固定子鉄損を含む誘導モータの新数学モデルの提案

正員 新中 新二 (神奈川大学)

Proposition of New Mathematical Models with Stator Core Loss Factor for Induction Motor

Shinji Shinnaka, Member (Kanagawa University)

This paper proposes new mathematical models with stator core(iron)-loss factor for induction motor supposed to generate precise and/or efficient torque via vector control. The proposed models take the structure that stator core-loss resistance is equivalently placed purely in parallel with stator inductance. It is shown that stator core losses consisting of eddy-current and hysteresis losses can be properly represented by the parallel resistance, especially eddy-current loss by a constant one. The models are composed of three basic vector equations in general frame of arbitrary angular frequency such as 4th order differential equation describing motor dynamics, torque equation and energy conversion equation. These basic equations are essential for vector control design taking core-loss into consideration. The proposed models are most compact in sense of number of both of employed parameters and interior states of the motor. Compactness is an important factor for modeling and is useful for designing vector control systems.

キーワード：誘導モータ、数学モデル、鉄損、ベクトル回路、ベクトル制御

1. はじめに

制御対象を適切に制御するための制御系設計は、基本的に、制御対象の数学モデル（数式モデルとも呼ばれる）に立脚してなされる。このため、制御対象の数学モデルの構築は、制御系設計ひいては設計された制御系の性能の根幹に関する重要な意味をもつ。制御のための数学モデルは、実際の制御器実現の要求から、対象の実際の特性を如何に精密に表現し得るかという精密性（近似性）と、特性を如何に簡潔に表現し得るかという簡潔性が、同時に要求される。これらの要求は相反することが少なくなく、実際のモデルは妥当性を基軸にこれらのトレードオフの上に構築されている。

誘導モータに対するベクトル制御系の設計理論やこの性能の数学モデルへの依存性ひいては数学モデルの構築の重要性は、上記一般の場合と同様である。すなわち、簡潔で精密性の高い実用的なモデルが構築できれば、広い動作範囲でより安定した更にはより高い品質の、あるいはより高い効率を伴ったトルク発生が可能なベクトル制御法の開発等を期待することができる。

誘導モータのベクトル制御のための数学モデルに関しては、電磁鋼板コアの磁気損失（以下、鉄損と略記）の影響を無視できるとしたモデルに限っては、高い簡潔性をもつ最少パラメータモデルが導出されるなど、既に種々の検討がなされている^{(1)~(3)}。

これに対し、誘導モータの鉄損の影響を考慮し精密性を更に高めた次世代ベクトル制御のための数学モデルの検討は浅く、鉄損を考慮したベクトル制御法の提案あるいは従来ベクトル制御法の鉄損に起因する問題点の指摘に関連し

て近年幾つかの試案が報告されているに過ぎない^{(20)~(22)}。

上記のベクトル制御用の数学モデルの詳細説明に入る前に、この参考になると思われるので、素材としての電磁鋼板のモデリングと、モータモデルとして定常状態の解析に伝統的に利用されてきたモータ1相等価回路とについて、触れておきたい。

モータコアに使用される電磁鋼板の素材としての鉄損モデル化は、同伴巻線の等価回路上で鉄損に対応した抵抗（以下、鉄損抵抗と略記）として表現するのが適当である⁽⁴⁾。図1は、従来のインダクタンスのみによるモデルに、鉄損抵抗を導入した例を示したものである。(a)は関連インダクタンスに対し直列状態でモデル化し（以下、この種を直列モデルと略記）、一方(b)は並列状態でモデル化している（以下、この種を並列モデルと略記）。なお、(c)はあるインダクタンス L_{cm} 部分には鉄損抵抗は存在せず、特定のインダクタンス M_{cm} 部分にのみ並列に存在すると仮定したもので、(b)の簡略形（以下、この種も並列モデルと略記）と捕らえられる。開道は、最新技術で製造された電磁鋼板の素材としての鉄損（ヒステリシス損、渦電流損）を等価回路上で直列あるいは並列配置の鉄損抵抗を用いて表現した場合には、並列形の方が広い周波数領域において良好な近似を与え得ることを明らかにしている⁽⁴⁾。

誘導モータの定常状態の特性算定等に関連して、従来より、3相モータ内の1相の電気的特性を近似表現した等価回路を用いる方法が多用されている^{(5)~(19)}。この場合、T形等価回路が主として用いられており、特性算定に鉄損を考慮する場合には、相互インダクタンス部分に直列に等

図1 鉄損抵抗を用いたコアの等価回路
Fig. 1 Equivalent circuits for core

価抵抗を配する直列形とこれに並列に配する並列形の何れかを採用している。例えば、JECの円線図計算法、JISのh定数法は前者であり⁽⁵⁾、IEEEのF法及びF-S法は後者である⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾。国内のモータ製造メーカーによる採用状況は、モータに添付された等価回路図から推定するに、必ずしもJECあるいはJISに傾倒するものではなく両者が混在しているようである（例えば、M社は直列形、T社は並列形）。電気機器関連書籍における状況を調査してみると、驚くことにJEC提案に反し、電気学会書籍を始め並列形採用が圧倒的に多く⁽⁷⁾⁻⁽¹⁷⁾、直列形採用は少ないようである⁽¹⁸⁾。

固定子コアに鎖交する磁束は、回転子に鎖交しない漏れ磁束と言えども当然のことながら鉄損を発生する^{(4), (19), (28)}。この合理性に基づき、漏れインダクタンスを含む固定子インダクタンスに全体に対し、等価鉄損抵抗を考慮する考えは、等価回路モデルのレベルにおいては、直列形、並列形とも見受けられる^{(19), (31)}。この種の並列形は古くは π 形等価回路と呼ばれており（例えば、文献(31)）、極最近になって開道によりコア素材の特性⁽⁴⁾に合致した形で再考案されている⁽²⁸⁾。

