係数図法による 2 慣性共振系制御器の設計

正員 真 鍋 舜 治 (東海大)

Controller Design of Two-Mass Resonant System by Coefficient Diagram Method
Shunji Manabe, Member (Tokai University)

In the controller design of position or velocity control, the flexibility of the mechanical system is always the limiting factor to the higher performance. In this paper, the speed control of a two-mass resonant system, where the speed sensor is located only on the drive motor side, is investigated. Such a system is typically found in steel mill drives. The controller design is made successfully in practical sense using various design techniques, such as classical control, resonance ratio control with disturbance observer, and H_∞ control. However, a unified theoretical approach is needed to understand the real nature of the problem. For this purpose, a new controller design approach, called "Coefficient Diagram Method", is introduced. The result shows that the optimum controller, in normalized form, is the sole function of the ratio of motor inertia to the total inertia. As the ratio increases, the controller type needed varies from PI control to PI control with lag, and finally to PID control with lag where D control is weak positive feedback. The typical controller designed in the past have been compared with this design.

キーワード：2 慣性共振系，係数図法，制振制御，制御系設計，制御理論

1. まえがき

機械系の速度制御・位置制御において制御特性を向上させようとする、必ず機械系の柔軟性による壁に突き当たる。モータによる速度制御の場合も例外ではなく、制御性能を上げようとする、モータ及び負荷の慣性能率とこれらを結ぶ軸によって形成される機械共振系の悪影響を受けるようになる。鉄鋼業での圧延ロールミルの速度制御が典型的な例である。この種の速度制御系では、速度検出器がモータ側にしか付けられないという制約がある。

この問題に対して、今まで各種の試みがなされ、実用的にはほぼ解決されているといつてよい⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。しかしながら、このような多数の解決法が理論的にどのような意味を持つか、この問題の本質は何か、また制御性能をさらに改善しなければならない時、どのような手段が残されているかなどについて、理論的な考察が必要と思われる。

係数図法 (Coefficient Diagram Method, CDM と略称) は多項式環上での代数的設計法の一つで、係数図を用いながら、その形の適切さを尺度として、特性多項式と制御器を「同時に」設計することを特徴とする。どのような設計法を用いても、結果としては閉ループの特性多項式の形で表現することができるから、各種の設計法のもつ意味は、係数図法の表現を用いて、統一的に比較することができる。係数図法は各種の制御系の設計に応用されてきたが⁽⁴⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾、今回これをこの問題の解決に適用した。

係数図法での設計結果を要約すれば、第 1 に、制御器の形としては、分母に時定数をもった 2 自由度形の PID 制御器でよいことが言える。この制御器は変形 (modified) IPD 制御器、あるいは m-IPD 制御器と略称する。第 2 に、モータの慣性能率の全体の慣性能率に対する割合を、モータ慣性比 q と定義すると、最適の制御器パラメタは q のみの関数として定まることである。モータ慣性比 q は、共振周波数 ω_r 反共振周波数 ω_a 共振比 $R = \omega_r / \omega_a$ とすると $R = 1/q^{0.5}$ の関係を持っている。

モータ慣性比 q が 0.1 から 0.3125 の間では 2 自由度形の PI 制御すなわち IP 制御で十分であり、0.3125 から 0.565 までは m-IP 制御で有効に制御でき、0.565 より 0.9 までは m-IPD 制御で制御できる。この時 D 制御は弱い正帰還になっている。モータ慣性比 q が 0.9 以上になると制御対象が可観測性を失ってくるので、どのような制御器を用いても、安定性とロバスト性を両立させる制御は不可能である。また 0.1 以下になると別の問題があり、特別の配慮が必要であるので、今回は検討の範囲外としている。

現在までに提案されている設計法は 2 種類に大別される。第 1 は、m-IPD 制御器の形に等価変換できない制御器である。一般にモータ慣性比 q がそれほど大きくない時は、PI 制御の僅かの改良で目的を達することができるので、色々な形の制御器が可能であるが、モータ慣性比 q が大きくなると、この種の制御器は十分な自由度を持たないので限界がある。第 2 は、m-IPD 制御器に等価変換できるものであ

って、外乱オブザーバを用いた共振比制御⁽⁸⁾⁽¹¹⁾、低次元化された H_∞ 制御が代表的なものである⁽⁹⁾⁽¹²⁾。このような制御器ではパラメータの選択を工夫すれば、係数図法の結果と全く同じ制御器を設計することができる。実際、係数図法で設計された m-IPD 制御は、比較的遅い外乱オブザーバをもった、弱い共振比制御ということができる。あるいはロバスト性を重視するが、安定性も適切に配慮した低次元化された H_∞ 制御ということもできる。

以上のことより、古典制御がこの問題に対して無力であった理由が次第に明らかになってくる。モータ慣性比 q が適切な間は PI 制御で良い制御が行われる。モータ慣性比 q が大きくなり改良が必要になると、古典制御の常識では PID 制御を試みるが、この問題では負帰還の D 制御はかえって特性を悪化させる。実際に必要なのは遅れ要素であって、分母の時定数や正帰還の D 制御が有効なのである。この問題では古典制御の常識が通用しないことが、古典制御が無力であった大きな理由と考えられる。結城⁽¹⁰⁾堀⁽⁸⁾の共振比制御、池田⁽¹²⁾森本⁽⁹⁾の H_∞ 制御がこの常識を破る原動力となったことは、制御技術の発展上での大きな成果として、特筆されなければならないと思われる。

本論では、まず係数図法の中で、本問題に関係する部分のみの簡単な説明を行う。次に制御対象・制御器の数学モデルを作成し、さらにその汎用性を高めるために正規化する。その上で係数図法による設計を行い、制御器の最適パラメータが、モータ慣性比 q の関数として表されることを示す。最後に今までに提案された制御器の内、主要なものについて比較検討を行っている。

2. 係数図法

〈2・1〉 係数図法の概要 係数図法は多項式環上での代数的設計法の一つで、係数図を用いながら、その形の適切さを尺度として、特性多項式と制御器を「同時に」設計することを特徴とする。このとき、Routh-Hurwitz の安定条件を実用面で改善した Lipatov の安定十分条件⁽¹³⁾を理論的基礎とし、また Kessler 標準形⁽¹⁴⁾の改良も併せて行っている。

制御系の設計には、古典制御と現代制御が広く使われているが、このいずれにも属さない設計法として、代数的設計法がある。代数的設計法には伝達関数を用いる方法と、多項式のみを用いる方法がある。とくに多項式のみを用いる代数的設計法は非常に分かりやすく、「直接法」などとも呼ばれている (Kailath⁽¹⁵⁾、Franklin⁽¹⁶⁾、Chen⁽¹⁷⁾)。

係数図は、制御系の閉ループ特性多項式の係数を、片対数グラフの縦軸に、次数を横軸に表示したものである。これは上に凸な一つの折れ線になるが、この凸の度合いが安定度に対応し、折れ線全体の傾きが系の応答速度に対応する。またパラメータの変化に対する折れ線の変化がロバスト性を示す。このように制御系設計での重要な三要素、安定性・応答性・ロバスト性が一つの図で表現されているため、これらのバランスをとりながら設計を進めることが容易になる。

