磁気シーソー原理に基づく磁気ダンパとそのBessel関数による特性解析

正員 村上 力 (荏原総合研究所, 251-8502 藤沢市本藤沢4-2-1)
 非会員 佐藤一樹 (荏原製作所, 251-8502 藤沢市本藤沢4-2-1)

A Magnetic Damper Based on Magnetic See-Saw Principles and Its Analysis Using Bessel Function

Chikara MURAKAMI (Ebara Reserch Co., 2-1, Honfujisawa 4-chome, Fujisawa-shi 251-8502, Japan. cml0026@erc.ebara.co.jp)
 Ichiju SATOH (Ebara Corporation, 2-1, Honfujisawa 4-chome, Fujisawa-shi 251-8502, Japan. satoh08@fuj.ebara.co.jp)

A novel magnetic damper, named the MS-damper, was developed based on a newly discovered energy conversion method, by which mechanical vibratory energy is converted to electromagnetic energy. The structure of the MS-damper is based on a magnetic seesawing effect or the oscillation-induced portioning out of flux from a permanent magnet. This paper discusses damper principles, followed by an outline of analyses on damping forces using Bessel-Kelvin functions. Frequency characteristics of damping coefficients are introduced as well. Test results which show good agreement with analytical results are discussed as well. All in all, the damping coefficients obtained from the test results were ten-times larger than the most favorable coefficients obtained from conventional dampers.

キーワード : 磁気ダンパ, 渦電流ダンパ, 減衰係数, ダンピング, ベッセル関数, 表皮効果

1. まえがき

導体が磁束中で振動すると、導体中の磁束分布が変化し導体中に渦電流が発生する。この結果、導体には振動速度に比例した制動力が働き導体の振動は減衰する。この原理を利用したダンパは磁気ダンパもしくは渦電流ダンパと呼ばれ、①非接触で減衰力を作用させることが出来る、②減衰力が運動速度に比例する、③温度に対する特性変化が少ない、等の特長を持っている。しかし、従来の磁気ダンパはその構造上大きな減衰力を得ることが困難なため、応用分野は限られたものになっているのが現状である。

筆者らは、従来の磁気ダンパの問題点を検討し、その欠点を解決するため後述する磁気シーソー原理に基づく新しい構造の微小振動用磁気ダンパを考案し、実際に試作、試験を行ったところ非常に良好な結果を得ることが出来た。

本論文では、磁気シーソー原理に基づく磁気ダンパの原理、構造を紹介するとともに、実験結果、解析結果について述べる。Bessel関数を用いた解析結果は実験値との比較で良好な一致を得ており、これらの式を用いることにより本ダンパの設計が可能となる。また、これらの式からこのダンパの動作原理についての考察も行った。

2. 磁気シーソー原理に基づく磁気ダンパの基本構成¹⁾

これまでの磁気ダンパの欠点は以下の2点に集約される。

- (1)導体が磁束を切る構造が多く、微小振動に対する磁束の変動が小さいので発生する渦電流も小さい。
- (2)渦電流の大きい部分は磁束密度の高い磁石近傍等限られた部分に集中する。

ここで提案するダンパの構成は図1に示すように、一つの磁石から発生する磁束を、高透磁率材料の磁路をギャップを介して並列に二つに分岐して設けた構造であり、ヨーク自体に導電体を兼用させており銅は使用していない。分岐された磁路である2組のヨークは機械的に結合されており、外部からの振動により左右のギャップ長 g_1, g_2 が差動的に増大/減少するので、磁気抵抗、磁束、吸引力も同様に左右でシーソー状に差動的に変化する。この結果、微小振動であってもそれぞれの磁路に流れる磁束の差が大きくなるとともに、渦電流は磁路全体にほぼ均等に分布するため大きな減衰力を得ることが可能となる。本ダンパはこのいわば磁気シーソーの原理に基づくことから磁気シーソーダンパ (Magnetic Seesaw Damper), 以下、MSダンパと略称する。

図1では機械的に結合された二つのヨークを一体の剛体としこれを可動部、磁極を含む磁石部分を固定部としてあるが、逆でもよい。MSダンパは原理的には不安定系である

図1 新型磁気ダンパ (MSダンパ) の構造
 Fig.1 Novel structure of a magnetic seesaw (MS) damper

り、可動部—固定部間に働く不安定バネ力（不平衡剛性）によりそのままでは可動部は変位して固定部に吸着されてしまう。可動部を中央に保持するためにはこの不安定バネ係数 $K_u(>0)$ に打ち勝つ安定(復元)復元バネ係数 K_m のバネを装着すること、つまり $K_m - K_u \equiv K > 0$ が必要となる。ギャップにバネや粘弾性体を挟んでもよいが、図1では説明用にヨーク外側にバネを設けている。後述の実験では板バネを用いることにより安定な復元バネ系を実現している。

3. 試作MSダンパの減衰特性

磁石側を定盤に固定し、ヨーク側を片持ちバネで支持し可動とした1次元振動の実験装置を試作し、ダンパの有無の場合の打撃応答試験を行った。図2に実験装置の構成を示す。磁石はNdの正方形角柱($10 \times 10 \times 13[\text{mm}^3]$)でギャップ長は $0.3[\text{mm}]$ 、ギャップ保持復元剛性は中央の板バネの剛性を利用した。試験は可動部を打撃し、その振動変位を変位センサで測定した。