固定子鉄損を考慮に入れた上で、誘導モータのダイナミクスを微分方程式で表現したベクトル制御用の数学モデルに関しては、水野らの提案が国内では恐らく最初であろう（以下、水野モデルと略記）⁽²⁰⁾。水野モデルは、電源角周波数に同期した直交2軸座標系上で記述された従来の4次の回路方程式に、仮定上の2次等価渦電流回路方程式を新たに付加した6次の回路方程式を、モデル構築の出发点としている。これに所要の簡潔性を得るべく、渦電流ダイナミクスの等価時定数は極めて小さいとの見解を示し、これを0次近似（ノンダイナミクス近似）し、最終的に4次の回路方程式形式の数学モデルを、回転子磁束発生式、トルク発生式と共に提示している。水野モデルは、残念ながら、トルク発生式において、固定子における損失分の渦電流が巻線電流と完全に同等にトルク発生に寄与する形式を検証も考察もなく採用しており、少なくとも著者には、物理現象的妥当性及び回路方程式との数学的整合性に関し疑問を抱かせるものになっている。なお、水野モデルは、水野ら自身によれば、定常的にはT形の直列モデル⁽¹⁸⁾と同様であるとされている⁽²⁰⁾。

固定子鉄損を考慮に入れた上で、誘導モータのダイナ

ミクスを微分方程式で表現したベクトル制御用の並列形の数学モデルとしては、Leviの提案によるモデルがある（以下、Leviモデルと略記）⁽²¹⁾。これは、定常状態でのT形等価回路（漏れインダクタンスの鉄損を無視した並列形）を、瞬時挙動が記述できる微分方程式による回路方程式に発展させたような構造を、すなわち固定子・回転子間の相互インダクタンスに並列に等価鉄損抵抗を配した構造を採用している。Leviモデルは、固定子と回転子との間の電圧、電流、磁束の関係式とトルク発生式を含み、かつこれらを任意の角速度で回転する直交2軸座標系上で記述しており、数学的には比較的完成度の高いモデルとなっている。しかし、状態表現等に冗長性があり、ベクトル制御系の設計に直ちに利用できる形には必ずしもなっていない。また、提示の電流、磁束の関係式が示すように、固定子鉄損と同一の回転子鉄損の存在を想定しており、鉄損の周波数依存性から理解されるように、物理現象的に不合理性を内在するものとなっている。

最近野口らは、漏れインダクタンスの鉄損を含めた上での鉄損の並列的なモデル化の考え方とベクトル制御へ利用を試みている⁽²²⁾。しかし、利用の実行段階では、残念ながら鉄損抵抗は相互インダクタンスのみに並列に配し得るとの仮説に逆戻りしている。なお、野口らによつては誘導モータの瞬時ダイナミクスを記述し得る微分方程式による数学モデルに関し、何らの具体的な提案はなされていない。

本論文は、上記のモデル構築の実状を踏まえ、誘導モータのダイナミクスを微分方程式で表現したベクトル制御用の数学モデルの1つとして、等価鉄損抵抗を固定子側のインダクタンスに正確に並列に配したような新規な数学モデルを提案するものである（注2、5参照）。本提案の背景は、以下のように整理される。

- 1) モータの鉄損は本質的にコアを構成する電磁鋼板に起因する。従って、固定子・回転子間の空隙磁束よりも、コアに鎖交する固定子磁束に着目する方が合理的である^{(19), (22), (28)}。
- 2) 新技術により製造された最近の電磁鋼板に対する開道らの素材レベルでの研究成果、同じくモータ等価回路レベルでの極最近の研究成果を尊重するならば、広帯域での近似と言う観点においては、並列モデルの方が、上位のベクトル制御用数学モデルのレベルにおいても優位性を有する可能性が高いように推測される^{(4), (28)}（この推測は、後に示すように正しい）。
- 3) モータの等価回路モデルのレベルにおいては、普及書籍等から推察するに、並列形が主流のようである⁽⁷⁾⁻⁽¹⁷⁾。
- 4) しかしながら、ベクトル制御用数学モデルのレベルにおいては、直列モデルである水野モデルに対応したような、あるいはベクトル制御系の設計に直ちに使える状態でのしっかりした並列モデルの提示は、未だなされていない。これは、1)～3)項から理解されるよ

うに、また当初説明の数学モデルの有益性からも明白なように、是非とも望まれる。

提案の数学モデルは、1) 鉄損表現能力、2) 完結性と整合性、3) 簡潔性の3点に関し、従来モデルに比較し、以下のような特長を有している。

1) 鉄損表現能力： 電磁鋼板内の鉄損を構成する渦電流損は2乗磁束と2乗周波数の積に比例し、またヒステリシス損は2乗磁束と周波数の積に比例することが知られているが(13)、(14)、(16)、(23)、(24)、提案のモデルによれば、固定子におけるこれら損失を適切に表現できる。鉄損が特に問題化する中高速域では渦電流損が支配的になるが、提案モデルによれば、基本的にこの等価抵抗を定数として表現できる。これは、基本的にこの種の等価抵抗を2乗周波数に依存した形で表現しなければならない直列モデルに比較し、可変速駆動を当然とするベクトル制御系設計において特に高い優位性が期待される。

2) 完結性と整合性： 提案モデルは、モータの数学モデルとして不可欠な、状態量のダイナミクスを記述した微分方程式(回路方程式及び状態方程式の2形式、着目状態量は固定子および回転子磁束の2形式)、トルク発生式、エネルギー伝達式の3基本式を一切欠くことなく具備している。しかも提案モデルは、任意角速度で回転する2軸直交座標系上でこれらを表現しており、磁束オリエンテーションの如何に依存しない一般性を備えている。上記の完結性に加えて、3基本式は、互いに相矛盾することなく、数学的に完全に整合している。提案モデルは、完結性と整合性から理解されるように、先達のモデルにない数学的に高い完成度を達成している。

3) 簡潔性： 提案モデルは、鉄損抵抗を含む5個の最少パラメータで構成されており、パラメータ数において、使用する状態数(2個)において、簡潔性の高い最小の4次モデルとなっている。

(注1) 提案モデルは、開道の素材レベルでのモデルの成果⁽⁴⁾に加え、本論で詳説するように、先に報告した最少パラメータモデル⁽²⁾の成果を利用している。最少パラメータモデルの実機への利用法、効果等の事例に関しては、文献(29)を参照戴きたい。