係数図法では特性多項式と制御器を「同時に」設計する方法を採用している。これが可能になったのは、第 1 に特性多項式の係数と閉ループ特性との関係が係数図を通じて明らかにされたこと、第 2 に特性多項式の係数と、制御器・制御対象のパラメータの関係が、代数方程式の形で陽に表現されうることによる。実際の設計にあたっては、最初に基本的な仕様のみ与え、制御器も最も簡単なものと仮定して設計をすすめ、仕様と制御器を同時に改良するという立場をとっている。このようにすることにより、仕様の必要性とそれを実現するために制御器が複雑になることを秤にかけながら、最適の妥協点を見つけることができる。その結果、閉ループの仕様と制御器の制約条件を満足する最も簡単な制御器が実現するのである。一般に安定性・応答性は特性多項式から決まり、ロバスト性は制御器の構造を制約することが多いので、安定性・応答性とロバスト性との間で、トレードオフが必要なとき、「同時」設計は極めて効果的である。

係数図の凸の度合いを示す安定度指標 γ_i 及びこれから導かれる限界値 γ_i^* については後に説明する。Lipatov の安定十分条件は、安定度指標 γ_i が限界値 γ_i^* に比べてある程度以上大きければ、特性多項式は安定であるという極めて簡単な形で表現される。Routh-Hurwitz の安定条件は、必要・十分条件であるので複雑にならざるを得ないが、Lipatov の安定十分条件は、十分条件だけなので、表現は大変簡単になる。しかも実際に適用してみると、必要条件にかなり近く、実用上は安定条件と考えても差し支えない。Kessler 標準系は安定度指標 γ_i をすべて 2 と選択するものであり、安定度指標 γ_i は限界値 γ_i^* の 2 倍になっていて、かなりの余裕がある。係数図法では Lipatov の安定十分条件を考慮し、Kessler 標準系よりは融通性のある安定度指標 γ_i の選択法を提案している。

〈2・2〉 数学的関係 係数図法で用いている各種の数学的関係を列挙すると次のようになる。特性多項式 $P(s)$ が次のように与えられたとする。

$$P(s) = a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad \dots \dots \dots (1)$$

また係数の行ベクトル a_i を次のように定義する。

$$a_i = [a_n \dots a_1 a_0] \quad \dots \dots \dots (2)$$

また安定度指標 γ_i 、等価時定数 τ 、限界値 γ_i^* を次のように定義する。

$$\gamma_i = a_i^2 / (a_{i+1} a_{i-1}), \quad i = 1 \sim n-1 \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\tau = a_1 / a_0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\gamma_i^* = 1 / \gamma_{i+1} + 1 / \gamma_{i-1}, \quad i = 1 \sim n-1, \quad \gamma_n = \gamma_0 = \infty \quad \dots (5)$$

これらのパラメータより、係数ベクトル a_i は次のように求められる。

$$a_i = [(a_0 \tau^n / \Gamma \Gamma_{n-1}) \dots a_0 \tau a_0] \quad \dots \dots \dots (6a)$$

$$\Gamma_{i-1} = \gamma_{i-1} \dots \gamma_2 \gamma_1 \quad \dots \dots \dots (6b)$$

$$\Gamma \Gamma_{i-1} = \Gamma_{i-1} \dots \Gamma_2 \Gamma_1 = \gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \dots \gamma_2^{i-2} \gamma_1^{i-1} \quad \dots \dots (6c)$$

したがって係数 a_i は次のようになる。

$$a_i = a_0 \tau^i / (\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \dots \gamma_2^{i-2} \gamma_1^{i-1}) \quad \dots \dots \dots (7)$$

また高次 (j 次) 安定度指標 γ_{ij} 次のように定義する。

$$\gamma_{ij} = \frac{a_i^2}{a_{i+j} a_{i-j}} = \left[\prod_{k=1}^{j-1} (\gamma_{i+j-k} \gamma_{i-j+k}) \right] \gamma_i' \quad \dots\dots\dots (8)$$

とくに 2 次の安定度指標は重要で、次のように表される。

$$\gamma_{i2} = a_i^2 / (a_{i+2} a_{i-2}) = \gamma_{i+1} \gamma_{i-1}^2 \quad \dots\dots\dots (9)$$

また次のような関係も有用である。

$$a_{i+1} / a_i = \tau / \Gamma_i = \tau / (\gamma_i \dots \gamma_2 \gamma_1) = \tau_i \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$(a_{i-1} a_{j+1}) / (a_i a_j) = \gamma_{i-1} \gamma_{i-2} \dots \gamma_{j+2} \gamma_{j+1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに τ_i は i 次の等価時定数と呼ぶ。したがって前述の等価時定数 τ は 0 次の等価時定数と呼ぶことができる。

〈2・3〉安定条件 係数図法で用いている安定条件は次のようなものである。まず 3 次 4 次系については、Routh-Hurwitz の安定条件を変形することにより、次の安定条件がえられる。

$$\gamma_i > \gamma_i^*, \quad i = 1 \sim n-1 \quad \dots\dots\dots (12)$$

5 次以上の系については、Lipatov が安定・不安定十分条件を次のように求めている⁽¹³⁾。安定十分条件はすべての i につき、以下のいずれかの関係が満足されることである。

$$\gamma_i > 1.12 \gamma_i^*, \quad i = 1 \sim n-1 \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$(\gamma_{i+1} \gamma_i)^{0.5} > 1.47, \quad i = 1 \sim n-2 \quad \dots\dots\dots (14)$$

また不安定十分条件は、ある i につき次の関係が満足されることである。

$$(\gamma_{i+1} \gamma_i)^{0.5} < 1, \quad i = 1 \sim n-2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

式 (14) は文献⁽¹⁸⁾に引用され使用されているが、式 (13) はそこで簡単に触れられているのみである。係数図法では安定十分条件として、式 (13) を用いるが、これは 3 次 4 次の Routh-Hurwitz 安定条件と形が似ていること、また必要条件に近いなどの理由による。

〈2・4〉係数図法標準形 係数図法においては、次のような標準形が推奨されている。

$$\gamma_1 = 2.5, \quad \gamma_{n-1} = \gamma_{n-2} = \dots = \gamma_2 = 2 \quad \dots\dots\dots (16)$$

標準形は次のような望ましい特性をもっている。

- (1) 分子多項式が 0 次の時、系のオーバーシュートは実質的に零である。分子多項式が適切に選ばれて、2 形サーボ系になっているときは、適切なオーバーシュート (ほぼ 40%) が保証されている。
- (2) 同じ等価時定数 τ をもつ系では、最小の整定時間を与える。整定時間はほぼ $2.5 \tau \sim 3 \tau$ となる。
- (3) 同じ等価時定数 τ をもつ系では、過渡応答波形は特性多項式の次数 n にかかわらず、ほぼ同じ形となる。
- (4) 低次の特性根は等減衰特性をもち、負の実数部がほぼ同じである結果、縦一直線上に並ぶ。高次の特性根は負の実軸より 50 deg の扇形のなかにはいり、減衰係数はほぼ 0.64 となる。
- (5) 係数図法標準形は大変覚え易い。

