留磁界の成分を示している。

図17は、原点近傍における残留磁界の、印加磁界に対する比、 B_{res}/B_e を示す。半径 $0.15m$ の球面上の最大値は、 $\theta=0^\circ$ で生じ、その値は 0.843×10^{-5} である。すなわち、 $1/10^5$ 以上の遮蔽率が得られることがわかる。

本例の4対コイルで構成される超電導巻線型磁気シールドの形状比は、 $l/a=1.49$ に相当する。同一形状比の超電導円筒の磁気遮蔽効果は 0.0403 であり、超電導巻線型シールドは、zの一次勾配磁界に対しても、超電導円筒式シールドに比べて短尺で高い遮蔽効果を実現できることがわかる。

<5.3> 複合磁界遮蔽 <5.1>項で得られた一様分布の軸方向磁界遮蔽用コイルは、 $z=0$ 面に対し、空間的に対称、かつ同極性のコイルで構成しているため、zの一次勾配分布の軸方向磁界に対しては、鎖交磁束が相殺して、

図14 一様磁界遮蔽用4対コイル磁気シールドの残留磁界 (B_{res}/B_e)

Fig.14 Residual field (B_{res}/B_e) of four pairs coil system for shielding uniform magnetic field

電流を誘起しない。すなわち、zの一次勾配磁界に対しては、遮蔽効果をもたない。一方、<5.2>項で得られた巻線は、 $z=0$ 面に対して空間的に対称であるが、逆極性のコイルで構成しているため、一様磁界に対しては鎖交磁束が相殺して、電流を誘起せず、遮蔽効果をもたない。しかし、一様磁界遮蔽用コイルとzの一次勾配磁界遮蔽用コイルを同時に装着すれば、一様磁界とzの一次勾配磁界が複合した磁界に対しても、遮蔽効果を得ることができる。zの一次勾配磁界遮蔽用コイルは、 $z=0$ 面に対して逆極性のコイルで構成しているため、一様磁界遮蔽用コイルと同時に適用しても、一様磁界遮蔽コイルとは磁気結合をもたない。従って、一様磁界遮蔽コイルの誘起電流は、zの一次勾配磁界遮蔽コイルの動作に影響せず、互いに独立に動作する。従って、一様磁界にzの一次勾配磁界が重畳し、各々独立に時間変動をする複合磁界に対しても遮蔽効果をもたせることができる。

6. むすび

環境磁気雑音低減のための外部磁界遮蔽装置として超電導巻線型磁気シールドを提案した。外部磁界として、軸方向成分のみを有し、その空間分布が軸方向座標の多項式で表される磁界を対象に、磁気遮蔽の条件と、コイル定数の

図15 一様磁界遮蔽用4対コイル磁気シールドの磁束分布

Fig.15 Flux distribution of four pairs coil system for shielding uniform external field

第2表 一様磁界遮蔽用4対コイルの残留磁界($\Delta B_{res}/\Delta B_e$)

軸上 $z=0.15m$ における残留磁界の印加磁界に対する比

Table 2 Residual field ($\Delta B_{res}/\Delta B_e$) at $z=0.15m$ of four pairs coil system

コイル	2次成分	4次成分	6次成分	8次成分	10次成分	12次成分	合成値
#1	-3.38E+00	1.25E-01	2.29E-03	-1.39E-04	-5.78E-07	1.23E-07	
#2	4.54E+01	-1.78E+00	4.91E-02	-4.72E-04	-5.07E-05	4.53E-06	
#3	-5.71E+01	7.97E-01	1.40E-01	-1.30E-03	-2.89E-04	3.10E-06	
#4	4.28E+00	6.43E-01	-1.20E-01	1.02E-02	-3.84E-04	-2.47E-05	
合計	0.00E+00	0.00E+00	6.17E-06	8.50E-06	5.47E-07	1.86E-08	1.77E-06

図16 勾配磁界遮蔽用4対コイル磁気シールドのコイル配置例

Fig.16 Example of coil configuration of four pairs coil system for shielding first order gradient field

第3表 zの一次勾配磁界遮蔽用4対コイルの諸元例

Table 1 Example of coil parameters of four pairs coil system for gradient field shielding

コイル	半径 a_i (m)	中心 z_i (m)	長さ w_i (m)	巻数	誘起電流 (A/mT)
#1	0.70	0.46457	0.10	59	-10.306
#2	0.70	0.65522	0.10	69	-10.306
#3	0.50	0.21045	0.02	20	-10.306
#4	0.50	0.65269	0.18	204	-10.306

図17 勾配磁界遮蔽用4対コイル磁気シールドの残留磁界(Bres/Be)