(注2) 本論文の解析は、固定子鉄損に主眼をおいている。回転子鉄損に関しては、陽には、これら解析は示していない。この訳は、本論文末尾の注5で明らかにする。

(注3) 本論文では、固定子、回転子と一次側、二次側とは各々同義で使用している。次節以降の諸信号の脚符はこれによっている。

2. 固定子回路方程式

以下で扱うベクトル空間は2次元、すなわちすべてのベクトルサイズは 2×1 とする。ベクトル空間におけるベクトルの記述に際しては、まず、ベクトル基底を定めなければならない。ここでの基底は直交基底とし、また任意の瞬

図2 任意角速度 ω で回転する直交ベクトル基底

Fig. 2 Orthonormal vector basis of arbitrary angular velocity ω

時角速度 ω で回転しているものとする。図2は、この様子を示したものであり、d軸を基軸とし、d、q軸上の単位ベクトルを基底とする。なお、図に示すように、基軸のd軸からq軸へ回転方向を正方向とする。

モデルの構築に際し、次の仮定を設ける。

- 1) 電流、磁束に含まれる高調波成分は、無視する。
- 2) 磁気回路における飽和は、無視する。
- 3) 鉄損は、ノンダイナミクス近似できる。
- 4) 固定子電流は、固定子鉄損を担う固定子鉄損電流と磁束及びトルク発生に寄与する固定子負荷電流に等価的分離される。また、鉄損は鉄損抵抗と固定子鉄損電流とによる等価的な損失として表現できる。

仮定1)～3)は、数学モデル構築に際し簡潔性確保のために広く利用されている一般的仮定である^{(1)～(23)、(28)、(29)}。また、4)は、並列モデルのための仮定である^{(6)～(19)、(21)、(22)、(28)}。

上記仮定の下では、固定子のベクトル信号に関し、以下の関係を構築することができる。

$$i_1 = i_R + i_L \quad (1)$$

$$v_1 = R_1 i_1 + R_c i_R \quad (2)$$

$$R_c i_R = [sI + \omega J] \phi_1 \quad (3)$$

ここに、ベクトル信号 $v_1, i_1, i_R, i_L, \phi_1$ はそれぞれ以下を意味している。

- v_1 固定子電圧
- i_1 固定子電流
- i_R 固定子鉄損電流(固定子電流の鉄損側等価流入分)
- i_L 固定子負荷電流(固定子電流の負荷側等価流入分)
- ϕ_1 固定子鎖交磁束(固定子磁束)

また、 R_1, R_c は各々固定子の等価的な巻線抵抗(銅損抵抗)、鉄損抵抗である。 s は微分演算子 d/dt を、 J は次の 2×2 交代行列を示している。

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

任意の瞬時角速度 ω で回転する直交座標上のベクトル信号を、回路上の信号として扱うことのできる仮想ベクトル回路の概念⁽²⁾を導入するならば、(1)～(4)式の関係は、図2のように作図することができる。同図における ω は直交座標系の瞬時角速度である点には注意されたい。同図よ

図3 固定子鉄損を有する交流モータの一般座標系上での仮想ベクトル回路
Fig.3 Virtual vector circuit in general frame for AC motors with stator core-loss

り、(1)～(4)式は、鉄損を表現した等価鉄損抵抗を固定子インダクタンスに完全に並列に配置するものであることが明白であろう。

(1)～(4)式より、モータ固定子の数学モデルを構築する上で重要な関係を、以下のように得ることができる。

$$i_L = i_1 - i_R = i_1 - \frac{1}{R_c} [v_1 - R_1 i_1] \quad (5)$$

$$v_1 = R_1 i_L + \left(\frac{R_1 + R_c}{R_c} \right) [sI + \omega J] \phi_1 \quad (6)$$

上の(5)、(6)式は、交流モータ共通の固定子電圧、固定子電流、負荷電流、固定子磁束の相互関係を表現した基本式を構成している(本論文末尾の注6参照)。

3. 誘導結合と回転子回路方程式

誘導モータを特色づける固定子と回転子の誘導結合、回転子の回路方程式について解析する。この解析を簡明に進めるべく、文献(2)(以下、該文献と略記)で提案された正規化パラメータの導入を図る。この正規化パラメータは従来の5個の電気パラメータ R_1, R_2, L_1, L_2, M を係数(M/L_2)で正規化したものであり、次のように定義されている。

$$M_n = \left(\frac{M}{L_2} \right) M \quad (7)$$

$$L_{1f} = L_1 - M_n \quad (8)$$

$$\sigma = 1 - \frac{M_n}{L_1} \quad (9)$$

$$W_2 = \frac{R_2}{L_2} \quad (10)$$

$$R_{2n} = M_n W_2 = \left(\frac{M}{L_2} \right)^2 R_2 \quad (11)$$

$M_n, L_{1f}, \sigma, W_2, R_{2n}$ は、該文献に従い、正規化相互インダクタンス、総合固定子漏れインダクタンス、漏れ係数、回転子逆時定数、正規化回転子抵抗とそれぞれ呼ぶことにする。

本論文の対象とする誘導モータの数学モデルにおいては、

図4 固定子鉄損を含む誘導モータの一般座標系上での仮想ベクトル回路
Fig.4 Virtual vector circuit in general frame for induction motor with stator core-loss