〈2・5〉標準形の変形 実際の設計にあたって、 $\gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = \gamma_3 = 2$ とすることは、強く推奨されるが、 $\gamma_4 \sim \gamma_{n-1}$ については必ずしも 2 にする必要はなく、

$$\gamma_i > 1.5 \gamma_i^* \quad \dots\dots\dots (17)$$

を満足しておれば良いようである。このときには、高次の根も等減衰条件になるので減衰係数は小さくなるが、留数も小さくなるので問題にはならない。多少ロバスト性は落ちるが制御器に要求される帯域幅が小さくなるという利点がある上、設計の自由度が増して制御器が簡単になると言う大きな利点がある。参考のために、正確に等減衰特性を与える安定度指標の組み合わせの一例を示せば次のようになる。

$$3 \text{ 次系} : \gamma_i = [2 \quad 2.7] \quad \dots\dots\dots (18a)$$

$$4 \text{ 次系} : \gamma_i = [2 \quad 2 \quad 2.5] \quad \dots\dots\dots (18b)$$

$$5 \text{ 次系} : \gamma_i = [1.25 \quad 2 \quad 2 \quad 2.5] \quad \dots\dots\dots (18c)$$

$$\gamma_i = [1.25 \quad 2 \quad 1.6 \quad 2.4038] \quad \dots\dots\dots (18d)$$

$$\gamma_i = [1.25 \quad 2 \quad 1.3333 \quad 2.5] \quad \dots\dots\dots (18e)$$

$$6 \text{ 次系} : \gamma_i = [0.99503 \quad 2.0833 \quad 2 \quad 2 \quad 2.5] \quad \dots\dots (18f)$$

一般にはパラメータの変動が大きいときには、それに相当する γ_i を大きくとり、そのパラメータの変動に対するロバスト性を保証しなければならないことが多い。しかし特殊な場合、たとえばモータ慣性比 q の小さい 2 慣性系のような場合には、安定性とロバスト性がトレードオフの関係になっていて、ロバスト性を上げるには、安定性をある程度犠牲にしなければならない場合がある。このようなときは、 γ_i をかえって小さく選ばなければならない。

いずれにせよ、安定度指標を適切に選ぶことは、係数図法の中心的な課題であって、そのために経験を積む必要があることは、他の設計法と同様である。なお安定度指標そのものはあまり厳密に考える必要はなく、 $\pm 5\%$ の誤差はあっても支障はない。

3. 数学モデルの導出と正規化

〈3・1〉制御対象の数学モデル 制御対象は図 1 に示すようなもので、入力 T_M はモータトルク、出力はモータ速度 Ω_M 、負荷速度 Ω_L であるが、速度検出器はモータ側のみに取り付けられている。運動方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} J_M s & 1 & 0 \\ -1 & s/K_s & 1 \\ 0 & -1 & J_L s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_M \\ T_s \\ \Omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_M \\ 0 \\ T_L \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに

Ω_M, Ω_L : モータ、負荷角速度 [rad/sec]

T_s : 軸トルク [N-m]

T_M, T_L : モータ、負荷トルク [N-m]

J_M, J_L : モータ、負荷慣性能率 [kg-m²]

K_s : 軸ばね定数 [N-m/rad]

係数図法では制御対象を右既約分解形で、制御器を左既約分解形で表現している。運動方程式を右既約分解形で表せば次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -B_p(s) \\ 0 & A_p(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_M \\ \Omega_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T_M + \begin{bmatrix} -s/K_s \\ (J_M/K_s)s^2 + 1 \end{bmatrix} T_L \quad (20a)$$

$$B_p(s) = (J_L/K_s)s^2 + 1 \quad \dots\dots\dots (20b)$$

$$A_p(s) = (J_M J_L/K_s)s^3 + (J_M + J_L)s \quad \dots\dots\dots (20c)$$

図1 制御器と制御対象
Fig. 1. Controller and plant

〈3・2〉制御器の数学モデル 制御器には分母に時定数をもつ2自由度形のPID制御器、すなわち変形IPD制御器(m-IPD制御器と略称)を用いるものとする。これを左既約分解形で表せば次のようになる。

$$A_c(s) T_M = B_a(s) \Omega_r - B_c(s) \Omega_M \quad (21a)$$

$$B_a(s) = k_i \quad (21b)$$

$$B_c(s) = k_d s^2 + k_p s + k_i \quad (21c)$$

$$A_c(s) = T_d s^2 + s \quad (21d)$$

ここに

$$\Omega_r: \text{角速度目標値} \quad [\text{rad/sec}]$$

〈3・3〉正規化 この系では、反共振周波数 ω_a 、共振周波数 ω_r 、モータ慣性比 q は次のように与えられる。

$$\omega_a = \sqrt{k_s / J_L} \quad (22a)$$

$$\omega_r = \sqrt{K_s(1/J_M + 1/J_L)} = \omega_a \sqrt{1/q} \quad (22b)$$

$$q = J_M / (J_M + J_L) \quad (22c)$$

ここで次のような正規化を行う。正規化された変数は*印をつけるものとする。

$$s = \omega_a s^* \quad (23a)$$

$$\Omega_M = \omega_a \Omega_M^*, \quad \Omega_L = \omega_a \Omega_L^* \quad (23b)$$

$$T_M = (J_M + J_L) \omega_a^2 T_M^*, \quad T_L = (J_M + J_L) \omega_a^2 T_L^* \quad (23c)$$

この正規化は反共振周波数 ω_a を角速度の単位に、また機械系全体がその反共振周波数で振幅1radで振動するために必要なトルクの振幅を、トルクの単位としている。時間の単位は $1/\omega_a$ となっている。制御対象を正規化すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -B_p^*(s^*) \\ 0 & A_p^*(s^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_M^* \\ \Omega_L^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} T_M^* + \begin{bmatrix} -s^*/(1-q) \\ q s^{*2}/(1-q) + 1 \end{bmatrix} T_L^* \quad (24a)$$

$$B_p^*(s^*) = s^{*2} + 1 \quad (24b)$$

$$A_p^*(s^*) = q s^{*3} + s^* \quad (24c)$$

また制御器を正規化すると次のようになる。

$$A_c^*(s^*) T_M^* = B_a^*(s^*) \Omega_r^* - B_c^*(s^*) \Omega_M^* \quad (25a)$$

$$B_a^*(s^*) = k_0 \quad (25b)$$

$$B_c^*(s^*) = k_2 s^{*2} + k_1 s^* + k_0 \quad (25c)$$

$$A_c^*(s^*) = l_2 s^{*2} + s^* \quad (25d)$$

これより、原系と正規化系の制御器パラメータの関係を求めると次のようになる。

$$l_2 = \omega_a T_d \quad (26a)$$

$$k_2 = k_d / (J_M + J_L) \quad (26b)$$

$$k_1 = k_p / [(J_M + J_L) \omega_a] \quad (26c)$$

図2 原系ブロック線図
Fig. 2. Block diagram for original system

図3 正規化系ブロック線図
Fig. 3. Block diagram for normalized system

$$k_0 = k_i / [(J_M + J_L) \omega_a^2] \quad (26d)$$

なお今後は正規化系の*印は、特別の場合を除き省略するものとする。図2に原系の、また図3に正規化系のブロック線図を示す。

〈3・4〉正規化系の応答 正規化系について、制御対象・制御器をまとめた閉ループシステムマトリックスは、式(24a)式(25a)をまとめて次のように表される。

$$\begin{bmatrix} 1 & -B_p(s) & 0 \\ 0 & A_p(s) & -1 \\ B_c(s) & 0 & A_c(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_M \\ \Omega_L \\ T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_a(s) \end{bmatrix} \Omega_r + \begin{bmatrix} -s/(1-q) \\ q s^2/(1-q) + 1 \\ 0 \end{bmatrix} T_L \quad (27)$$

