A Parallel Multigrid Solver for High Frequency Electromagnetic Field Analyses with Small-scale PC Cluster

Kuniaki Yosui Non-member (Murata Manufacturing co., ltd., yosui@murata.co.jp)

Takeshi Iwashita Member (Academic center for computing and media studies, Kyoto University)

Michiya Mori Non-member (Murata Manufacturing co., ltd.)

Eiichi Kobayashi Non-member (Murata Manufacturing co., ltd.)

Keywords: high frequency electromagnetic field analysis, finite element method, multigrid method, parallel computing, block Gauss-Seidel, block multicolor ordering

Finite element analyses of electromagnetic field are commonly used for designing of various electronic devices. The scale of the analyses becomes larger and larger, therefore, a fast linear solver is needed to solve linear equations arising from the finite element method. Since a multigrid solver is the fastest linear solver for these problems, parallelization of a multigrid solver is a quite useful approach. From the viewpoint of industrial applications, an effective usage of a small-scale PC cluster is important due to initial cost for introducing parallel computers. In this paper, a distributed parallel multigrid solver for a small-scale PC cluster is developed.

In high frequency electromagnetic field analyses, a special block Gauss-Seidel method based on node patches is used as a smoother for the multigrid solver instead of general smoothers such as Gauss-Seidel method or Jacobi method in order to improve a convergence rate. The node patch is given by a set of edge elements which share the same node, as shown in Fig. 1. The parallelization of the

smoother is important to obtain high parallel efficiency for the multigrid solver, because the cost of the smoother is enormous in both the computational time and memory usage.

In order to parallelize the smoother, the block multicolor ordering technique is applied as follows. At first, all patches are split into some blocks labeled by colors in such a way that adjacent blocks are labeled by different colors with each other, as shown in Fig. 2. Next then, the blocks in the same color can be processed in parallel.

Numerical results are shown in Fig.3 and Fig.4. A 3.7-fold speed-up in computational time and 3.0-fold increase in the scale of the analysis were attained when the number of CPU is increased from one to five.

Fig. 1. Node patches

Fig. 2. Block multicolor ordering

Fig. 3. Computational time of the multigrid solver

Fig. 4. Memory usage of the multigrid solver

小規模PC クラスタによる高周波電磁界解析のための 並列マルチグリッドソルバ

非会員 用水 邦明* 正員 岩下 武史**
非会員 森 倫也* 非会員 小林 英一*

A Parallel Multigrid Solver for High Frequency Electromagnetic Field Analyses with Small-scale PC Cluster

Kuniaki Yosui*, Non-member, Takeshi Iwashita**, Member, Michiya Mori*, Non-member,
Eiichi Kobayashi*, Non-member

Finite element analyses of electromagnetic field are commonly used for designing of various electronic devices. The scale of the analyses becomes larger and larger, therefore, a fast linear solver is needed to solve linear equations arising from the finite element method. Since a multigrid solver is the fastest linear solver for these problems, parallelization of a multigrid solver is a quite useful approach. From the viewpoint of industrial applications, an effective usage of a small-scale PC cluster is important due to initial cost for introducing parallel computers.

In this paper, a distributed parallel multigrid solver for a small-scale PC cluster is developed. In high frequency electromagnetic field analyses, a special block Gauss-Seidel smoother is used for the multigrid solver instead of general smoothers such as Gauss-Seidel smoother or Jacobi smoother in order to improve a convergence rate. The block multicolor ordering technique is applied to parallelize the smoother. A numerical example shows that a 3.7-fold speed-up in computational time and a 3.0-fold increase in the scale of the analysis were attained when the number of CPU was increased from one to five.