固定子と回転子との間の誘導結合及び回転子の回路方程式に関し、従来のモデルに比し新規な要素は一切導入しないものとする。従って、これらの解析に限っては、誘導結合回路への流入信号に注意すれば、従来の解析結果を援用することが可能である。すなわち、固定子側からみた負荷回路に流入する電流が、該文献モデルでは固定子電流 i_1 そのものであったものが本論文モデルでは負荷電流 i_L となる点に注意すると、直ちに次の誘導結合式を得ることができる。

$$\phi_1 = L_{1f} i_L + \phi_{2n} \quad (12)$$

$$\phi_{2n} = M_n i_f \quad (13)$$

$$i_f = i_L + i_{2n} \quad (14)$$

ϕ_{2n}, i_{2n}, i_f は、正規化パラメータに関連して導入されたモータ内部の正規化された状態量であり、各々正規化回転子磁束、正規化回転子電流、回転子励磁電流と呼ばれる。これらは、従来定義の回転子磁束 ϕ_2 、回転子電流 i_2 と次の関係がある⁽²⁾。

$$\phi_{2n} = \left(\frac{M}{L_2} \right) \phi_2 \quad (15)$$

$$i_{2n} = \left(\frac{L_2}{M} \right) i_2 \quad (16)$$

回転子回路に関しては一切変更をしていないので、該文献と同一の関係が成立しなければならない。すなわち、

$$\omega_{2n} J \phi_{2n} = R_{2n} i_{2n} + [sI + \omega J] \phi_{2n} \quad (17)$$

ここに、 ω_{2n} は、回転子の電気角速度である。

(12)～(14)、(17)式で記述された負荷回路の方程式を(3)式に用いた上で仮想ベクトル回路を作図し、更に図3に用いると、図4が得られる。同図においては、破線部が負荷回路に対応している。同図より、等価鉄損抵抗 R_c が固定子インダクタンスに正確に並列配置されていることが更に明白であろう。

4. 簡潔な回路方程式

(1)～(6)式は固定子鉄損を有する交流モータ共通の固定子の電圧、電流、鎖交磁束の関係を、また(12)～(14)、(17)

式は誘導モータ固有の回転子の鎖交磁束、電流の関係を不足なく記述している。しかし、これらの表現は多分に冗長である。パラメータ同定、制御などの観点からは、ダイナミックスを簡潔に表現したモデルが有用である。この点を考慮し、最少のパラメータと状態によるモデルの導出を図る。

該文献によれば、鉄損項を有しない上記の簡潔モデルは、2個のモータ内部状態と、 (R_1, W_2) と共にインダクタンス関連のパラメータ $(L_1, L_{1t}, M_n = R_{2n}/W_2, \sigma)$ の内のいずれか2個従って計4パラメータを基本パラメータとして用い、構成されている。固定子鉄損項を有する場合には、これに、鉄損を表現するパラメータ R_c を加え、5個の基本パラメータでモデルを構成することが可能である。

モータ内の2つの内部状態に負荷電流 i_L 、正規化回転子磁束 ϕ_{2n} を採用する場合には、上記諸式より、最少パラメータモデルのための回路方程式を次のように得ることができる。

(i) モデルⅠ形対応の回路方程式

$$v_1 = (R_1 + R_c)i_1 - R_c i_L \quad (18)$$

$$v_1 = R_1 i_L + \left(\frac{R_1 + R_c}{R_c} \right) [sI + \omega J] [L_{1t} i_L + \phi_{2n}] \quad (19)$$

$$R_{2n} i_L = [(s + W_2)I + (\omega - \omega_{2n})J] \phi_{2n} \quad (20)$$

モータ内の2つの内部状態に負荷電流 i_L 、固定子磁束 ϕ_1 を採用する場合には、上記諸式より、最少パラメータモデルのための次の回路方程式を得ることができる。

(ii) モデルⅡ形対応の回路方程式

$$v_1 = (R_1 + R_c)i_1 - R_c i_L \quad (21)$$

$$v_1 = R_1 i_L + \left(\frac{R_1 + R_c}{R_c} \right) [sI + \omega J] \phi_1 \quad (22)$$

$$[(L_{1t}s + L_1 W_2)I + (\omega - \omega_{2n})L_{1t}J] i_L = [(s + W_2)I + (\omega - \omega_{2n})J] \phi_1 \quad (23)$$

上記回路方程式はいずれも、第1、2式が各々固定子の鉄損と負荷に関する関係を、第3式が回転子の関係を、最少パラメータと最少状態で表現している点には注意されたい。方程式が意味する構造は、図4のベクトル回路に比較的近いものとなっている（もはや、厳密には同一ではない）。

(注4) (6)、(19)、(22)式の両辺に左から $R_c/(R_1 + R_c)$ を

乗ずることにより容易に理解されるように、鉄損項を有するこれらの回路方程式の第2、3式は、該文献の鉄損項を有しない回路方程式において、形式的に次の置換を施したものと同一となっている。

$$i_1 \rightarrow i_L$$

$$v_1 \rightarrow \frac{R_c}{R_1 + R_c} v_1$$

$$R_1 \rightarrow \frac{R_1 R_c}{R_1 + R_c}$$

5. 最少パラメータ状態方程式

ベクトル制御系の設計においては、モータモデルのダイナミックスを記述した微分方程式を状態方程式形式で表現した方が都合がよい場合もある。この点を考慮し、前述の回路方程式を状態方程式の形に改めておく。これらは、上記注4に述べた性質に注意すると、該文献の鉄損項のない状態方程式より直ちに得ることができる。すなわち、

(i) モデルⅠ形対応の状態方程式

$$s i_L = - \left[\frac{1}{L_{1t}} \left(\frac{R_1 R_c}{R_1 + R_c} + R_{2n} \right) I + \omega J \right] i_L + \frac{1}{L_{1t}} [W_2 I - \omega_{2n} J] \phi_{2n} + \frac{R_c}{L_{1t} (R_1 + R_c)} v_1 \quad (24)$$

$$s \phi_{2n} = R_{2n} i_L - [W_2 I + (\omega - \omega_{2n}) J] \phi_{2n} \quad (25)$$

$$i_1 = \frac{R_c}{R_1 + R_c} i_L + \frac{1}{R_1 + R_c} v_1 \quad (26)$$

(ii) モデルⅡ形対応の状態方程式

$$s i_L = - \left[\frac{1}{L_{1t}} \left(\frac{R_1 R_c}{R_1 + R_c} + L_1 W_2 \right) I + (\omega - \omega_{2n}) J \right] i_L + \frac{1}{L_{1t}} [W_2 I - \omega_{2n} J] \phi_1 + \frac{R_c}{L_{1t} (R_1 + R_c)} v_1 \quad (27)$$

$$s \phi_1 = - \frac{R_1 R_c}{R_1 + R_c} i_L - \omega J \phi_1 + \frac{R_c}{R_1 + R_c} v_1 \quad (28)$$

$$i_1 = \frac{R_c}{R_1 + R_c} i_L + \frac{1}{R_1 + R_c} v_1 \quad (29)$$

当然のことながら、状態方程式も最少の基本パラメータ5個で表現されている。しかし、状態方程式は、第1、2式、第3式で固定子、回転子の関係を区別して表現するという構造にはなっておらず、これが意味する構造は、元の回路方程式が意味する構造と異なるので注意されたい。