図3(a)は磁石を磁性材で短絡してMSダンパの効果を低下させた状態での自由振動の波形と加振力に対する振動変位の応答曲線である。 $150[\text{Hz}]$ に基本モード、 $230[\text{Hz}]$ 付近に2次モードが見られる。前者のdamping ratio: ζ は $\zeta < 0.005$ である。図3(b)は(a)の磁石の短絡を無くし、ダンパを効かせた状態での図である。基本モードが顕著に減衰し、かつ共振周波数が $100[\text{Hz}]$ に低下した。これは磁石の不安定剛性のためである。基本モードの ζ は約 0.4 となった。2次モードの減衰にも改善が見られる。

以上のように、MSダンパは非常に大きな減衰能力を持つことが確認できた。

図2 試作MSダンパの実験装置の構成
Fig.2 Setup for experimental MS-damper test

4. MSダンパの磁気回路¹⁾

4.1> 変位による静的磁束変化 MSダンパの磁気回路は磁石からの全磁束 Φ が図1に示すように、ギャップで2方向に分岐されて Φ_1 , Φ_2 となってヨークを通り再び磁石の反対の磁極へ戻る構造である。固定部と可動部の両者間に相対変位 x がない対称な中央位置にあれば Φ は二等分されてヨークを通過して磁石へ戻る。そのときの片方の磁束を Φ_0 、ギャップの長さを g_0 、断面積を S_g 、磁束密度を B_0 、とすれば

(a) magnet is short-circuited (磁石短絡)

(b) magnet is not short-circuited (磁石非短絡)

図3 試作MSダンパの打撃による振動減衰試験結果

Fig.3 Time history and frequency response of proposed damper by hammering test

図4 振動で発生する交流磁束流 $\Delta\Phi$
Fig.4 Alternating magnetic flux flow $\Delta\Phi$ by vibration

$$\Phi_0 = B_0 \cdot S_g \quad (x=0, g_1 = g_2 = g_0) \quad (1)$$

ただし ξ は微小変位 x を g_0 で正規化した無次元変位で、

$$\xi = \frac{x}{g_0} \ll 1 \quad (2)$$

磁石の磁気抵抗が他の磁気抵抗より遙かに大きいとすれば磁石からの全磁束 Φ は微小変位に無関係に一定となる：

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = 2\Phi_0 = \text{const.} \quad (3)$$

当然ながら無変位時には左右の磁路に流れる Φ_1, Φ_2 は等しく Φ_0 で、これは磁石による直流の磁束である。

変位のある場合の磁束 Φ_1, Φ_2 は：

$$\Phi_1 = \Phi_0 \cdot (1 + \xi) = \Phi_0 + \Delta\Phi \quad (4)$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 \cdot (1 - \xi) = \Phi_0 - \Delta\Phi \quad (5)$$

ただし $\Delta\Phi$ は正規化変位 ξ による Φ_0 からの変化分

$$\Delta\Phi = \Phi_0 \cdot \xi \quad (6)$$

となるが、これは両磁極と両ヨークを周回する磁束で、磁石の中を流れないことが特徴である（図4参照）。

変位 ξ が振動的であれば周回磁束 $\Delta\Phi$ も振動的な往復運動となり、直流磁束 Φ_0 をバイアスとして重量される交流の磁束となる。磁極やヨークが導電体ならば、それらには交流磁束を阻止するように磁束と鎖交する起電力が部分的に集中することなく均等に発生し、渦電流が流れる。

4.2 MSダンパの静的磁界解析 試作実験したMSダンパの磁路は磁石も含めて断面が10[mm]×10[mm]の正方形、磁石は最大エネルギー積278[kJ/m³] (35 [MG·Oe]) のNd系、着磁方向長さ $h=13$ [mm]で、他の磁路は非積層の電磁軟鉄からなる。FEM(有限要素法)により、ギャップの相対変位 x を一定とする静的な磁束密度の分布を調べた。その結果、漏れ磁束は殆どなく、ギャップの磁束密度は近似解法であるパーミアンス法で求めたものと数%程度の差にとどまった。漏れ磁束が殆どないこともMSダンパの特長である。

後述の実験では以下の3種類のギャップで行ったので、それらの場合の無変位ギャップ長 g_0 、磁束密度 B_0 と、後述する不安定剛性 K_u も含めて表1に示す。不安定剛性 K_u は後述する(11)式で示すように B_0^2/g_0 に比例するダンピング

g_0 [mm]	0.3	0.4	0.5
B_0 [T]	0.484	0.472	0.468
K_u [N/mm]	248	177	139

表1 ギャップ磁束密度と不安定剛性

Table 1 Magnetic flux densities and unstable stiffness at gaps

の直接の係数となる重要な値で、狭いギャップほど大きい数値となっており、狭いほど変位変動による磁束の変化 $\Delta\Phi$ が增大していることが分かる。

FEMによる静的な磁束密度の分布によれば、磁束は磁極の磁石に接する付近を除き、磁路に沿ってほぼ平行に流れ、 $\Delta\Phi$ が交流ならば渦電流は全ループにわたってほぼ均等に、 $\Delta\Phi$ の流れに鎖交して流れることが予測できる。