キーワード：高周波電磁界解析，有限要素法，マルチグリッド法，並列処理，ブロックガウスザイデル，ブロック化多色順序付け

Keywords: high frequency electromagnetic field analysis, finite element method, multigrid method, parallel computing, block Gauss-Seidel, block multicolor ordering

1. はじめに

現在，電子部品の設計には電磁界解析手法が広く用いられており，その主要な解析手法の一つとして有限要素法がある。著者らが対象とする高周波電磁界解析では，解くべき問題は最終的に辺要素に割り当てられた電界を未知数とする連立一次方程式に帰着する。最近では電子部品の小型化・多機能化に伴い電子部品の構造が複雑化する傾向にあり，精細なモデル作成のために多くの要素を用いる必要がある。その結果，解くべき連立一次方程式の次元数が大きくなり，これを解くために長い計算時間と大容量の主記憶

装置（メモリ）が必要となってきた。最近では，こうした問題に対してマルチグリッド法⁽¹⁾⁽²⁾の有効性が明らかになり，解析速度や解析規模の向上に大きく寄与してきた。しかし，マルチグリッド法を用いた場合においても，高周波電磁界解析では，最も粗なグリッドの密度が対象とする電磁界の波長と比べて十分に細かいことが要求されるため，最も粗なグリッド上で一般的に使用される直接法ソルバが計算時間とメモリ容量の両面において解析全体のボトルネックとなっていた。そこで，著者らはまず当該の直接法ソルバを反復法ソルバに置き換えることを試みた。その結果，特殊な前処理手法を適用することにより反復法による求解が可能であることを示し，メモリ容量の削減に成功した⁽³⁾。しかし，計算時間の比較の点においては，当該の研究において直接法ソルバと比べて優位な結果は得られなかった。

そこでこのような背景の下，本研究ではマルチグリッド法による求解処理を並列化し，計算時間の短縮を行うことを試みる。近年の学術分野では 1000 CPU を超えるスーパーコンピュータが利用可能になってきているが，産業応用の

* (株) 村田製作所
〒617-8555 長岡京市東神足 1-10-1

Murata Manufacturing Co., Ltd.
1-10-1, Higashikotari, Nagaokakyo 617-8555

** 京都大学学術情報メディアセンター

〒606-8501 京都市左京区吉田本町

Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University
Yoshidahonmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501

観点からは、導入コストの小さい4から8CPUの小規模PCクラスタの効果的な利用が重要である。そこで、本論文では小規模なPCクラスタを対象とした高周波電磁界解析の並列処理による高速化について研究する。現在、高周波電磁界の辺要素有限要素法をマルチグリッド法で解く場合、安定した収束解を得るためにマルチグリッド法のスムーザとして、Hybrid smoother⁽⁴⁾⁽⁵⁾やArnoldらの特殊なブロックガウスザイデル法⁽⁵⁾⁽⁶⁾を用いる必要があることが知られている。マルチグリッド法による求解処理において、スムーザが占める計算コストは大きいのでその並列化は重要である。そこで本研究では、Arnoldらの手法を対象とし、その並列処理方法として、通常の節点有限要素法や差分法で用いられる多色順序付け法、ブロック化多色順序付け法⁽⁷⁾を応用する方法を提案する。また、最も粗なグリッド上での線形ソルバとして、並列化された直接法ソルバであるMUMPS^{(8)~(10)}を導入する。関連する研究としては、文献(11)が著者らと独立に行われており、こちらは代数マルチグリッド法による低周波電磁界解析を対象としている。本論文では、並列処理方法についての詳細を述べ、その有効性について数値実験により検証を行う。

2. 高周波電磁界に対する有限要素法

電界を未知数とする定式化を行うために、基本方程式としては(1)、(2)式に示すベクトル波動方程式を用いる。ただし、 μ は透磁率、 ϵ は誘電率、 σ は導電率、 ω は角周波数である。

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times E - \omega^2 \epsilon E = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon + (j\omega)^{-1} \sigma \dots\dots\dots (2)$$