なお、状態方程式表現（広義）では、第1、2式を狭義の状態方程式と呼び、第3式を出力方程式と呼ぶことがある。固定子電圧 v_1 を入力信号として、負荷電流 i_L 、正規化回転子磁束 ϕ_{2n} （あるいは固定子磁束 ϕ_1 ）を内部状態として、さらに固定子電流 i_1 を出力信号として理解するならば、広義の状態方程式の意味するところが明快であろう。

6. 瞬時トルク発生式

サーボモータの基本性能の一つがトルク制御性能にあることより明白なように、このための数学モデルの構成には、基本式の1つとして、瞬時トルク発生の関係式が不可欠である。本節では、提案モデルのトルク発生式を検討する。

トルクは、3節で説明した電磁誘導の相互作用で発生する。3節で既に説明したように誘導結合、回転子回路にお

いては、既報の内容に対し変更を行っていないので、この解析結果の援用が可能である。(12)～(16)式の関係に注意すると、直ちに次の関係が得られる^{(1)、(2)}。

$$\begin{aligned}\tau &= N_p \phi_2^T J i_2 = N_p \phi_{2n}^T J i_{2n} \\ &= N_p [i_L - i_f]^T J \phi_{2n} = N_p i_L^T J \phi_{2n} \\ &= N_p i_L^T J [\phi_1 - L_{1t} i_L] = N_p i_L^T J \phi_1\end{aligned}\quad (30)$$

ここに、 N_p はモータの極対数である。上式の第2、3式が各々モデルⅠ、Ⅱ形に対応した瞬時トルク発生式である。

(30)式が明かに示すように、正規化回転子磁束 ϕ_{2n} 、固定子磁束 ϕ_1 のいずれに着眼してトルク発生のための電流制御を行う場合にも、対象電流は固定子電流 i_1 そのものではなく、固定子負荷電流 i_L である。すなわち、品質の高いトルク発生には、固定子負荷電流 i_L を磁束に着目してこれを励磁分電流 i_{Lm} とトルク分電流 i_{Lt} に分割し、各々を独立制御することになる。

図5は、正規化回転子磁束に着目した場合のこの分割の様子を示したものである。回転子励磁電流が $\|i_f\| = \text{const}$ の場合には、回転子励磁電流と正規化回転子電流は直交し、各々、励磁分電流 i_{Lm} とトルク分電流 i_{Lt} と等しくなる^{(1)、(2)}。

なお、従来より、鉄損の影響を考慮しないベクトル制御においては、ベクトル制御された固定子電流、磁束に対する発生トルクがしばしば不十分となることが観察されているが⁽²⁰⁾、上記の負荷電流 i_L によるトルク発生式は、この現象に対する1つの解答を与えるものとなっている。

7. 瞬時エネルギー伝達式と3基本式の整合性

モータは、電気エネルギーの機械エネルギーの変換機でもあり、入力電気エネルギーが如何に出力機械エネルギーに変換されるか、あるいは損失として消耗されるかを記述した瞬時エネルギー伝達式は、モータ数学モデルの第3基本式として欠くことができない。この基本式は最小損失制御、最大力率制御と言った効率重視のモータ駆動において特に重要性である⁽²⁵⁾。また、構築モデルがモデルとしての有意性を持つには、当然のことながら、これを構成する微分方程式、トルク発生式、エネルギー伝達式の3基本式が、矛盾無く整合ししなければならない。本節では、瞬時エネルギー伝達式の導出と3基本式の整合性を検証する。

固定子回路は、(2)、(3)式を用いて、次のように表現することもできる。

$$v_1 = R_1 i_1 + [sI + \omega J] \phi_1 \quad (31)$$

固定子に印加される瞬時エネルギー（瞬時有効電力）は、(31)式の両辺に左側から固定子電流 i_1^T を乗じ、更に(3)式を用い、次のように評価することができる。

図5 電流ベクトルの関係

Fig. 5 Relationship between current vectors

$$\begin{aligned}i_1^T v_1 &= R_1 \|i_1\|^2 + i_R^T [sI + \omega J] \phi_1 + i_L^T [sI + \omega J] \phi_1 \\ &= R_1 \|i_1\|^2 + R_c \|i_R\|^2 + i_L^T [sI + \omega J] [L_{1t} i_L + \phi_{2n}] \\ &= R_1 \|i_1\|^2 + R_c \|i_R\|^2 + L_{1t} i_L^T [sI] + i_L^T [sI + \omega J] \phi_{2n} \\ &= R_1 \|i_1\|^2 + R_c \|i_R\|^2 + \frac{s}{2L_{1t}} \|L_{1t} i_L\|^2 + i_L^T [sI + \omega J] \phi_{2n}\end{aligned}\quad (32)$$

一方、回転子回路におけるエネルギーは、回転子の回路方程式である(17)式の両辺に左側から正規化回転子電流 i_{2n}^T を乗じ、(30)式のトルク発生式を用いて整理すると、次のように評価される。

$$\begin{aligned}0 &= i_{2n}^T [sI + \omega J] \phi_{2n} + R_{2n} \|i_{2n}\|^2 - \omega_{2n} i_{2n}^T J \phi_{2n} \\ &= i_{2n}^T [sI + \omega J] \phi_{2n} + R_{2n} \|i_{2n}\|^2 + \omega_{2m} \tau\end{aligned}\quad (33)$$