これを解くことにより、次のような応答の関係式をうる。

$$\Omega_M = P(s)^{-1} [B_p(s) B_a(s) \Omega_r + A_c(s) T_L] \quad (28a)$$

$$\Omega_L = P(s)^{-1} [B_a(s) \Omega_r + \{A_c(s) (q s^2 / (1-q) + 1) + B_c(s) s / (1-q)\} T_L] \quad (28b)$$

$$T_M = P(s)^{-1} [A_p(s) B_a(s) \Omega_r - B_c(s) T_L] \quad (28c)$$

$$P(s) = A_c(s) A_p(s) + B_c(s) B_p(s) \quad (28d)$$

ここで $P(s)$ は閉ループの特性多項式である。

4. 係数図法による設計

本章が本論の主要結果であって、今までの結果を用いて、異なったモータ慣性比 q に対する最適な制御器を、係数図法によって求めている。

〈4・1〉係数図による検討 特性多項式 $P(s)$ は、式(28d)(24)(25)(1)を用いて次のように表すことができる。

$$P(s) = (l_2 s^2 + s) A_p(s) + (k_2 s^2 + k_1 s + k_0) B_p(s) = a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \quad (29a)$$

図4 係数図
Fig. 4. Coefficient diagram

$$A_p(s) = q s^3 + s, \quad B_p(s) = s^2 + 1 \quad (29b)$$

$$a_5 = l_2 q, \quad a_4 = q + k_2, \quad a_3 = l_2 + k_1$$

$$a_2 = 1 + k_2 + k_0, \quad a_1 = k_1, \quad a_0 = k_0 \quad (29c)$$

これを係数図で表現すれば、図4のようになる。係数図では特性多項式の係数 a_i を左側の対数目盛で、安定度指標 γ_i ・等価時定数 τ ・限界値 γ_i^* を右側の対数目盛で示している。なお τ については $i=0$ で1 また $i=1$ で τ となる直線で表現している。望ましい特性多項式では、式(16)(17)(18)のように γ_i はほぼ2程度になるので係数 a_i の線は上に凸な丸い形になる。また τ が小さくて応答の速いほど右端が上がり、逆に遅いほど左端が上がる。

2 慣性共振系の問題はロバスト性から生ずる特別な問題で係数図を自由に作れない仕組みになっている。ここでは係数図は $A_p(s)$ と $B_p(s)$ を基本要素とし、これを左に動かしたり (s をかける)、上下に動かしたり (l_2 または k_1 を変える) して、それらの和として作られることになる。この制約を明確にするためこの係数図では特別に基本要素を個別に表示している。たとえば $k_1 s B_p(s) = k_1 s^2 + k_1$ を k_1 という点線の線分で示している。このような線分は $A_c(s) B_c(s)$ の係数それぞれに対応して5個ある。

したがってこの時の係数図法的设计問題は、基本要素を使いこなして、望ましい係数図を作り上げるというパズルを解くことと等価になる。この観点から次の3点が直感的に理解できる。

(1) モータ慣性比 q を1に近づけると $A_p(s)$ と $B_p(s)$ はお互いの独立性が失われ、望ましい形の係数図が作りにくくなる。これは極・零キャンセルに近くなり、可観測性が失われてくる条件である。

(2) $B_p(s)$ のために、どのような工夫をしても、速い応答(右端上がり)は得られない。そのためには $B_p(s)$ のほかに「1」という基本要素が必要で、これは速度検出器を負荷側にも設置することで実現できる。

(3) モータ慣性比 q が極端に小さくなると(たとえば0.1以下)、係数図の曲率が大きくなりすぎる。これを軽減するには、3/4次系(分子3次、分母4次)の制御器が必要になることが、係数図より推測されるが、この問題は現在

の問題とは異質な問題なので、ここでは取り扱わない。またモータ慣性比 q が0.1~1の間では、2/2次制御器で十分で、それ以上の次数は不要であろうということが推定できる。モータ慣性比 q がさらに適切な範囲にあれば、IP制御(1/1次制御器)として、 k_1 と k_0 の調整だけで望ましい係数図が得られることも容易に推定できる。

以上のことを念頭に留めた上で、2 慣性共振系の制御系的设计問題の難しさの本質について以下に考察する。配慮が必要な場合は、モータ慣性比 q が大きく、1に近くなっていく場合である。このとき問題になるパラメータは $\gamma_3 \gamma_2$ である。式(11)(29)より

$$\begin{aligned} \gamma_3 \gamma_2 &= a_3 a_2 / (a_4 a_1) \\ &= (1 + l_2 / k_1) (1 + k_2 + k_0) / (q + k_2) \quad (30) \end{aligned}$$

係数図が適切な形となり、適切な安定性が保証されるためには、 $\gamma_3 \gamma_2$ が1に比べて大きくなければならない。しかし q が1に近くなると、これが難しくなる。 $\gamma_3 \gamma_2$ を大きくするには、 l_2 を大きくするか、 k_2 を負に大きくするしかない。

制御器の形からみれば、 l_2 を大きくすること、 k_2 を負に大きくすることは、「位相遅れ」を大きくすることである。すなわち2 慣性共振系の制御で、 q が1に近づくとき必要なものは、位相遅れ要素であって、一般の制御のような位相進み要素ではない。このように2 慣性共振系の制御では、制御の常識が通用しないため、設計が難しかったのではないかとと思われる。

「位相遅れ」を実現するのに2つの方法のうち、 l_2 を増やす方が k_2 を負に増やすより好ましいことは論をまたない。 k_2 を負に増やすとロバスト性が劣化するからである。したがって q を増やすとき、最初は $k_2 = 0$ としたm-IP制御を用い、その後 k_2 を負にしたm-IPD制御に切り替えることが望ましい方策と思われる。

〈4・2〉各種パラメータ間の関係 係数図法の特徴は、設計に用いる安定度指標 γ_i と等価時定数 τ が、制御対象のパラメータ q や制御器のパラメータ $l_2 k_2 k_1 k_0$ と代数式の形で結ばれていて、設計過程での透明度が大変良いことである。以下この関係を系統的に求めてみよう。いま k_2 に関して、次のようなD制御の比率 η を導入する。

$$k_2 = -\eta q \quad (31a)$$

このときは、式(29c)より

$$a_4 = (1 - \eta) q \quad (31b)$$

ここで η が1に近づくと、 η の僅かの変化に対して、 a_4 は大きく変化し、ロバスト性が低下する。したがって η は設計にあたって予め指定するロバスト性の仕様と考えられる。一般には $\eta \leq 0.3$ と選ぶのが適切な選択である。

