電力系統の安定度解析にて電機子過渡現象を無視することの妥当性の一裏付け

正員 片岡 良彦*

A Framework to Justify the Neglect of Armature Transients
in Power System Stability Analysis

Yoshihiko Kataoka*, Member

Neglect of armature transients of synchronous generator is common to stability studies of large-scale power systems. However the validity of the approximation is not successfully justified yet. This paper presents a framework to justify the approximation based on singular perturbation theory, as well as a method to measure the validity of the approximation based on singular values.

キーワード：電力系統，安定度，電機子過渡現象，同期機，特異摂動法，特異値

Keywords: power system, stability, armature transients, synchronous machine, singular perturbation, singular values

1. はじめに

電力系統の状態を評価する尺度のひとつに安定度がある。安定度評価では回路網は過渡現象を無視した実効値モデルで表される。これと整合をとるため発電機モデルにおいても電機子過渡現象が無視される。経験がこの近似の妥当性を裏付けてはいるが、従来の理論的裏付けは定性的なものに限られ定量的評価のための枠組みは知られていない。本稿はこのような枠組みとして特異摂動法に基づくものを示す。

2. Park の同期機モデル

Park による同期機電磁系の dq 座標系におけるモデルは

$$V_s = -r_a I_s + \frac{1}{\omega_B} \frac{d}{dt} \Psi_s + \omega_m T_J \Psi_s \dots\dots\dots (1)$$

$$V_r = R_r I_r + \frac{1}{\omega_B} \frac{d}{dt} \Psi_r \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

である⁽³⁾。ここに $R_r := \text{diag}(r_f, r_{kd}, r_{kq1}, r_{kq2})$, $\Psi_s := [\Psi_d \Psi_q]^t$, $\Psi_r := [\Psi_f \Psi_{kd} \Psi_{kq1} \Psi_{kq2}]^t$, $V_s := [V_d V_q]^t$, $V_r := [V_f 0 0 0]^t$, $I_s := [I_d I_q]^t$, $I_r := [I_f I_{kd} I_{kq1} I_{kq2}]^t$, $T_J := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} Y_{ss} & Y_{sr} \\ Y_{rs} & Y_{rr} \end{bmatrix} := (X_1 + X_2)^{-1}$, $X_1 := \text{diag}(-x_a, -x_a, x_f, x_{kd}, x_{kq1}, x_{kq2})$, $X_2 := [X_3 X_4 X_3 X_3 X_4 X_4]^t$, $X_3 := [-X_{md} 0 X_{md}$

$X_{md} 0 0]^t$, $X_4 := [0 -X_{mq} 0 0 X_{mq} X_{mq}]^t$, $\omega_B := 2\pi f_0$ である。添え字 s と r はそれぞれ電機子，回転子に属する量であることを示している。

3. 安定度評価のための近似と従来の説明

〈3・1〉 安定度評価のための近似 前述のモデルに次の近似 1 を施すことで一定の精度を維持しつつ効率的に安定度シミュレーションを行える⁽¹⁾⁽³⁾ことが知られている。大規模系統のシミュレーションでは不可欠である。近似 2 も採用されることが多い。

〔近似 1〕 電機子過渡現象を無視する。

〔近似 2〕 式 (1) において $\omega_m \equiv 1$ を仮定する。

近似 1 はしばしば式 (4) で表現される。

$$\frac{d}{dt} \Psi_s \equiv 0 \dots\dots\dots (4)$$

近似 1 を採る場合に精度維持の観点から近似 2 も同時に採るべき⁽²⁾との指摘がある。本稿では近似 2 の妥当性については議論せず、便宜上採用する。これにより考えているシステムは、電圧項を入力とする線形システムとなる。

〈3・2〉 従来の説明とその問題点 近似 1 は、回路網の過渡現象を無視する近似と対になるものとして導入される⁽¹⁾。これらの近似が「それらの過渡現象が安定度域の動揺現象よりも十分に速い」ことを拠り所としていることは明らかであり、それはこの分野での暗黙の共通認識でもある。しかしながらこのことを数式モデルを使って具体的に説明しようとする際に、若干の混乱が生じている。