ここに、 ω_{2m} は回転子の機械角速度である。すなわち、

$$\omega_{2m} = \frac{\omega_{2n}}{N_p} \quad (34)$$

(33)式を(32)式に加え合わせ、(13)、(14)式を用いると、次の関係を得ることができる。

$$\begin{aligned}i_1^T v_1 &= R_1 \|i_1\|^2 + R_c \|i_R\|^2 + \frac{s}{2L_{1t}} \|L_{1t} i_L\|^2 + i_L^T [sI + \omega J] \phi_{2n} \\ &\quad + i_{2n}^T [sI + \omega J] \phi_{2n} + R_{2n} \|i_{2n}\|^2 + \omega_{2m} \tau \\ &= R_1 \|i_1\|^2 + R_c \|i_R\|^2 + s \left(\frac{1}{2L_{1t}} \|L_{1t} i_L\|^2 + \frac{1}{2M_n} \|\phi_{2n}\|^2 \right) \\ &\quad + R_{2n} \|i_{2n}\|^2 + \omega_{2m} \tau \\ &= R_1 \|i_1\|^2 + R_c \|i_R\|^2 + s \left(\frac{1}{2L_{1t}} \|L_{1t} i_L\|^2 + \frac{1}{2M_n} \|\phi_1 - L_{1t} i_L\|^2 \right) \\ &\quad + R_{2n} \|i_{2n}\|^2 + \omega_{2m} \tau\end{aligned}\quad (35)$$

(32)式の右辺第1項は固定子銅損を、第2項は固定子鉄損を意味し、これら損失は常時正である（第2項の固定子鉄損としての妥当性は次の8節で詳述）。また、同式の第3項は、固定子総合漏れインダクタンス L_{1t} に蓄積された電磁エネルギー（従って、常時正）の瞬時変化を（従って、蓄積エネルギーの増減に応じて正負）を意味している。また、第4項は、正規化回転子磁束 ϕ_{2n} を通じた回転子側との電磁誘導の関係を意味するもので、より具体的には、正規化相互インダクタンス M_n へ流入・流出（力行・回生に

対応)する瞬時電力を示している。

一方、(33)式の右辺第1項は、正規化回転子磁束 ϕ_{2n} を通じた固定子側との電磁誘導を意味するもので、より具体的には、正規化相互インダクタンス M_n から流出・流入(力行・回生に対応)する瞬時電力を示している。同式の第2項は常時正であり、次式より理解されるように、回転子損失を示している(次節末尾の注5参照)⁽²⁾。

$$R_{2n} \|i_{2n}\|^2 = R_2 \|i_2\|^2 \quad (36)$$

また、第3項は、瞬時機械出力を意味するものであり、力行・回生に応じ正負の値を取り得る。

(35)式は、固定子、回転子のエネルギー関係を一体的に評価したものであり、同式の第3項は正規化相互インダクタンス M_n に蓄積された電磁エネルギー(従って、正)の瞬時変化を陽に示すものとなっている。この(35)式の第2、3式こそが、数学モデルⅠ、Ⅱ形の完結のために目指した各々の瞬時エネルギー伝達式である。なお、ここでは物理的意味の明白化を図るべく、伝達式に固定子鉄損電流 i_R 、正規化回転子電流 i_{2n} なる物理量を利用したが、これらは各モデル指定の状態量で表現可能である⁽²⁾。これに関しては、パラメータも同様であり、ここで用いたパラメータは(7)~(11)式の関係に従い、各モデルの第1式で使用した基本5パラメータで表現可能であることは明白であろう。

上記の詳細な説明より明白なように、(35)式の瞬時エネルギー伝達式は、入力電気エネルギーが内部損失エネルギー、内部蓄積エネルギー、出力機械エネルギーなる明白な物理的意味を持った3エネルギーに閉じた形で、換言するならば意味不明瞭なエネルギー項を一切有しない形で、変換されることを示している。しかも、導出過程より明白なように、このエネルギー伝達式は、ダイナミクスを記述した微分方程式、トルク発生式、換言するならば本質的に第1、第2基本式から得られたものである。これより明白なように、提示モデルにおいては、これを構成する3基本式は相矛盾することなく数学的に完全に整合している。

8. 等価抵抗の鉄損表現能力

提示モデルにおける等価鉄損抵抗が、単なる損失ではなく、固定子鉄損の特性を備えた損失を適切に表現し得るか否かの確認は、モデルの妥当性を検証する上で欠くことはできない。本節では、この観点より等価鉄損抵抗の損失表現能力を検討する。

まず、若干の準備をしておく。固定子磁束のノルムが一定 $\|\phi_1\| = \text{const}$ の場合には(すなわち、固定子の u , v , w の巻線に各々鎖交する3つの回転磁束の二乗和が一定の場合には)、固定子磁束の瞬時角周波数を ω_{1f} とすると、次の関係が成立する。

$$[sI + \omega J]\phi_1 = \omega_{1f} J\phi_1 \quad ; \quad \|\phi_1\| = \text{const} \quad (37)$$

$$\|[sI + \omega J]\phi_1\| = \omega_{1f} \|\phi_1\| \quad ; \quad \|\phi_1\| = \text{const} \quad (38)$$

図6 鉄損抵抗の詳細例

Fig. 6 An example of core loss resistance

また、固定子鉄損抵抗を次式に示すように2種の抵抗でより詳細に表現するものとする。

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{R_{c0}} + \frac{1}{R_{c1} |\omega_{1f}|} \quad (39)$$

図6が示すように、上式は固定子鉄損抵抗 R_c を2種の抵抗の並列配置による構成を、また上式右辺第2項に対応する抵抗は周波数比例特性を有する抵抗を意味している。

さて、損失表現の詳細評価に入る。(32)、(35)式の右辺第2項として示された等価鉄損抵抗による損失は、(3)式を用い次のように評価することもできる。

$$R_c \|i_R\|^2 = \frac{1}{R_c} \|[sI + \omega J]\phi_1\|^2 \quad (40)$$

上式に $\|\phi_1\| = \text{const}$ の条件の下に(38)式を用いると、

$$R_c \|i_R\|^2 = \frac{\omega_{1f}^2}{R_c} \|\phi_1\|^2 \quad (41)$$

更に、(39)式を用いると興味深い次式が得られる。

$$R_c \|i_R\|^2 = \frac{\omega_{1f}^2}{R_{c0}} \|\phi_1\|^2 + \frac{|\omega_{1f}|}{R_{c1}} \|\phi_1\|^2 \quad (42)$$