Fig.17 Residual field (Bres/Be) of four pairs coil system for shielding gradient magnetic field of first order

第4表 勾配磁界遮蔽用4対コイルの残留磁界($\Delta B_{res}/\Delta B_e$)

軸上 $z=0.15m$ における残留磁界の印加磁界に対する比

Table 4 Residual field ($\Delta B_{res}/\Delta B_e$) at $z=0.15m$ of four pairs coil system

コイル	3次成分	5次成分	7次成分	9次成分	11次成分	合成値
#1	2.56E+00	1.02E-01	-6.36E-03	4.97E-05	6.27E-06	
#2	-5.64E-01	1.05E-01	1.02E-04	-7.96E-05	2.63E-07	
#3	1.62E+01	-8.24E-01	-2.91E-02	9.51E-03	-9.00E-04	
#4	-2.23E+01	5.66E-01	4.50E-02	-1.23E-04	-6.56E-05	
合計	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	9.38E-06	9.47E-07	8.43E-06

決定法を示した。また、本法を用いて、空間分布が座標によらない一様磁界、および軸方向座標に比例する一次勾配磁界に対する遮蔽コイルの解析例を示し、超電導ソレノイドコイルで構成された巻線系で軸方向磁界の遮蔽効果が得られることを示した。また、両端開放超電導円筒シールドとの比較を示し、一様磁界および一次勾配磁界の何れに対しても、超電導円筒シールドに比べて、短尺で高い遮蔽率が得られることを示した。また、一様磁界および一次勾配磁界が重畳した複合磁界を遮蔽するための遮蔽巻線の構成法について述べた。なお、本稿では、空間分布が軸方向座標のみに依存し、一軸方向成分のみを有する磁界の遮蔽について述べたが、微弱磁界計測では、通常、三軸方向の磁気遮蔽が必要である。これについては、鞍型コイル、超電導シートまたは超電導円筒などを併用することによって、一軸方向磁界のみならず、三軸方向磁界を遮蔽する方法を検討中であり、別途報告の予定である。

(平成7年2月27日受付, 同8年7月3日再受付)

文 献

- (1) 星野和文: 「高温超電導体磁気シールド装置とその応用」, 電学論D, 113巻8号, 947-949 (平5)
- (2) 松葉博則: 「超電導磁気シールド」, 低温工学, 30巻, 1号 p3-8 (1995)
- (3) 矢原昭人、入澤大逸、今井久美子、松葉博則: 「酸化物超電導体を用いた微弱磁場用磁気シールド体の特性」, 電気学会マグネティクス研究会, MAG-90-86 (1990)
- (4) Z.X.Feng: "DISTRIBUTION OF SHIELDING CURRENTS IN A CYLINDRICAL SUPERCONDUCTING TUBE", IEEE Trans. on Magnetics, MAG-21, p993-996 (1985)
- (5) G.Gabrielse and J.Tan: "Self-shielding superconducting solenoid systems", Appl.Phys.p5143-5148 (May 1988)
- (6) 松本和健、藤岡耕治、倉岡泰郎: 「SQUID磁束計に基づいたアクティブシールド」, 電気学会静止器研究会, MAG-92-84 (1992)
- (7) D. B. Montgomery and R. J. Weggel: "Solenoid Magnet Design", Robert E. Hrieger publishing company (1980)

付録1 磁界展開係数 ε_n

本文図2に示す半径 a_i 、中心 z_i 、幅 w_i のソレノイドの軸上磁界は次式で与えられる。

$$B_{iz}(z) = \frac{\mu_0 j_i}{2} \cdot \{F(u_i, \beta_{2i}) - F(u_i, \beta_{1i})\} \quad (\text{付1})$$

ただし、 j_i を電流密度とし

$$F(u, \beta) = \frac{\beta - u}{\sqrt{1 + (\beta - u)^2}} \quad (\text{付2})$$

$$u_i = \frac{z}{a_i}, \quad \beta_{2i} = \frac{z_i + w_i/2}{a_i}, \quad \beta_{1i} = \frac{z_i - w_i/2}{a_i} \quad (\text{付3})$$

とする。

原点における $B_{iz}(z)$ のテーラー展開は

$$B_{iz}(z) = \frac{\mu_0 j_i}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{ik} \left(\frac{z}{a_i} \right)^k \quad (\text{付4})$$

ここに

$$\varepsilon_{ik} = \frac{2}{\mu_0 j_i} \cdot \frac{a_i^k}{k!} \cdot \left[\frac{\partial^k B_{iz}(z)}{\partial z^k} \right]_{z=0} \quad (\text{付5})$$