(1)式の弱形式を離散化することで離散化方程式(3)~(6)を得る。なお、 W はベクトル試験関数、 K は剛性行列、 M は質量行列である。

$$Ax_E = b_E \dots\dots\dots (3)$$

$$A = K - \omega^2 M \dots\dots\dots (4)$$

$$K_{i,j} = \sum_e \int_e \mu^{-1} (\nabla \times W_i) \cdot (\nabla \times W_j) dv \dots\dots\dots (5)$$

$$M_{i,j} = \sum_e \int_e \tilde{\epsilon} W_i \cdot W_j dv \dots\dots\dots (6)$$

(3)式について、解ベクトル x_E は領域内部の電界に相当する。また、右辺ベクトル b_E はポート部の電界モードから算出されるベクトルである。すなわち、(3)式を解くことは、ポート部に電界モードを与え領域内部の電界を求めることを意味する。

3. マルチグリッドソルバ

マルチグリッド法は微分方程式を有限要素法や差分法で離散化して得られる連立一次方程式に対する反復解法として、近年注目されている手法である。マルチグリッド法は、離散化の密度の異なる複数のグリッド(有限要素法の場合

は有限要素メッシュ)を用いることを特徴とする。密なグリッドでは誤差の空間的高周波成分、粗なグリッドでは誤差の低周波成分を除去し、全体として誤差の全ての周波数成分をまとめて効率よく除去することができる。各グリッドにおける誤差の除去処理のことをスージング、そのための手法をスムーザと呼ぶ。スムーザとしては、ヤコビ法やガウスザイデル法などを使用するのが一般的である。また、最も粗なグリッドに対しては、通常は直接法が用いられる。マルチグリッド法は単体で反復法として用いることも可能だが、共役勾配法をはじめとする非定常反復法(クリロフ部分空間法)の前処理として用いることで、より速く確実に収束解を得られるようになる。本研究でもマルチグリッド法をクリロフ部分空間法のひとつである対称擬似最小残差法(SQMR法)⁽¹²⁾の前処理として用いる方法を採用しており、本論文では以下、この方法を単に「マルチグリッドソルバ」と表記することとする。

〈3・1〉NP-BGS スムーザ 通常の節点有限要素法の場合、マルチグリッド法のスムーザとしてはヤコビ法やガウスザイデル法などを用いるのが一般的であるが、辺要素を用いた高周波電磁界有限要素解析においては、十分な収束性が得られない。収束性を改善するためのスムーザとして、HiptmairらのHybrid smootherとArnoldらが提案したスムーザ(本論文ではNP-BGS スムーザと呼ぶ)がある。本研究では後者を採用している。NP-BGS スムーザは、ブロックガウスザイデル法において電磁界有限要素解析に有効な特殊なブロック構成を用いる方法である。ここではNP-BGS スムーザのアルゴリズムについて簡単に説明する。詳細については文献(3)で述べられている。

NP-BGS スムーザでは、まず有限要素メッシュにおいて節点パッチを作成する。ここで、節点パッチとは、ある節点についてそれを端点とする辺要素の集合である。Fig. 1に節点パッチの例を示す。ここでは、○印のついた辺要素の集合が節点パッチ P_1 、△印のついた辺要素の集合が節点パッチ P_2 となる。節点パッチを作成した後に、Fig. 2に示す手順を行うことでスージング操作が行われる。Fig. 2において、 A_i は連立一次方程式 $Ax = b$ の係数行列 A のうち節点パッチ P_i に関連した部分よりなる $n_i \times n_i$ 行列を表す。ここで n_i は P_i 内に含まれる辺要素の数である。Fig. 1の例では $n_1 = 5, n_2 = 5$ である。また、演算子 R_i は、辺要素全体の集合から節点パッチ P_i に含まれる辺要素だけを

Fig. 1. Node patches.

Fig. 2. NP-BGS smoother.

Fig. 3. V-cycle multigrid.