(42)式の右辺第1項は固定子渦電流損を、第2項は固定子ヒステリシス損を示すものとなっている。すなわち、モータコアを構成する電磁鋼板の鉄損の主要素である渦電流損とヒステリシス損との定常値に関しては、従来より、渦電流損は2乗磁束と2乗周波数の積に比例し、またヒステリシス損は2乗磁束と周波数の積に比例することが知られている^{(13)、(14)、(16)、(23)、(24)}。(42)式は、電磁鋼板のこの鉄損特性を適切に表現するものとなっている。

以上の考察より、(40)式に示した並列配置の抵抗 R_c による損失は、 $\|\phi_1\| \neq \text{const}$ を含む一般的な場合にも固定子鉄損を適切に表現し得ると考えてよいであろう。

鉄損が特に問題化する中高速度域では渦電流損が支配的になるが、提案モデルによれば、基本的にこの等価抵抗を定数として表現できる点には特に注意されたい。これは、基本的にこの種の等価抵抗を2乗周波数に依存した形で表現しなければならない直列モデルに比較し、可変速駆動を当然とするベクトル制御系の設計において、特に高い優位性が期待される。

パラメータの周波数依存性は、可変速あるいは過渡状態では、時変性と理解してよい。一般に、時変系を対象とする制御系設計は、時不変系を対象とする場合に比較しはる

かに難解・複雑化する。このため、モータモデルに限らず、数学モデルは、パラメータが定数で表現できるものが希求されている。提案モデルは、この希求に比較的ではあるが副ったものになっている。

(注5) 正規化回転子抵抗 R_{2n} を(39)式と同様に次式のように周波数特性をもたせて表現するならば、

$$\frac{1}{R_{2n}} = \frac{1}{R_{2n0}} + \frac{1}{R_{2n1}|\omega_s|}$$

これによる損失は、 $\|\phi_{2n}\| = \text{const}$ の状況下では、

(17)式より以下のように評価することができる。

$$\begin{aligned} R_{2n}\|i_{2n}\|^2 &= \frac{1}{R_{2n}} \left\| sI + (\omega - \omega_{2n})J \right\| \phi_{2n} \|^2 \\ &= \frac{\omega_s^2}{R_{2n0}} \|\phi_{2n}\|^2 + \frac{|\omega_s|}{R_{2n1}} \|\phi_{2n}\|^2 \end{aligned}$$

ここに、 ω_s は滑り角周波数である。上式より明白のように、本論文で用いた正規化回転子抵抗は、銅損と滑り角周波数の2乗あるいは絶対値に比例した鉄損(渦電流損、ヒステリシス損)とを同時に表現し得るものとなっている。換言するならば、本論文の数学モデルは、陽に示さなかったが、回転子鉄損をも含めたモデルでもある。このときの R_{2n0} は銅損と渦電流損を一体的に表現した等価抵抗である。

なお、 $\|\phi_{2n}\| = \text{const}$ の状況下では、(17)、(33)式は各々次式に帰着される。

$$R_{2n}i_{2n} = -\omega_s J \phi_{2n}$$

$$R_{2n}\|i_{2n}\|^2 = -\omega_s i_{2n}^T J \phi_{2n} = \frac{\omega_s}{N_p} \tau$$

上の第2式を原理とすることで、回転子の電磁気的な損失の算定が可能である。

(注6) よく知られているように、誘導モータ、同期モータ(円筒形、突極形)、同期リラクタンスモータ、これらのハイブリッドモータなどの交流モータにおいては、基本的に、固定子は同一であり、回転子の方に相違がある。2節及び8節に示した固定子に関する解析は、本論文で対象とした誘導モータに限定されるものでなく、交流モータに共通して有効である。同期モータ等の数学モデルの詳細は、稿を改めて報告する予定である⁽³⁰⁾。

9. おわりに

以上、制御系設計ひいては設計された制御系の性能に根幹的な意味をもつ制御対象の数学モデル構築の重要性の認識の下に、次世代ベクトル制御技術等の開発に資すること期待し、誘導モータの固定子鉄損項を有する新数学モデルを構築し提案した。提案の数学モデルは、鉄損表現において従来に比しより高い合理性を達成している。また、固定子鉄損を考慮に入れたベクトル制御系の構成等に必要

かつ有用な3基本式を不足なくかつ整合性のある形で具備しており、数学的にも先達の提案にない高い完成度を有している。しかも、使用パラメータなどにおいて簡潔である。更には、この構築過程は、該文献の解析方法と成果を活用することにより大変簡明なものとなっている。数学モデルは、精密性(近似性)と簡潔性の工学的トレードオフの産物でしか過ぎない。構築過程の簡明性は、読者による新数学モデルの一層深い理解(特に、工学的トレードオフに起因する限界の理解)に有益と思われる。なお、提示の数学モデル及びその解析結果は、開道らの素材レベル、モータ等価回路レベルのモデル及び解析結果⁽⁴⁾、⁽²⁸⁾に無理なく整合するものであることを、参考までに付言しておく。

著者は、新モデルに基づき新たな成果を出しつつある⁽²⁵⁾、⁽²⁶⁾。固定子鉄損を考慮した新技術の展開には、次のようなものがオープンプロブレムとしてある。

- ・固定子鉄損抵抗を含む5基本パラメータの高精度同定法。
- ・固定子鉄損項を含む5基本パラメータを用いたベクトル制御系の設計法。
- ・固定子鉄損を考慮した各種磁束オブザーバの再構築。
- ・固定子鉄損を考慮した速度推定法。
- ・固定子鉄損を考慮したセンサレスベクトル制御系の設計法。
- ・その他