5. 単純モデルによる解析¹⁾

渦電流はヨーク内を、その中心軸を中心に、異なった位相のものが四角張った同心円状に分布すると思われるので厳密解は動的な有限要素法などに頼らざるを得ないが、ここでは磁路外周表面に近い薄い一枚一巻きのシート電流 i 一つだけで近似代表する単純な集中定数系とする。以下これを単純モデルと略称し、これを用いてMSダンパの減衰のメカニズムを検討する。

5.1 単純モデルの運動方程式 シート電流回路の

自己インダクタンス L とシート電流 i が発生する磁束 Φ_i との間に次の関係がある。

$$\Phi_i = L \cdot i \quad (7)$$

また、この Φ_i は $\Delta\Phi$ と同様に磁石側には流れずにギャップ、磁極およびヨークのループ磁路を周回してそれ以外には漏れないものとする。従って左右のギャップ磁束密度 $B_{g\pm}$ ：

$$B_{g\pm} = \pm B_0 + B_0 \cdot \xi + L \cdot i / S_g \quad (\text{複合同順}) \quad (8)$$

に断面積 S_g を乗じた磁束が電流 i と鎖交して流れる。その結果、相対変位 x における可動部に作用する四つのギャップの磁気力 $F_m(x)$ はギャップの透磁率を μ_0 として：

$$F_m(x) = (B_+^2 - B_-^2) S_g / \mu_0 = 4B_0 \{ B_0 S_g \cdot (x/g_0) + L \cdot i \} / \mu_0 \quad (9)$$

振動を直線運動とし、可動部側の質量を M 、その実変位 $x = \xi \cdot g_0$ に対する機械的復元バネ係数を K_m とすれば：

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + K_m \cdot x = F_m(x) + f(t) \\ = K_u \cdot x + 4(B_0 / \mu_0) L \cdot i + f(t) \quad (10)$$

ただし(10)式の右辺の $f(t)$ は外力である。また K_u は

$$K_u = 4B_0^2 S_g / (\mu_0 g_0) = 4B_0 \Phi_0 / (\mu_0 g_0) \quad (11)$$

で、変位に対する磁石によるギャップの不安定剛性である。

一方、シート電流回路の抵抗を R とすれば発生起電力は：

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \mp \frac{d\Phi_0}{dt} - (\Phi_0 / g_0) \frac{dx}{dt} - \frac{d\Phi_i}{dt} = Ri \quad (12)$$

$$\therefore L \frac{di}{dt} + Ri = -(\Phi_0 / g_0) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (13)$$

(10), (13)式を、初期値をゼロとしてラプラス変換する。

x, i, f のラプラス変換量をそれぞれ $X(s), I(s), F(s)$ とし、

$$K = K_m - K_u \quad (14)$$

と置けば外力に対する変位の伝達特性は

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{Ls+R}{(Ms^2+K)(Ls+R)+K_u Ls} \quad (15)$$

特性方程式は

$$(Ls+R)Ms^2 + K_u Ls + (Ls+R)K = 0 \quad (16)$$

または

$$Ms^2 + \frac{L}{Ls+R} K_u s + K = 0 \quad (17)$$

となる。(17)式第2項は不完全微分の減衰項で<4.2>で述べた不安定剛性 K_u に比例していることが分かる。

<5.2> 単純モデルの減衰項の検討 減衰項は本来、変位に対して90度の位相進みが条件である。(14)式を使って(17)式を書き直し、

$$Ms^2 + K_m + K_u \left(\frac{-R}{Ls+R} \right) = 0 \quad (18)$$

の第3項としてダイナミクスを含む復元力として検討する。角周波数を ω とし、 $s \rightarrow j\omega$ と置き替えると第3項は：

$$K_u \left(\frac{-R}{Ls+R} \right) \Rightarrow K_u \frac{-R(R-j\omega L)}{\omega^2 L^2 + R^2} = -K_u \frac{R}{Z} \left(\frac{R}{Z} - j \frac{\omega L}{Z} \right) \\ = -K_u \cos\theta (\cos\theta - j\sin\theta) = -K_u \cos\theta \cdot e^{-j\theta} \quad (19)$$

ただし Z はインピーダンス、 θ は位相角で次式となる：

$$Z = \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}, \quad \theta = \tan^{-1}[\omega L / R] \quad (20)$$

図5 インピーダンスと複素磁気力の位相角説明図
Fig. 5 Phase angle of impedance and complex magnetic force