これら関係を式(29c)に用いると、次のような2つの方程式が導出される。

$$a_2 - a_0 - [\eta / (1 - \eta)] a_4 = 1 \quad (32a)$$

$$a_3 - a_1 - a_5 (1 - \eta) / a_4 = 0 \quad (32b)$$

さらに係数 a_i は式(7)により、 $a_0 \tau \gamma_i$ の関数として次のように表される。

$$a_i = a_0 \tau^i / (\gamma_{i-1} \gamma_{i-2} \dots \gamma_2^{-2} \gamma_1^{-1}) \dots\dots\dots (32c)$$

式(32)を解けば、 τ と a_0 が得られ、したがって a_i が求められる。さらに式(29c)(31)によりすべてのパラメータが得られる。結果は次のとおりである。

$$\begin{aligned} L\tau^4 + M\tau^2 + N - 1 &= 0 \\ L &= \eta / [(1-\eta) \gamma_3 \gamma_2^2 \gamma_1^3], \quad M = [1 - \gamma_4 \gamma_3 / (1-\eta)] / \gamma_1 \\ N &= \gamma_4 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 / (1-\eta) \\ k_0 &= 1 / (L\tau^4 + \tau^2 / \gamma_1 - 1), \quad k_1 = k_0 \tau \\ q &= L\tau^4 k_0 / \eta, \quad k_2 = -\eta q, \quad l_2 = \tau / N \quad \dots\dots (33) \end{aligned}$$

これらの式は η と γ_i が与えられれば、他のパラメータが自動的に定まることを示す。

〈4・3〉IP制御 IP制御では $l_2 = 0, k_2 = 0$ であるので、式(33)において $\gamma_4 = \infty, \eta = 0$ として解が得られる。結果を $[\gamma_2 \gamma_1] = [2 \ 2.5]$ のときの数値例と共に示す。

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma_1 \sqrt{\gamma_2} = 2.5 \sqrt{2} = 3.5355 \\ k_0 &= 1 / (\gamma_2 \gamma_1 - 1) = 0.25 \\ k_1 &= k_0 \tau = 0.625 \sqrt{2} = 0.88388 \\ q &= \gamma_1 / [\gamma_3 (\gamma_2 \gamma_1 - 1)] = 0.625 / \gamma_3 \quad \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

IP制御では q は γ_3 の関数となっている。4次系では $\gamma_i = [2 \ 2 \ 2.5]$ のとき、等減衰特性を示すので、 $\gamma_3 \geq 2$ を設計条件とすれば、IP制御の適用範囲は $q \leq 0.3125$ となる。実際には $\gamma_3 \geq 1.25$ ならば特性はあまり劣化しないので、 $q \leq 0.5$ まで適用可能である。しかしながらこの範囲ではIP制御と同じように簡単なm-IP制御が有効なので、IP制御は推奨されない。

〈4・4〉m-IP制御 m-IP制御では、 $k_2 = 0, \eta = 0$ であるので、これを式(33)に代入して、次の結果が得られる。

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{(\gamma_4 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 - 1) \gamma_1 / (\gamma_4 \gamma_3 - 1)} \\ k_0 &= [1 - 1 / (\gamma_4 \gamma_3)] / (\gamma_2 \gamma_1 - 1) \\ k_1 &= k_0 \tau \\ q &= \frac{(\gamma_4 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1 - 1)^2}{\gamma_4 \gamma_3^2 \gamma_2^2 \gamma_1 (\gamma_4 \gamma_3 - 1) (\gamma_2 \gamma_1 - 1)} \\ l_2 &= \tau / (\gamma_4 \gamma_3 \gamma_2 \gamma_1) \quad \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

5次系の等減衰条件を満足するもので、係数図法標準形に近いものから、安定度を少しずつ下げていくと q が少しずつ大きくなる。それらの組は次のようになる。

$$\begin{aligned} \gamma_i &= [1.25 \ 2 \ 2 \ 2.5], & q &= 0.44083 \\ \gamma_i &= [1.25 \ 2 \ 1.7778 \ 2.4107], & q &= 0.50261 \\ \gamma_i &= [1.25 \ 2 \ 1.6 \ 2.4038], & q &= 0.56505 \quad \dots\dots (36) \end{aligned}$$

この領域では係数図法標準形との差は少なく良い特性が得られる。したがってm-IP制御の適用範囲は

$$0.3125 < q \leq 0.56505 \quad \dots\dots\dots (37)$$

となると思われる。

〈4・5〉m-IPD制御 モータ慣性比 q がさらに大きくなると、m-IPD制御を使用せざるをえなくなる。このときは式(33)を直接計算機で計算することになる。最初は η を0から0.3まで増やし、その後は安定度を少しずつ下げていく。このときできるだけ等減衰条件をみたすように工夫し、それが難しくなると、3根のみ等減衰条件とし2つの振動根のみを虚軸に近づけるようにする。このようにし

て設計されたものは次のようなものである。

$$\begin{aligned} \eta &= 0.3 \\ \gamma_i &= [1.25 \ 2 \ 1.6 \ 2.4038], & q &= 0.62057 \\ \gamma_i &= [1.25 \ 2 \ 1.4545 \ 2.4396], & q &= 0.68120 \\ \gamma_i &= [1.25 \ 2 \ 1.3333 \ 2.5], & q &= 0.74013 \\ \gamma_i &= [0.98642 \ 2.2190 \ 1.1347 \ 2.4586], & q &= 0.83095 \\ \gamma_i &= [0.81180 \ 2.4523 \ 0.97227 \ 2.4815], & q &= 0.91908 \\ \gamma_i &= [0.75239 \ 2.5579 \ 0.91153 \ 2.5050], & q &= 0.95685 \quad \dots\dots (38) \end{aligned}$$

モータ慣性比 q が0.9を超すと振動的になって良い特性はえられない。したがってm-IPD制御の適用範囲は

$$0.56505 < q \leq 0.9 \quad \dots\dots\dots (39)$$

と考えてよい。

〈4・6〉I-PD制御 I-PD制御よりは、m-IP制御・m-IPD制御が優れているので、I-PD制御を使うことはないが、参考のため、設計結果を示す。これは式(33)において、 $\gamma_4 = \infty$ として、さらに η を q で置き換えたものである。 $[\gamma_3 \ \gamma_1] = [2 \ 2 \ 2.5]$ としたときの数値も併せて記した。

$$\begin{aligned} \tau &= \gamma_1 \sqrt{\gamma_2} = 0.35355 \\ k_0 &= (1-q) / (\gamma_2 \gamma_1 - 1 - \gamma_1 / \gamma_3) = 0.36364 (1-q) \\ k_1 &= k_0 \tau = 1.2856 (1-q) \\ k_2 &= \frac{\gamma_1 / \gamma_3 - q (\gamma_2 \gamma_1 - 1)}{\gamma_2 \gamma_1 - 1 - \gamma_1 / \gamma_3} = 0.45455 (1-q / 0.3125) \quad \dots (40) \end{aligned}$$

ロバスト性の見地より $\eta = 0.3$ とすると、 $k_2 = -\eta q$ より、 $q = 0.39370 \dots\dots\dots (41)$ となり、適用範囲はm-IP制御よりかなり狭い。