本論文で示した解析の手順と結果は、誘導モータと双対の関係にある誘導発電機に対しほとんど修正の要なく適用できることを付言しておく。

本研究の背景・目的は「まえがき」に述べた通りであるが、開道らの極最近のモータ等価回路レベルのモデル⁽²⁸⁾がそうであるように、その遂行において同氏の素材モデルの研究⁽⁴⁾に強いインセンシブを受けたことを記し、謝意を表したい。また、査読者の建設的なご意見により定常特性解析のためのT形等価回路等に関し加筆修正する機会を得たことを記し、謝意を表したい。

(平成9年10月2日受付、平成10年10月5日再受付)

文 献

- (1) 新中・榊原・深沢：「誘導機ベクトル制御のための統一ベクトル解析」、計測自動制御学会論文集、30、7、pp. 760-766 (平6)
- (2) 新中新二：「最少パラメータによる誘導モータの新数学モデルの提案」、電学論D、117、10、pp. 1247-1253 (平9)
- (3) B.K.Bose(editor): 「Power Electronics and Variable Frequency Drives」,IEEE Press (1997)
- (4) 開道力：「鋼板内磁気特性分布を考慮した電磁鋼板コアの等価回路」日本応用磁気学会誌、19、1、pp. 39-44 (平7)
- (5) 電気学会、誘導電動機特性試験法調査専門委員会編：「誘導電動機の新特性算定法の提案、(電学技報Ⅱ部、第435号)」pp. 67-68 (平4)

- (6) A. Kusoko, D. Galler: 「Control Means for Minimization of Losses in AC and DC Motor Drives」, IEEE Trans. Industrial Application, IA-19, 4, pp. 561-570 (1983)
- (7) R.H. Engelmann and W.H. Middelndorf (editors): Handbook of Electric Motors, pp. 275-278, Marcel Dekker, Inc. (1995)
- (8) 大河内重助: 「誘導電動機」 pp. 35-48, オーム社 (昭31)
- (9) 宮入庄太: 「大学講義、最新電気機器学」 pp. 167-174, 丸善 (昭54)
- (10) 難波江、金、高橋、仲村、山田: 「電気学会大学講座、電気機器学」 pp. 58-62, 電気学会、オーム社 (昭60)
- (11) 天野、常広: 「電気機械工学 (改定版)」 pp. 199-202, 電気学会、オーム社 (昭60)
- (12) 飯高、沢間: 「絵とき電気機器」、pp. 42-46, オーム社 (昭61)
- (13) 尾本、多田隈、山下、山本、米山: 「電気学会大学講座、電気機器学 I (改定版)」, pp. 182-194, pp. 66-67, 電気学会、オーム社 (昭62)
- (14) 柴田、三澤: 「エネルギー変換工学」、pp. 171-176, p. 149 森北出版 (平2)
- (15) 西方正司: 「パワーエレクトロニクスと電気機器」、pp. 89-94, オーム社 (平7)
- (16) 笹島、江上: 「電気機器とサーボモータ」、pp. 124-136, p. 99, 産業図書 (平9)
- (17) 服部、久保田、安東: 「電気機器学の講義と演習」、pp. 105-108, 森北出版 (平9)
- (18) 坪島茂彦: 「図解誘導電動機」 pp. 90-91, 東京電気大学出版局 (昭54)
- (19) 電気学会、誘導電動機専門委員会編: 「誘導電動機の特特性算定法、(電学技報 I 部、第 83 号)」 p. 14 (昭42)
- (20) 水野・高山・市岡・寺嶋: 「固定子鉄損を考慮した誘導電動機の非干渉制御法」、電学論 D、109、11、pp. 841-848 (平1)
- (21) E. Levi: 「Impact of Iron Loss on Behavior of Vector Controlled Induction Machines」, IEEE Trans. Industrial Application, 31, 6, pp. 1287-1296 (1995)
- (22) T. Noguchi, P. Nakmahachalasint and N. Watanakul: 「Precise Torque Control of Induction Motor with On-Line Parameter Identification in Consideration of Core Loss」, Proc. of PCC Nagaoka, I, pp. 113-118 (1997)
- (23) 竹内著、磯部他編: 「大学課程電機設計学」 pp. 3-6, オーム社 (昭54)
- (24) 広瀬敬一: 「電気学会大学講座、電機設計概論」、pp. 79-81, 電気学会、オーム社 (昭59)
- (25) 新中新二: 「固定子及び回転子に鉄損を有する誘導モータの最小損失制御方策」、電学論 D、118、3、pp. 421-422 (平10)
- (26) 新中、千田: 「鉄損を有する誘導モータのための新数学モデルに基づくベクトル制御」、平成10年電気学会全国大会講演論文集、4、pp. 316-317 (平10)
- (27) 新中新二: 「同期モータの統一的ベクトル解析」、平成9年電気学会産業応用部門全国大会、II-92, pp. 211-216 (平9)
- (28) 開道、脇坂: 「コア素材の磁気特性を考慮したモータの等価回路の理論的検討」 電学論 D、118、5、pp. 651-666 (平10)
- (29) 新中新二: 「エンコーダレス誘導モータのための新間接法を用いたハイブリッドベクトル制御法の実機による基本性能評価」、平成10年電気学会産業応用部門全国大会、講演論文集 I、pp. 157-160 (平10)
- (30) S. Shinnaka: 「Proposition of New Mathematical Models with Core Loss Factor for Controlling AC Motors」, Proc. of the IECON'98 (24th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society) (1998)
- (31) 例えば、竹内寿太郎: 電気雑誌 OHM、昭和27年4月号、8月号

新中 新二

(正員) 1973 年防衛大学校卒業。77 年 University of California, Irvine 工学部修士課程修了。79 年同博士課程修了。防衛庁技術研究本部第1研究所、防衛大学校電気工学教室等の奉職を終えて、86 年キャノン(株)勤務。91 年ベンチャー研究所創設。96 年神奈川大学電気工学科勤務(教授)。Ph.D. 及び工学博士。これまでの間、通信、情報、制御、パワーエレクトロニクス分野の教育、研究、開発及びこれらの管理に従事。近年はモータ駆動制御技術の体系化に専念。電子情報通信学会、計測自動制御学会、IEEE などの会員。90 年計測自動制御学会論文賞受賞、91 年同学会著述賞受賞。