この力は図5(a)の複素平面上の第2象限の斜めの一本の矢印で示される複素ベクトルで、以下これを複素力と呼ぶことにする。この複素力は単位相対変位に対してヨークに加わる磁気力の大きさと、変位に対する負の位相差を表したものである。角周波数 ω が増大すると複素力は半円をなぞって θ が増大し、その大きさは単調に減少する。その実数成分は正なら相対変位に対する通常の復元力で、図のように $-K_u$ というベクトルは $\pm\pi$ の位相角を持った不安定力である。複素力の負の実数成分は機械的復元力である第2項の K_m で補償される。また、その正の虚数成分が通常の減衰項、つまり減衰力であるから、このモデルでは複素力が不安定力方向から位相角で $\theta = 45\text{deg}$ 遅れた場合が最大の減衰力となる。即ち、不安定力から更に位相が遅れることにより減衰力として作用していることを表している。

このように、単純モデルを用いることにより本ダンパシ

ステムの動作原理が定性的に理解できた。しかし、このモデルでは定数一つの系としたから、ある θ の一本のベクトルまたは一つの複素力しか存在しない。しかも L と R をどのように決定したらよいか明確になっていないので実際にこのモデルを用いて設計することは困難である。そこで定量的なモデルとして後述する円柱磁路近似による解析を試みた。そのモデルでは同図(b)のように、 ω をある一定値に固定したままでも無数のベクトルまたは複素力が円柱中心からの位置の関数として分布する(図では5本しか示していないが)様子を表現できるのでより正確な近似が可能となる。

6. Bessel関数による解析^{2),3)}

ここでは前章の単純モデルを、無限多層の同心円筒の交流電磁界に拡張し、ギャップにおいて中心軸から任意の距離 r の円筒状磁束の分布を求め、それによる磁気力の減衰力としての効果を解析する。ただし、交流磁界は(2)式の ω または x を正弦波とする交流磁束によるものとする。

<6.1> 解析モデル 分布定数のまま解析するため、図6に示すように交流磁路の断面の正方形を半径 a の円とし、つまり円柱磁路とし、かつループ状磁路の曲りを無視して直線と見なして中心軸 z の円柱座標による分布系として検討した。この問題は古くから交流電磁界の表皮効果の解析として、ゼロ次の第1種Bessel関数 $J_0(\rho)$ を用いた解析解が与えられている⁴⁾。ただし ρ は後述する無次元化半径で、 $-\pi/4$ の位相を持った複素数である。

図6 円柱磁路断面の座標系と記号
Fig. 6 Coordinate system of columnar magnetic path

<6.2> Bessel関数を用いた基本方程式⁴⁾ H_a を振幅とする外部からの軸方向交流磁界 $H_a e^{j\omega t}$ による円柱磁路中の中心から半径 r における磁界の軸方向成分 H_z は、 $j = \sqrt{-1}$ 、 ω を角周波数、 μ を磁路の透磁率、 κ を磁路の導電率として、次のKelvinの微分方程式で与えられる：

$$\frac{d^2 H_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH_z}{dr} - j\omega\mu\kappa H_z = 0 \quad (21)$$

ここで変数変換係数

$$\alpha = (1-j)\sqrt{\omega\mu\kappa/2} \\ = (1-j)/\delta \quad [m^{-1}] \quad (22)$$

を定義し、(21)式の各項を α^2 で割って独立変数を

$$\rho = \alpha r = (1-j)r/\delta \quad (23)$$

という $-\pi/4$ の位相を持った無次元化半径を用いると

$$\frac{d^2 H_z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dH_z}{d\rho} + H_z = 0 \quad (24)$$

という実係数の0次 Bessel 方程式に変わる。 $\rho=0$ すなわち円柱の中心軸 z で有限の解を有するのが $J_0(\rho)$ である。外周 $r=a$ の $H_z(\rho)$ の値は印加磁界に等しいという境界条件

$$H_z(a) = H_a e^{j\omega t} \quad (25)$$

を用いて次の(26)式となることが文献[4]で与えられている：

$$H_z(r) = H_a \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} e^{j\omega t} \quad (26)$$

(22)式の α の定義で与えた

$$\delta = \sqrt{2/\omega\mu\kappa} \quad [\text{m}] \quad (27)$$

は表皮厚(skin depth)と言われるもので、100[Hz]の振動では $\delta = 7 \sim 14[\text{mm}]$ (銅) $\delta = 0.7 \sim 1.4[\text{mm}]$ (鉄) である。

文献[4]では外部磁界は磁路に巻き付けたコイルの交流電流で与えられているので、MSダンパの場合に応用するには $H_z(a)$ をどのように与えるかが問題となる。

MSダンパにおいては、左右のギャップの磁束密度 B_1, B_2 は(4),(5)式に(6)式を代入して断面積 S_g で割ったもので：

$$B_1 = \Phi_1 / S_g = B_0 + B_0 \cdot \xi \quad (28)$$

$$B_2 = \Phi_2 / S_g = B_0 - B_0 \cdot \xi \quad (29)$$

これらの磁束密度は磁性材料の磁路中でもギャップでも等しいとして検討を続ける。つまり、ギャップの磁束密度を無変位時の B_0 をバイアス値としてそれに振動変位による交流の $B_0 \cdot \xi$ が重畳されたと考え。円柱磁性材磁路の外周表面は内部の渦電流の影響を全く受けないから $B_0 \cdot \xi$ はそのまま円柱外周の磁束密度に等しく、 x_a を振動の振幅として、次式の位置における磁束密度の変化分 $\Delta\Phi/S_g$ を交流磁束密度の振幅とする：