〈4・7〉設計結果のまとめ 以上の結果を総合すれば、制御器はモータ慣性比 q の値をもとにして、次のように選ばれば良いことが分かる。

- (1) $q < 0.1$ については、別個の問題であり、今回の検討の対象外である。高次の制御器が必要になる。
- (2) $0.1 \leq q \leq 0.3125$ ではIP制御を用いる。 $\gamma_2 = 2, \gamma_1 = 2.5$ と選び、 γ_3 は q の増加とともに、6.25より2へと減少させる。制御器パラメータは式(34)に示される。
- (3) $0.3125 < q \leq 0.56505$ では、m-IP制御を用いる。 $\gamma_3 = 2, \gamma_1$ はほぼ2.5の値をとり、 q の増加と共に、 γ_4 は ∞ より1.25へと減少させる。さらに γ_2 を2から1.6まで減少させる。制御器パラメータは式(35)で示される。
- (4) $0.56505 < q \leq 0.9$ では、m-IPD制御を用いる。 q の増大と共に、まず η を0から0.3まで増大させる。その後は γ_4, γ_2 を減少させ、 γ_3 を増加させる。制御器パラメータは式(33)に示される。

(5) $0.9 < q$ については、可観測性が失われてきて、ロバスト性と安定性を両立させることが出来なくなり、どのような設計法を用いても、満足な制御器は作れない。

(6) $0.3125 < q \leq 0.39370$ では、I-PD制御は可能であるが、この領域はm-IP制御が適用できるので、I-PD制御は推奨されない。制御器パラメータは式(40)に示す。

表1に設計結果の詳細を示す。ここで $bc = [k_2 \ k_1 \ k_0]$ 、 $ac = [l_2 \ 1]$ 、 s_i は特性根(閉ループ極)、PMは位相余裕で

図5 安定度指標と等価時定数
Fig. 5. Stability index and equivalent time constant

図6 制御器パラメータ
Fig. 6. Controller parameter

ある。またモータ慣性比 q に対する安定度指標 γ_i と等価時定数 τ を図5に、また制御器パラメータ l_2, k_2, k_1, k_0 を図6に示す。

5. 各種制御器との比較

2 慣性共振系の制御器として提案された各種のものの中から、主要なものを正規化された形で表2に示す。ここで安定性は安定度指標 γ_i と閉ループ極 s_i で、ロバスト性は位相余裕 PM と D 制御の比率 η から判断できる。また制御の難しさはモータ慣性比 q に関係する。

H_∞ 制御器は大内・美多⁽¹⁹⁾によって始められ、池田⁽¹²⁾森本⁽⁹⁾によって、高い完成度に到達している。結果は $q = 0.5$ 程度ならば制御器は m -IP 制御でよいということで、制御器は CDM m -IP 制御器に近いものになっている。

池田の制御器(表2(2))は同じモータ慣性比 q を持つ CDM m -IP 制御器(表1(4))と制御器パラメータも安定度指標や閉ループ極もよく似たものになっている。また森本の制御器(表2(5.1))でも機械系Iのように q が大きくなるときは CDM m -IP 制御器(表1(3))と似たものになっている。

しかし機械系IIのように q が大きくなると設計が難しくなってくる。 H_∞ 制御器ロバスト形(表2(6.1A))は CDM

m -IPD 制御器(表1(7))と似ているが、弱い D 制御をもたない分だけ減衰が小さい。またその他の制御器「 H_∞ 制御器安定形(表2(6.1B))・共振比制御(表2(6.3))・PID 制御(表2(6.4))」はいずれもロバスト性の不足のため実験には成功しなかったと報告されている。このように H_∞ 制御は上手に設計すれば、係数図法と同様な制御器を設計できるが、 q が大きくなると設計がだんだん難しくなるようである。

外乱オブザーバを用いた共振比制御器は結城⁽¹⁰⁾によって提案され、堀が各種の改良を加え⁽⁸⁾⁽²⁰⁾、最終的に「遅い共振比制御器⁽¹¹⁾」に到達した。モータ慣性比 q が大きくなると、森本の機械系IIの例にみるように、正帰還の D 制御が深くなって、ロバスト性を劣化させる。しかし外乱オブザーバの時定数を大きく選ぶと、PID 制御を m -IPD 制御に変えると同時に、その負帰還の D 制御の働きで、正帰還の D 制御を弱くする。このような理由で、「遅い共振比制御器」は CDM m -IPD 制御器に近い形になる。

堀の「遅い共振比制御」で速い共振比制御(表2(4.1))では D 制御は正帰還であるが、遅い共振比制御(表2(4.2))では負帰還になっている。対応する CDM m -IPD 制御器(表2(4.3))では殆ど0に近い正帰還 D 制御となっていて丁度両者中間の位置を占める。そして閉ループ極を比較するとこの時の減衰が何れの制御器の場合よりも大きいことが分かる。このように外乱オブザーバ付き共振比制御でも、 H_∞ 制御の場合と同様に、良い制御器を設計するためには色々な工夫が必要になることが分かる。

表1 係数図法による設計

Table 1. CDM controllers

- (1) IP 制御器 $q = 0.3125$
 $\gamma_i = [2 \ 2 \ 2.5]$, $\tau = 3.5355$
 $bc = [0.88388 \ 0.25]$, $ac = [1 \ 1]$
 $s_i = -0.70711 \pm j 0.97325$, $-0.70711 \pm j 2.2975$
 $PM = 66.4$
- (2) m -IP 制御器 $q = 0.44083$
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 2 \ 2.5]$, $\tau = 4.3780$
 $bc = [0.65670 \ 0.15000]$, $ac = [0.35024 \ 1]$
 $s_i = -0.57104 \pm j 1.7575$, $-0.57104 \pm j 0.41489$, -0.57104
 $PM = 48.1$
- (3) m -IP 制御器 $q = 0.50261$
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 1.7778 \ 2.4107]$, $\tau = 3.9512$
 $bc = [0.72153 \ 0.18261]$, $ac = [0.36878 \ 1]$
 $s_i = -0.54233 \pm j 1.6155$, $-0.54233 \pm j 0.57574$, -0.54233
 $PM = 47.4$
- (4) m -IP 制御器 $q = 0.56505$
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 1.6 \ 2.4038]$, $\tau = 3.7157$
 $bc = [0.78332 \ 0.21082]$, $ac = [0.38644 \ 1]$
 $s_i = -0.51755 \pm j 1.4786$, $-0.51754 \pm j 0.70160$, -0.51757
 $PM = 46.8$
- (5) m -IPD 制御器 $q = 0.62057$
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 1.6 \ 2.4038]$, $\tau = 3.5824$