すなわち近似 1 は明解に説明されてはいない⁽³⁾。近似の必要性や結果から見た妥当性⁽¹⁾、近似の意味づけ⁽³⁾は示されているが、近似を正当化する理論は示されていない。

近似 1 の説明に現れる式 (4) を素直に読めば、 Ψ_s が不変ということになる。しかしそのことは数値的に否定され

* 東京電力 (株) 技術開発研究所 系統技術グループ
〒230-8510 横浜市鶴見区江ヶ崎町 4-1
R&D Center, Tokyo Electric Power Co., Inc.
4-1, Egasaki-cho, Tsurumi-ku, Yokohama 230-8510

る⁽³⁾。よって式(4)は表記上誤りである。

この混乱は「固定的で明らかな大小関係→小さいほうを無視」という初歩的な近似の枠組みで近似1を裏付けようとしたために生じている。次の観点から、この枠組みを近似1の根拠とするには無理がある。

まず式(1)は電機子鎖交磁束がその他の項の積分値として決まっていく物理過程を記述したものである。そして近似1により当該量は独立変数から従属変数に変わる。これは動的システムにとっては「構造変化」とも呼ぶべき重大なことである。まずこのような重大な変更の妥当性が、初歩的な近似の枠組みで裏付けられるかは疑問である。

そして上述のような微分方程式の物理的背景から考えて、微分項とその他の項の大小関係から近似を論ずることには無理がある。大小関係から近似を論ずるならば、単一の式の上で当該項と他の項とを比較するよりは、当該式の微分項と他の式の微分項との比較を行うほうが適切である。

4. 特異摂動法に基づく理論的裏付け

電機子過渡現象が、考えている諸動的過程の中で相対的に十分速い場合に、近似1は妥当である。このことを具体的に調べ得る理論としての特異摂動法⁽⁵⁾⁽⁶⁾の引用を提案する。

なお回転子系(2)には機械系よりも十分に応答が速い制動巻線がモデル化されている。よって電機子過渡現象が十分速いことを確かめるためには、電機子過渡現象が回転子系の応答に比べ十分速いかどうかを調べればよい。

〈4・1〉 特異摂動法 特異摂動法⁽⁵⁾⁽⁶⁾は、微分方程式の次数の変化を伴うような近似に対しひとつの理論的裏付けを与える。微小パラメータ $\epsilon > 0$ を $\epsilon \rightarrow 0$ としたときに次数が下がるように記述された特異摂動システムと呼ばれるシステムの性質が、理論的に明らかにされている。それによれば、 $\epsilon \rightarrow 0$ により動的でなくなる側のサブシステムが安定ならば、 $1 \gg \epsilon > 0$ の場合と $\epsilon = 0$ の場合とでシステムの応答は十分に近い。

〈4・2〉 特異摂動システムの導出 電機子系と回転子系への分割を孕んだ特異摂動システムを定義する。式(1)~(3)から電流を消去したうえで可変パラメータ ϵ を導入し次式を得る。電流を消去するのは、代数拘束式(3)に伴う記述の冗長性を排除し本質に接近するためである。なお記述を簡単にするため入力項(電圧項)を省いている。

$$\frac{1}{\omega_B} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon \Psi_s \\ \Psi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cA_{ss} & cA_{sr} \\ A_{rs} & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_s \\ \Psi_r \end{bmatrix} \dots\dots(5)$$

ここに $A_{ss} = -T_J + r_a Y_{ss}$, $A_{sr} = r_a Y_{sr}$, $A_{rs} = -R_r Y_{rs}$, $A_{rr} = -R_r Y_{rr}$ である。定数 $c > 0$ は $[cA_{ss} \ cA_{sr}]$ と $[A_{rs} \ A_{rr}]$ とがバランスするように決める(後述)。 ϵ を c に等しくとれば式(5)はもとの系(1)~(3)に等価となる。