$$\xi(x=x_a) \equiv \xi_a = x_a / g_0 \quad (30)$$

従って磁束密度の変化分を材料の透磁率 μ で割った値が(25)、(26)式の H_a となる：

$$H_a = B_0 \cdot \xi_a / \mu = (B_0 / \mu) \cdot x_a / g_0 \quad (31)$$

以下においては磁界よりも磁束密度で論じたほうがギャップでもそのまま使えて便利なので、(26)式に μ を乗じた円柱磁性材磁路内部の任意の半径における磁束密度 $B_z(r)$ で表現することにする：

$$B_z(r) \equiv \mu H_z(r) = B_0 \cdot (x_a / g_0) \cdot T_J(r) \cdot e^{j\omega t} \quad (32)$$

$$T_J(r) \equiv \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} \quad (33)$$

この(33)式は(26)式の J_0 の分数部分に等しい一般的に複素数で、それぞれ磁路の機械的振動に対する内部磁束密度または外部磁界に対する内部磁界の伝達特性の、無次元の動的部分を半径の関数として表現していることになる。磁性材の面積 $2\pi r dr$ のリング部分における磁束密度がそのま

まギャップのそれに等しいと仮定して、(9)式と同様にギャップのリング部分で発生する磁気力 $dF_z(r)$ の全ギャップの総和 $F_z(a)$ を求めよう。(9)式前半の左右の差動的磁束密度をそれぞれ $B_{z+}(r), B_{z-}(r)$ とし、 $S_g = 2\pi r dr$ とおいて：

$$dF_z(r) = \frac{1}{\mu_0} \{B_{z+}^2(r) - B_{z-}^2(r)\} 2\pi r dr \quad (34)$$

(8)式に相当する差動的磁束密度は：

$$B_{z\pm}(r) = \pm B_0 + B_z(r) \quad (\text{複号同順}) \quad (35)$$

これを(34)式に代入して

$$dF_z(r) = (4B_0 B_z(r)) 2\pi r dr / \mu_0 = 8\pi B_0 B_z(r) r dr / \mu_0 \quad (36)$$

(32)式の $B_z(r)$ と(11)式の不安定剛性 K_u を代入して：

$$dF_z(r) = K_u x_a e^{j\omega t} \cdot T_J(r) \cdot \frac{2\pi r dr}{S_g} \quad (37)$$

変位に対する力の動特性も $T_J(r)$ で決定されることが分かる。

(37)式を積分すると外周半径 a の関数としての複素力 $F_z(a)$ が求められる。Bessel 関数の積分公式⁵⁾を用いて：

$$\begin{aligned} F_z(a) &= \frac{K_u}{S_g} x_a e^{j\omega t} \int_0^a \frac{J_0(\alpha r)}{J_0(\alpha a)} 2\pi r dr \\ &= \frac{K_u}{S_g} \frac{x_a e^{j\omega t}}{\alpha^2 J_0(\alpha a)} \int_0^{\alpha a} J_0(\alpha r)(\alpha r) d(\alpha r) \\ &= 2K_u \frac{S_g}{S_g} x_a e^{j\omega t} \cdot \frac{a/\delta}{1-j} \cdot \frac{J_1[(1-j)a/\delta]}{J_0[(1-j)a/\delta]} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\therefore F_z(a) = 8\pi \frac{B_0^2}{\mu_0 g_0} x_a e^{j\omega t} \cdot \frac{a}{\alpha} \cdot \frac{J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} \quad (39)$$

ただし J_1 は1次の第1種Bessel関数であり、また

$$S_g = \pi \delta^2 \quad (\text{半径 } \delta \text{ の円の面積}) \quad (40)$$

である。さらに(22)式より次の式も用いた：

$$\alpha a = (1-j) \frac{a}{\delta}, \quad \frac{a}{\alpha} = \frac{a\delta}{1-j} \quad [\text{m}^2] \quad (41)$$

<6.3> 減衰係数の周波数特性 ダンパの性能の目安として用いられるのが減衰力を速度で割った減衰係数 C [Ns/m] である⁶⁾。MSダンパにおいては(38)または(39)式からそれを誘導することができる。まず振動による速度 v は

$$v = \dot{x} = j\omega x_a e^{j\omega t} \quad (43)$$

であるから、この値で(39)式の負の虚数部を割ったものが減衰係数 C [Ns/m] である：

$$\begin{aligned} C &\equiv -j \text{Im}[F_z(a)] / (j\omega x_a e^{j\omega t}) \\ \therefore C &= -2 \frac{K_u}{\omega} \text{Im} \left[\frac{J_1(\alpha a)}{\alpha a J_0(\alpha a)} \right] \end{aligned} \quad (44)$$

減衰係数(44)式は、同じ磁路材料で太さ a を一定としても変数変換係数 α の関数であり、 α は δ の関数である。 δ は周波数 $f = \omega / (2\pi)$ [Hz] の関数でもあるから、結局 C は周波数の関数ということになる。