- bc = [-0.18617 0.67194 0.18757], ac = [0.26080 1]
 $s_i = -0.53680 \pm j 1.5336$, $-0.53679 \pm j 0.72770$, -0.53682
 PM = 33.4, $\eta = 0.3$
- (6) m-IPD制御器 $q = 0.68120$
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 1.4545 \ 2.4396]$, $\tau = 3.4688$
 bc = [-0.20436 0.70186 0.20233], ac = [0.27372 1]
 $s_i = -0.51148 \pm j 1.3759$, $-0.51149 \pm j 0.85034$, -0.51146
 PM = 33.4, $\eta = 0.3$
- (7) m-IPD制御器 $q = 0.74013$
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 1.3333 \ 2.5]$, $\tau = 3.4078$
 bc = [-0.22204 0.72727 0.21341], ac = [0.28626 1]
 $s_i = -0.48907 \pm j 1.0936$, $-0.48907 \pm j 1.0936$, -0.48907
 PM = 33.6, $\eta = 0.3$
- (8) m-IPD制御器 $q = 0.83095$
 $\gamma_i = [0.98462 \ 2.2190 \ 1.1347 \ 2.4586]$, $\tau = 3.1836$
 bc = [-0.24928 0.76545 0.24044], ac = [0.36561 1]
 $s_i = -0.23933 \pm j 1.0703$, $-0.47866 \pm j 1.0703$, -0.47866
 PM = 30.1, $\eta = 0.3$
- (9) m-IPD制御器 $q = 0.91908$
 $\gamma_i = [0.81180 \ 2.4523 \ 0.97227 \ 2.4815]$, $\tau = 3.0487$
 bc = [-0.27572 0.80423 0.26379], ac = [0.44432 1]
 $s_i = -0.092663 \pm j 1.0361$, $-0.46337 \pm j 1.0361$, -0.46337
 PM = 27.8, $\eta = 0.3$
- (10) m-IPD制御器 $q = 0.95685$
 $\gamma_i = [0.75239 \ 2.5579 \ 0.91153 \ 2.5050]$, $\tau = 3.0114$
 bc = [-0.28706 0.81942 0.27211], ac = [0.47968 1]
 $s_i = -0.045609 \pm j 1.0197$, $-0.45603 \pm j 1.0197$, -0.45602
 PM = 27.2, $\eta = 0.3$

表2 各種制御器の比較

Table 2. Comparison of various controllers

- (1) 大内・美多 H_∞ 制御器⁽¹⁹⁾ $q = 0.54545$, $\omega_a = 48.795$
 $\gamma_i = [1.7339 \ 1.7147 \ 2.0332 \ 0.92260 \ 3.5332 \ 3.0272]$
 $\tau = 8.3174$
 bc = [$k_3 \ k_2 \ k_1 \ k_2$] = [0.12637 0.15292 0.43883 0.05276]
 ac = [$l_4 \ l_3 \ l_2 \ l_1$] = [0.026294 0.17898 0.42270 1]
 $s_i = -1.5274 \pm j 2.9751$, -3.0538 , $-0.11866 \pm j 1.3262$
 $-0.23035 \pm j 0.087714$
 PM = 70.5
- (2) 池田 H_∞ 制御器⁽¹²⁾ $q = 0.55556$, $\omega_a = 35.355$
 $\gamma_i = [2.1189 \ 1.5591 \ 1.8986 \ 2.0292]$, $\tau = 3.2141$
 bc = [0.78568 0.24445], ac = [0.22254 1]
 $s_i = -0.52403 \pm j 1.2320$, $-0.56339 \pm j 0.47660$, -1.7850
 PM = 55.1
- (3) 結城の共振比制御器⁽¹⁰⁾ $q = 0.42662$, $\omega_a = 17.8$
 $\gamma_i = [3.84 \ 2.99 \ 1.83 \ 1.70 \ 2.10]$, $\tau = 2.91$
 bc = [0.0354 0.0891 1.0439 0.359]
 ac = [0.00704 0.0989 1]
 $s_i = -0.46099 \pm j 0.93271$, $-0.97181 \pm j 0.33867$, -6.2256 ,
 -16.749
 PM = 62.6

- (4) 堀の遅い共振比制御器⁽¹¹⁾ $q = 0.57892$, $\omega_a = 115.86$
- (4.1) 速い共振比制御
 $\gamma_i = [3.0439 \ 1.2575 \ 2.4922 \ 2.2260]$, $\tau = 3.8676$
 bc = [-0.22868 0.52155 0.13485], ac = [0.11019 1]
 $s_i = -0.49072 \pm j 1.4121$, $-0.40352 \pm j 0.30447$, -3.7018
 PM = 35.9, $\eta = 0.39501$
- (4.2) 遅い共振比制御
 $\gamma_i = [2.5904 \ 1.2557 \ 2.1672 \ 2.3795]$, $\tau = 4.0882$
 bc = [0.11142 0.68624 0.16786], ac = [0.24841 1]
 $s_i = -0.32666 \pm j 1.2596$, $-0.44628 \pm j 0.26530$, -2.5572
 PM = 59.5
- (4.3) 対応するCDM m-IPD制御器
 $\gamma_i = [1.25 \ 2 \ 1.6 \ 2.4038]$, $\tau = 3.6784$
 bc = [-0.053087 0.75353 0.20505], ac = [0.34714 1]
 $s_i = -0.52330 \pm j 1.4951$, $-0.52329 \pm j 0.70940$, -0.52332
 PM = 43.0, $\eta = 0.0917$
- (5) 森本機械系I制御器⁽⁹⁾ $q = 0.5$, $\omega_a = 17.8$
- (5.1) H_∞ 制御器 $K_I(s)$
 $\gamma_i = [1.2556 \ 1.8792 \ 1.9414 \ 2.4264]$, $\tau = 4.2495$
 bc = [0.65962 0.15222], ac = [0.38222 1]
 $s_i = -0.45155 \pm j 1.5937$, $-0.55531 \pm j 0.42766$, -0.60256
 PM = 47.5
- (5.2) PI制御器 $G_{pil}(s)$
 $\gamma_i = [0.75073 \ 3.0755 \ 2.4305]$, $\tau = 4.2624$
 bc = [0.65828 0.15444], ac = [1]
 $s_i = -0.30270 \pm j 1.2667$, $-0.35559 \pm j 0.23591$, -1.7850
 PM = 67.7
- (5.3) 共振比制御 $G_{Rbl}(s)$
 $\gamma_i = [3.1527 \ 1.4842 \ 2.2582 \ 2.3293]$, $\tau = 3.7868$
 bc = [-0.13988 0.62938 0.16577], ac = [0.11110 1]
 $s_i = -0.65804 \pm j 1.3346$, $-0.47358 \pm j 0.30843$, -4.2194
 PM = 46.8, $\eta = 0.27976$
- (5.4) PID制御 $G_{pidl}(s)$
 $\gamma_i = [1.8092 \ 2.0146 \ 1.8834 \ 2.4309]$, $\tau = 3.6734$
 bc = [-0.18056 0.66134 0.18002], ac = [0.14066 1]
 $s_i = -1.2550 \pm j 1.7233$, $-0.68525 \pm j 0.61788$, -0.66155
 PM = 37.5, $\eta = 0.36112$
- (6) 森本機械系II制御器⁽⁹⁾ $q = 0.736906$, $\omega_a = 17.8$
- (6.1A) H_∞ 制御器 ロバスト形 $K_{IIA}(s)$
 $\gamma_i = [1.0573 \ 2.0023 \ 1.3946 \ 1.8875]$, $\tau = 2.7798$
 bc = [0.89850 0.32322], ac = [0.49879 1]
 $s_i = -0.32253 \pm j 1.2447$, $-0.35128 \pm j 0.82813$, -0.65726
 PM = 40.0
- (6.1B) H_∞ 制御器 安定形 $K_{IIB}(s)$
 $\gamma_i = [1.5866 \ 1.8153 \ 1.9387 \ 2.1676]$, $\tau = 3.2915$
 bc = [-0.54442 0.37505 0.11395], ac = [0.071039 1]
 $s_i = -0.74593 \pm j 1.7052$, $-0.57524 \pm j 0.52578$, -1.0346
 PM = 12.9, $\eta = 0.73879$
- (6.2) PI制御器 $G_{piII}(s)$
 $\gamma_i = [0.84786 \ 2.1179 \ 1.9331]$, $\tau = 2.8132$
 bc = [0.90925 0.32321], ac = [1]
 $s_i = -0.12994 \pm j 1.0722$, $-0.48699 \pm j 0.37261$
 PM = 64.7