特異摂動法の結果から、 $c \ll 1$ が成立するならば $\epsilon \rightarrow 0$ により精度良い近似ができる。

近似1はこのようにして「微分項を取り除く」行為である。すなわち時刻 t に関わる拘束を解くものであり、決して式(4)の形の拘束を課すものではない。

〈4・3〉 近似の妥当性評価の一方法 — 特異値の利用 —

近似1の妥当性を特異値に基づいて定量的に評価することを提案する。列数 n の行列 S の特異値 $\sigma(S) = \{\sigma_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ は、 $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \ \forall i$, $\{\lambda_i | i = 1, 2, \dots, n\} := \text{eig}(S^t S)$ である⁽⁴⁾。eig()は固有値を求める関数である。

行列 S の特異値の最大値と最小値は、 z を任意の非零ベクトルとしたとき、 $\frac{\|Sz\|_2}{\|z\|_2}$ の最大値と最小値を与える。すなわちシステム行列やその部分行列 $[A_{ss} \ A_{sr}]$, $[A_{rs} \ A_{rr}]$ の特異値により、状態ベクトル $([\Psi_s^t \ \Psi_r^t]^t)$ の様々な変化に対応する微係数 $(\frac{d\Psi_s}{dt}, \frac{d\Psi_r}{dt})$ の大きさ(すなわち時間領域)を見積もることができる。よって特異値の比によりサブシステム間の時間領域の隔たりを評価することができる。

〈4・4〉 近似の妥当性評価の数値例 文献(3)の定数で試算した。なお計算には時間の単位が ω_B 倍された式(5)の行列をそのまま用いた。

速い側の電機子系の最も遅い要因は $\min(\sigma([A_{ss} \ A_{sr}])) = 1.0003$ であった。ちなみに電機子系の「速さ」は速度起電力項(式(1)右辺最終項)に由来している。一方遅い側である回転子系の最も速い要因は $\max(\sigma([A_{rs} \ A_{rr}])) = 0.1571$ であった。なお行列が横長であるために含まれる零特異値は除いてある。よってこれら2つのサブシステム間の時間領域の隔たりは、これらの比すなわち0.1571である。

c を保守的に採ればこの0.1571となる。これが1より十分に小さいかどうかで近似の妥当性が評価できる。高精度の近似とは言えないものの、一定の精度があると言える。なお回転子側の速い要因は制動巻線にあるので、モデルが制動巻線を含まなければ c はより小さくなる。

加えて文献(1)のp.154にある定数例に対して同じ計算を行ってみたところ、上同様に一桁弱の開きがあった。

5. おわりに

安定度解析における同期機の電機子過渡現象を無視する近似の妥当性を裏付ける枠組みを検討した。まず当該近似の説明の際に従来しばしば現れていた表記の誤りを指摘した。次に妥当性を裏付ける枠組みとしての特異摂動法の引用を提案し、さらにその枠組みに沿った定量的評価のための近似妥当性尺度として特異値に基づくものを提案した。

(平成14年11月20日受付)

文 献

- (1) P. Kundur: Power System Stability and Control, McGraw-Hill (1994)
- (2) P.C. Krause, F. Nozari, T.L. Skvarenina, and D.W. Olive: "The theory of neglecting stator transients," IEEE Trans. PAS, Vol. PAS-98, No.1 (1979-1/2)
- (3) J. Tamura, C. Nakazawa, and I. Chihara: "A consideration on the accuracy of various synchronous machine models for power system transient stability analysis," T. IEE Japan, Vol.121-B, No.3, pp.299-306 (2001-3)
- (4) 計測自動制御学会: 自動制御ハンドブック基礎編, オーム社 (1983)
- (5) 日本数学会: 数学辞典第3版, 岩波書店 (1985)
- (6) R.E. O'Malley, Jr.: Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Springer-Verlag (1991)