であり、

$$f_k(\beta) = \frac{1}{k!} \cdot \left[\frac{\partial^k F(u, \beta)}{\partial u^k} \right]_{u=0} \quad (\text{付6})$$

とおけば、 ε_{ik} は次式で求められる。

$$\varepsilon_{ik} = f_k(\beta_{2i}) - f_k(\beta_{1i}) \quad (\text{付7})$$

$f_n(\beta)$ の6次までの表式は次の通りである。

$$f_0(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \quad (\text{付8})$$

$$f_1(\beta) = -\frac{1}{(1 + \beta^2)^{3/2}} \quad (\text{付9})$$

$$f_2(\beta) = \frac{-3\beta}{2(1 + \beta^2)^{5/2}} \quad (\text{付10})$$

$$f_3(\beta) = \frac{1 - 4\beta^2}{2(1 + \beta^2)^{7/2}} \quad (\text{付11})$$

$$f_4(\beta) = \frac{5\beta(3 - 4\beta^2)}{8(1 + \beta^2)^{9/2}} \quad (\text{付12})$$

$$f_5(\beta) = \frac{3(-1 + 12\beta^2 - 8\beta^4)}{8(1 + \beta^2)^{11/2}} \quad (\text{付13})$$

$$f_6(\beta) = \frac{7\beta(-5 + 20\beta^2 - 8\beta^4)}{16(1 + \beta^2)^{13/2}} \quad (\text{付14})$$

付録2 基本方程式の求解法

本文(35)式の導出法を示す。

本文(32)式および(34)式において

$$\mathbf{x} = [X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n] \quad (\text{付15})$$

$$\hat{\mathbf{x}} = [X_1, X_2, \dots, X_{n-1}] \quad (\text{付16})$$

$$\mathbf{m} = [-B_0, -B_2, \dots, -B_{2n-4}] \quad (\text{付17})$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{0,1} & h_{0,2} & \cdots & h_{0,n-1} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & & h_{2,n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{2n-4,1} & h_{2n-4,2} & \cdots & h_{2n-4,n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{付18})$$

$$\mathbf{h}_n = [h_{n,0}, h_{n,2}, \dots, h_{n,2n-4}] \quad (\text{付19})$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & k_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{付20})$$

$$\mathbf{s} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_n] \quad (\text{付21})$$

とおくと(32)式および(34)式は

$$\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{h}_n X_n + \mathbf{m} \quad (\text{付22})$$

$${}^t \mathbf{x} \mathbf{K} \mathbf{x} + {}^t \mathbf{s} \mathbf{x} = 0 \quad (\text{付23})$$

(付22)式より $\hat{\mathbf{x}}$ は X_n で表すことができ

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{a}} X_n + \hat{\mathbf{b}} \quad (\text{付24})$$

ただし

$$\hat{\mathbf{a}} = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{h}_n \quad (\text{付25})$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{m} \quad (\text{付26})$$

とする。ここで

$$\mathbf{a} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_{n-1}, 1] \quad (\text{付27})$$

$$\mathbf{b} = [\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_{n-1}, 1] \quad (\text{付28})$$

とおけば、(付15)(付16)および(付24)式より

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} X_n + \mathbf{b} \quad (\text{付29})$$

これを(付23)式に代入すれば

$$[X_n {}^t \mathbf{a} + {}^t \mathbf{b}] [\mathbf{K}] [\mathbf{a} X_n + \mathbf{b}] + {}^t [\mathbf{s}] [\mathbf{a} X_n + \mathbf{b}] = 0 \quad (\text{付30})$$

これを展開することにより、(付23)式は X_n に関する次の2次方程式に帰着される。

$$A X_n^2 + B X_n + C = 0 \quad (\text{付31})$$

ただし

$$A = {}^t [\mathbf{a}] [\mathbf{K}] [\mathbf{a}] \quad (\text{付32})$$

$$B = {}^t [\mathbf{b}] [\mathbf{K}] [\mathbf{a}] + {}^t [\mathbf{a}] [\mathbf{K}] [\mathbf{b}] + {}^t [\mathbf{s}] [\mathbf{a}] \quad (\text{付33})$$

$$C = {}^t [\mathbf{b}] [\mathbf{K}] [\mathbf{b}] + {}^t [\mathbf{s}] [\mathbf{b}] \quad (\text{付34})$$

武智盛明

(正員)昭和14年3月23日生。昭和38年3月東京大学工学部電気工学科卒業。同年4月三菱電機入社。電力用変圧器、磁気共鳴イメージング装置用超電導マグネットの開発設計に従事。