(6.3) 共振比制御 $G_{RbII}(s)$

$\gamma_i = [3.3204 \ 1.3357 \ 2.3946 \ 2.2497]$, $\tau = 3.6443$
 $bc = [-0.54659 \ 0.33186 \ 0.090076]$, $ac = [0.039824 \ 1]$
 $s_i = -0.57317 \pm j1.4079$, $-0.44182 \pm j0.32085$, -4.4550
 $PM = 14.4$, $\eta = 0.74174$

(6.4) PID制御 $G_{pid}(s)$

$\gamma_i = [0.94701 \ 2.4235 \ 1.7412 \ 2.4993]$, $\tau = 3.6168$
 $bc = [-0.59379 \ 0.34701 \ 0.095944]$, $ac = [0.070329 \ 1]$
 $s_i = -0.58540 \pm j2.1391$, $-0.52997 \pm j0.65441$, -0.53078
 $PM = 8.5$, $\eta = 0.80579$

6. むすび

以上係数図法を用いる2慣性共振系制御器設計のための一般的方法について述べたが主要な結論は次のとおりである。

(1) 2慣性共振系において、モータ慣性比 q が大きくなると、系は非可観測的になり、安定性とロバスト性の両者を同時に満足させることができなくなる。ロバスト性を満足させるためには、安定性のある程度犠牲にする必要があり、係数図法標準形を用いることができず、安定度指標 γ_i の選択には工夫が必要になる。

(2) 安定度指標 γ_i が標準形から極端に離れないように、また特性根ができるだけ等減衰特性をもつようにという観点から設計すると良い結果が得られる。系が正規化してあると、設計結果はモータ慣性比 q のみの関数となる。モータ慣性比 q が小さいときは、IP制御器でよく、大きくなるにつれて、m-IP制御器、m-IPD制御器が必要になってくる。

(3) 過去に提案された各種の制御器を正規化した上で比較検討した結果、これらが大体係数図法の設計に近いものであることが分かった。

今後の課題として、第1に係数図法が数式化し易い性質を利用してアダプティブ制御へ発展させることが挙げられる。第2に係数図法の設計結果を利用して、 H_∞ 制御の重み関数の選択に関する指標を得ることが挙げられる。

本論は多数の研究者による、設計と実験の地道な努力の結果の上に生まれたものであり、これらの方々のご努力に対し、厚く謝意を表する次第である。利用させて頂いたデータの解釈に誤りがあるとも思われるので、各位のご叱正を賜りたいと願っている。また東京大学堀洋一先生はじめ電気学会アドバンスド・ディジタル・モーションコントロール調査専門委員会の委員の方々からは、色々有益なご助言を頂いており、厚く感謝の意を表する次第である。

(平成9年6月30日受付, 同9年9月22日再受付)

文献

- (1) 武田・真鍋:「機械共振系の制御ループにおよぼす影響」, 電気学会雑誌, **79**, 848, 611-618 (1959-5)
- (2) 松井・堀:「モータコントロールの新しい技術」, 電学論D, **113**, 10, 1122-1137 (1993-10)
- (3) Hori, Y.: "Vibration Suppression and Disturbance Rejection

Control on Torsional Systems", Proceedings of IFAC "Motion Control", Munich, Germany, Oct. 9-11, 1995, 41-50

- (4) 真鍋舜治:「古典制御、最適制御、 H_∞ 制御の統一的理解」, 計測と制御, **30**, 10, 941-946 (1991-10)
- (5) 真鍋舜治:「係数図法のメカトロニクスシステム設計への応用」, 計測自動制御学会第20回ロボット工学研究会, RS-93-5, (1993-6-4)
- (6) Manabe, S.: "Coefficient Diagram Method as Applied to the Attitude Control of Controlled-Bias-Momentum Satellite", 13th IFAC symposium on automatic control in aerospace, Sept. 12-16, 1994, Palo Alto, CA., 322-327 (1994-9)
- (7) Manabe, S.: "A Solution of the ACC Benchmark Problem by Coefficient Diagram Method", ISAS 6th Workshop on Astrodynamics and Flight Mechanics, Sagamihara, ISAS, July 15-26, 1996, 108-117 (1996-6)
- (8) 堀洋一:「共振比制御と真鍋多項式による2慣性系の制御」, 電学論D, **114**, 10, 1038-1045 (1994-10)
- (9) 森本・亀山・武田:「2慣性系の速度制御における共振比制御と H_∞ 制御の特性比較」, 電学論D, **116**, 6, 678-684 (1996-6)
- (10) 結城・村上・大西:「共振比制御による2慣性共振系の振動抑制」, 電学論D, **113**, 10, 1162-1169 (1993-10)
- (11) 堀・澤田・全:「遅い共振比制御における外乱オブザーバの最適推定速度について」, 電学論D, **117**, 1, 50-56 (1997-1)
- (12) 池田・矢野・小寺:「 H_∞ 制御に基づく軸ねじり振動抑制制御」, SICE'93, 206 M-4, August 4-6, Kanazawa (1993-8)
- (13) Lipatov, A. V. and N. I. Sokolov: "Some Sufficient Conditions for Stability and Instability of Continuous Linear Stationary Systems", translated from Automatika i Telemekhanika, no. 9, 30-37, 1978; Automat. Remote Contr., no. 39, 1285-1291, 1979
- (14) Kessler, C.: "Ein Beitrag zur Theorie mehrschleifiger Regelungen", Regelungstechnik, **8**, 8, 261-266 (1960-8)
- (15) Kailath, T.: "Linear Systems", pp. 306-310, Prentice-Hall (1980)
- (16) Franklin, G. F., J. D. Powell, and Abbas Emami-Naeini: "Feedback Control of Dynamic Systems", pp. 564-568, Addison-Wesley (1994)
- (17) Chen, C. T.: "Introduction to the Linear Algebraic Method for Control System Design, IEEE Contr. Syst. Mag., **7**, 5, 36-42 (1987-10)
- (18) Bose, N. K., E. I. Jury, and E. Zaheeb: "On robust Hurwitz and Schur polynomials", IEEE Trans. Automat. Contr., **33**, 12, 1166-1168 (1988-12)
- (19) 大内・美多・矢野:「 H_∞ 制御に基づく電動機の制振制御」, 電学論D, **113**, 3, 325-332 (1993-3)
- (20) 堀洋一:「PID制御のみによる2慣性系の制御」, 電学論D, **115**, 1, 86-87 (1995-1)

真鍋 舜治

(正員) 1930年1月16日生まれ。1952年3月東京大学電気工学科卒業。同年三菱電機(株)入社。モータ制御・シミュレータ・人工衛星の制御に従事。新しい制御系設計法「係数図法」の開発・普及に努力している。1990年より東海大学制御工学科教授。工博。