ω と f の基準値をそれぞれ ω_0 、 f_0 として

$$\omega = \omega_0 (\omega / \omega_0) = \omega_0 \Omega \quad (45)$$

$$\Omega = \omega / \omega_0 = f / f_0 \quad (\text{無次元周波数}) \quad (46)$$

で定義された無次元周波数 Ω を用いることにする。ここでは後述する実験値との比較の便宜上

$$f_0 = 100 [\text{Hz}] \quad (\text{基準周波数})$$

に選んだ。また、このときの表皮厚を δ_0 とすれば

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega_0 \Omega \kappa}} = \delta_0 \sqrt{\frac{1}{\Omega}}, \quad \delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\mu \omega_0 \kappa}} \quad (47)$$

同様に(23)式から無次元外径 $\rho(r=a) = \alpha a$ も

$$\alpha a = \alpha_0 a \sqrt{\Omega} \quad (\text{無次元外径}), \quad \alpha_0 = (1-j)/\delta_0 \quad (48)$$

となるから、これらを(44)式に代入する：

$$C = -8\pi \frac{B_0^2}{\omega_0 \mu_0 g_0 \Omega^{3/2}} \text{Im} \left[\frac{a}{\alpha_0} \frac{J_1(\alpha_0 a \sqrt{\Omega})}{J_0(\alpha_0 a \sqrt{\Omega})} \right] \quad (49)$$

$$= -\frac{2K_u}{\omega_0 \Omega} \text{Im} \left[\frac{1}{\alpha_0 a \sqrt{\Omega}} \frac{J_1(\alpha_0 a \sqrt{\Omega})}{J_0(\alpha_0 a \sqrt{\Omega})} \right] \quad (50)$$

やはり、5章の単純モデルの場合と同様に、永久磁石による不安定剛性 K_u に比例する。(50)式の曲線で特に変化の激しい直流付近から150[Hz]までの低周波付近を示したのが図7である。ただし δ_0 に含まれる μ には後述する増分透磁率 μ_Δ を用いた。同図から減衰係数は周波数ゼロにおいて有限であることがわかる。

図7 減衰係数の周波数依存性
Fig.7 Dependence of damping coefficients on frequency

7. 実験結果と解析結果の比較

<7.1> 増分透磁率の測定 磁束密度の振動成分は(8)、(35)式でも示したように直流分のバイアス磁束密度 B_0 がかかっているから、前章まで求めた式の中の(27)、(47)式の表皮厚 δ に含まれる μ は増分透磁率でなければならない。それを求めるために、図1を振動しないように中心位置に固定して二つのヨークの片方にコイルを巻いて交流電流を流して交流磁界を入力し、反対側のヨークにも出力用のコ

イルを巻いて誘導電圧を測定して増分透磁率 μ_Δ を求めた。

その結果、増分透磁率 μ_Δ を真空透磁率 μ_0 で割った増分比透磁率 $\mu_{\Delta S}$ はかなりの分散があったが、平均値として

$$\mu_{\Delta S} \approx 100 \quad (\text{増分比透磁率}) \quad (51)$$

となったので、増分透磁率 μ_Δ は

$$\mu_\Delta \approx 4\pi \times 10^{-5} [\text{H/m}] \quad (\text{増分透磁率}) \quad (52)$$

として δ に代入した結果100[Hz]において $\delta=1.6[\text{mm}]$ となった。バイアス値である直流磁束密度 B_0 が約0.5[T]であるから、まだ飽和には遠い値ではあるが、ヒステリシスがかなり強いためにB-H曲線のマイナーループの傾きが水平に寝てきたために増分比透磁率が低くなったものと思われる。

<7.2> 減衰の実験値と解析値との比較 実験装置は図2の構成よりも調整が容易な、原理的には全く同じ装置を用いた。主な違いは1本の板バネの代わりに平行な4本の弾性円柱棒にしたことで、その太さの調整で共振周波数に変化を与えた。図2の場合と同様にハンマーの打撃に対する振動応答を記録し、FFTによる単位インパルス応答のゲイン特性から減衰係数 C [Ns/m] の周波数特性を求めた。

ギャップ g_0 は0.3、0.4、0.5mmの3種類にセットしたが、0.3mmのギャップでは不安定剛性 K_u が大きく、高い共振周波数に変えることが困難なので、狭い範囲に限られた。逆に0.5mmのギャップでは低周波が困難で、0.4mmのものが比較的広い周波数での実験ができた。

図8 減衰係数の解析解と実験値との比較
Fig. 8 Damping coefficients, theoretical curves and test values

実験の結果、図3に示したように減衰が良好で共振曲線のピークが殆ど無くなる場合が多かったので、単純モデルの特性方程式である(16)式を1次×2次に因数分解したモデルでのカーブフィッティングによる2次特性部分から減衰係数を算出した。理論式である(49)または(50)式を利用するために、10[mm]四方の断面正方形の磁路を、等面積の円とし、その半径 $a=5.64[\text{mm}]$ を採用した。この場合の100[Hz]における表皮厚 δ_0 は前述した1.6[mm]となったので

$a/\delta_0 = 3.52$ となった。これらの値を(45)~(50)式に代入して求めた減衰係数の理論曲線の一部と実験値を図8に示す。ただし、理論曲線は煩雑を避けて図7の中の実験範囲近傍に限定した。磁束密度と不安定剛性は4章の表1で与えた数値を用いた。

図8の $g_0 = 0.3[\text{mm}]$ における150[Hz]前後の二つの実験データは、理論値から少し外れているが、それ以外のデータは理論曲線の近傍にあって、傾向も類似している。

なお、文献[6]に同種のNd磁石(NEOMAX-32H)での計算による C の値が与えられている。このダンパは円筒ギャップ磁路に銅製円筒を挿入して振動させる通常の方式で、許容振幅は本MSダンパよりも大きい。その中の最大値を本実験での磁石体積に換算した値は、周波数特性を示さない13.7[Ns/m]であるから、図8で示した実験値の最大値160[Ns/m]はこの値よりも1桁以上も大きい値である。

8. 解析結果の検討

解析結果は実験結果と良い一致を見たので、これらの解析結果から減衰力が発生する機構について考察してみる。

図9 磁路の太さと内部磁界の伝達特性
Fig.9 Transfer characteristics of various radii of magnetic path

<8.1> 表皮効果と内部の位相遅れ 図9は外部磁界の外部から内部への伝達特性を表す(33)式の $T_J(r)$ を、表皮厚 δ で無次元化した半径 r の関数として、その絶対値(Abs,点線)と減衰に直接関係する負の虚数成分(-Im,実線)の分布状態を求めたものである。表皮厚 δ に対して磁路断面の等価半径 a が1,2,3,6,10倍の五つの場合の5本の絶対値曲線はすべて最高値が外周で、表皮効果によって太い磁路ほど内部は急速に減衰している。ただ単に絶対値が減少するだけではなく、図は省略したが、波動の伝搬であるため位相が外周から内部へ向かって殆ど直線的に遅れる。その結果、虚数成分は減衰を伴った正弦曲線状に分布し、絶対値がその包絡線となる。例えば一番太い図の右端の $a/\delta = 10$ の場合には、外周から $\pi/2$ だけ内部へ入った位置で絶対値曲線に

接し、 π の位置ではゼロになってその先は符号が逆転する。つまり急激な減衰を伴う正弦波の最初の半波だけが目立ち、次の最初に符号を変える半波以降は殆ど消滅に近い。

単純モデルでも論じたように、外部磁界と同位相の成分は不安定力となるもので、それよりも位相が遅れた成分が減衰力となる。図9においては、前述の外周に近い最初の目立った半波の部分が減衰に有効で、つぎの逆符号の半波の部分は振動の発散に寄与するが、幸運なことに絶対値が急減するので影響も小さい。

むしろ次の太さの $a/\delta = 6$ の場合のほうが発散側のピークが大きくなっている。しかしながら実際の力はそれに面積を乗じたものであるから、有効な最初の半波に対する力の比はむしろ $a/\delta = 10$ の場合よりも小さくなるので悪影響はさらに小さい。磁路を太くし過ぎると磁路の外周部だけを有効に使い、それ以外の中心に近い部分を無駄にしていることがわかる。

さらに細い $a/\delta = 3$ の場合には、特異点である中心部に近くなるので、図は省略したが、位相遅れは直線的でなくなる。減衰に有効な半波はより大きくなり、発散の半波は全く現れない。 $a/\delta = 2$ の場合はその効果がさらに強調されているが、 $a/\delta = 1$ になると位相遅れが十分に起こらないために有効な半波も少し小さくなっている。 $a/\delta = 2$ の場合は後述するようにほぼ最適の太さで、材料を無駄なく利用していることがわかる。

<8.2> 複素平面上での複素力の分布 ここでは $a/\delta = 4$ の場合の図6の細いリング部分が発生する複素力 $dF_z(r)$ を調べてみる。そのために、(37)式の後半の r の重みを乗じた部分: $T_J(r) \cdot r$ のみに負号をつけて相対的な大きさと位相を複素平面上に表示したのが図5(b)で、原点Oから曲線までを結ぶすべての直線が分布した複素力に比例する複素ベクトルである。左端が外周部、右端付近が前述の有効な虚数の半波が終る外周から $a/\delta = \pi$ だけ内部に入った位置で、中心部では極めて微小な発散力となっている。右端では微小ながら正の水平成分、つまり復元力となる。同図(a)の単純モデルは、分布した複素力を一本の矢印で代表したものと考えることもできる。

<8.3> 磁路の最適の太さ 次に同一磁路材料、同一ギャップ長で同一の不安定磁束密度 B_0 を保持したまま磁路半径 a を増大した場合の(つまり、その分だけ磁石の半径も増大)最適な磁路の太さを調べるために(39)式のギャップ面全体の力 $F_z(a)$ を πa^2 で割って単位断面積当りの力に直したのが次の(53)式である。磁路半径に対する同式の右端の分数部分の絶対値(Abs)と、減衰力に相当する負の虚数部(-Im)の変化を図10に示す。

$$\frac{F_z(a)}{\pi a^2} = 8 \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{x_a}{g_0} e^{j\omega t} \frac{J_1(\alpha a)}{(\alpha a) J_0(\alpha a)} \quad (53)$$

図10によれば、複素力の絶対値は $a/\delta = 1$ を越える付近から急減しており、表皮効果そのものを表現している。し

図10 単位ギャップ断面面積当たりの磁気力と減衰力
Fig.10 Absolute and damping forces per unit gap area

かしながら虚数部は $a/\delta = 1.78$ 付近にピークを持っている。この太さにすると、 $\pi/2$ の位相遅れが外周部付近に限定されずに適度に内部へ浸透してダンパとして有効性を増す。細すぎると位相遅れが内部で殆ど生じない。逆に太すぎると絶対値が急減して内部が無効となり、減衰力の総量は有効な周長が増大するので増大はするが、外周付近を除けばその効果が弱くなるので、太さに対する効率が悪化するものと思われる。従って太すぎる磁路は磁極も含めて複数の最適に近い太さに分割する方法が有効と考える。

なお、積層しない鉄芯や磁路の電磁石による電磁力制御においては、5章の等価インピーダンスに相当する分布インピーダンスによって制御電流が遅れるだけでなく、磁気力自体が表皮効果で小さくなることと、位相が制御電流からさらに遅れることに留意し、使用材質と周波数から表皮厚 δ と磁路の実寸法を比較して見る必要があろう。

9. まとめ

文献[1]で提案した銅などの非磁性良導体を使用しない磁気ダンパ (MSダンパ) を、簡単な集中定数モデルで近似して磁気力の位相遅れが減衰効果をもたらすことを直観的に説明し、磁路を円柱で近似したより高度のモデルでは Bessel 関数を用いて磁気力の動的解析解を与えた。また、振動の減衰係数の周波数特性を解析的に求め、実験結果と比較的に良好な一致を示すことを示した。MSダンパに関する成果をまとめて箇条書きにする：

- (1) MSダンパは磁石体積当たりで従来の渦電流ダンパよりも1桁以上の高減衰係数であることを実験と解析データで示した。
- (2) 変位による磁束の変化が固定側と可動側の間の不安定剛性を発生し、減衰係数は不安定剛性に比例し、両者はギャップ長に反比例する。
- (3) MSダンパの断面正方形の長方形磁路を、曲がり角を無視した直線の円柱磁路で近似モデル化して Bessel 関数で解析したが、今回の実験では比較的に良好な一致を得た。

(4) MSダンパにおいては、振動による渦電流の発生が局所的に集中することなく、磁路の長さによって全体にはほぼ均等に分布することが減衰効率を高めているものと思われる。

(5) MSダンパが振動によって発生する力は、ギャップ外周における不安定力と、内部では外周の不安定力よりも位相が遅れる力であり、両者の不安定力成分は機械的なバネで補償し、後者の前者よりも位相が90度遅れた成分が減衰力となる。

(6) MSダンパにおいては、表皮厚の約2倍の円柱半径の磁路としたときに磁路断面面積当たりの減衰力の効率を最大にする。

(7) 磁路表面から表皮厚の約3倍 (π 倍) 以上内側では磁束の位相は更に遅れて負の減衰 (= 発散) となる。しかし表皮効果のためその力は小さくかつその発生面積も小さく悪影響は小さい。ただしその部分の材料は無駄になる。

(8) 磁気ダンパに限らず、一般的に非積層鉄心の電磁石は、そのインダクタンスで電磁石の電流が遅れるだけでなく、磁気力が電流よりさらに遅れる。

(平成10年7月22日受付, 平成11年1月21日再受付)

文 献

- (1) 村上 力・佐藤一樹：「新方式渦電流ダンパの研究」, 電気学会主催第9回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム No.11-2, 1997, 6月, 札幌。
- (2) 村上 力：「新型磁気ダンパの解析」, 電気学会リニアドライブ研究会資料, LD-97-112, 97, 12
- (3) 村上 力・佐藤一樹：「新型磁気ダンパの Bessel 関数による解析」機械学会主催第10回「電磁力関連のダイナミクス」シンポジウム, A7, 1998, 6月, 蔵王。
- (4) 例えば宮副泰, 「電磁気学Ⅱ」物理学ライブラリー4, 朝倉書店, 1983, pp.112-113.
- (5) 例えば森口繁一, 宇田川銑久, 一松信「岩波数学公式Ⅲ特殊関数」岩波書店, 1997, pp.159, 189.
- (6) 田中宗二・石原好之・下前好伸・内藤和文：「永久磁石式磁気ダンパの特性解析」, [1]に同じ, pp.359-362.

村上 力 (正員) 1930年1月10日生まれ。59年3月東北大通信工学科卒業。同年科技庁航技研究所。87年4月都立科技大・航空宇宙学科教授。93年3月定年退職。現在荏原総研顧問。主として衛星の制御, 回転体の無制御磁気浮上, 渦電流軸受の研究に従事。機械学会会員。工博。

佐藤 一樹 (非会員) 1960年4月26日生まれ。89年東京電機大学大学院博士課程満期退学。同年(株)荏原総合研究所入社。98年(株)荏原製作所精密電子事業本部。主として回転体用磁気軸受の研究開発に従事。機械学会会員。工博。