抽出し圧縮する操作を表す。よって、右辺括弧内の残差計算 $(b - Ax)$ は全ての行について計算する必要は無く、節点パッチ P_i に含まれる辺要素に対応する行のみ計算すればよい。この時、ベクトル x については、節点パッチに含まれる辺要素と、それを囲む位置にある辺要素に対応する行の値が参照される。Fig. 2 では節点パッチ P_1 に含まれる辺要素を○印、それを囲む辺要素を□印で表している。このうち値が更新されるのは、○印のついた範囲となる。

Fig. 2 の処理は、各節点パッチ毎に局所的に有限要素法を適用し得られる連立一次方程式 $A_i x_i = b_i$ を直接法で解くことを意味している。

マルチグリッドソルバでは V-cycle マルチグリッド法 (Fig. 3 参照, 詳細は文献 (1) 参照) を使用する。V-cycle マルチグリッド法を SQMR 法などの対称係数行列用の反復法の前処理として用いる場合には、プリスムージングとポストスムージングにおける節点パッチの処理順序を互いに逆にする必要がある。つまり、プリスムージングにおいては Fig. 2 に従って操作を行った場合、ポストスムージングにおいては Fig. 2 中の for ループ部分を p から 1 まで逆順に行う。こうすることにより前処理行列が対称化され、マルチグリッド法を SQMR 法の前処理として用いることが可能となる。

4. NP-BGS スムーザの並列化

後述の数値計算結果が示すように、マルチグリッドソルバにおいて、スムーザの計算コスト（計算時間とメモリ使用量）が全体に占める割合は大きいため、その並列化は重要である。本論文では、多色順序付け法及びブロック化多色順序付け法を応用した NP-BGS スムーザの並列化手法を提案する。多色順序付け法とブロック化多色順序付け法について説明した後、それらの NP-BGS スムーザへの適用方法について述べる。

〈4・1〉 多色順序付け法 多色順序付け法は、ガウスザイデル法や不完全 LU 分解法の代表的な並列化手法のひとつとして知られている。例として次の 4 元連立一次方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

連立一次方程式 (7) に対するガウスザイデル法の計算式は、次のようになる。

$$x_1 \leftarrow a_{11}^{-1}(b_1 - a_{14}x_4) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$x_2 \leftarrow a_{22}^{-1}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$x_3 \leftarrow a_{33}^{-1}(b_3 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$x_4 \leftarrow a_{44}^{-1}(b_4 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4) \quad \dots\dots\dots (11)$$

ガウスザイデル法ではこれらの式を例えば (8), (9), (10), (11) 式の順に計算していく。その際、更新された $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ の値は、以後の計算に即反映される。ここで (8) 式と (10) 式だけに注目すると、これらの 2 式に現れているすべての変数が異なり、互いに干渉しないため、並列処理の観点からは独立と見なすことができる。同様のことが (9) 式と (11) 式についても当てはまる。多色順序付け法は、このような互いに干渉しない行を探し、それらを並列処理する方法である。そのとき、互いに干渉しない行の集合を表すために、「色」という表現が用いられる。本節の例では、(8) 式と (10) 式には A という「色」を、(9) 式と (11) 式には B という「色」をつける。まず色 A を計算し、次に色 B を計算する。1 つの色を計算している間は並列処理を行い、その色の計算が終わったところで同期を取り、次の色に進む。よってガウスザイデル法の 1 反復の間に、使用する色の数と同じ回数の同期が必要となる。多色順序付け法により並列化されたガウスザイデル法の結果は、(10) 式の (9) 式への依存関係、および (8) 式の (11) 式への依存関係を無視することになるため、元のガウスザイデル法に対して反復法としての解の収束性が変化する。

〈4・2〉 NP-BGS スムーザに対する多色順序付け法

通常のガウスザイデル法の計算は係数行列の行を単位として行われるため、多色順序付け法では行毎に色付けを行った。一方、〈3・1〉節で述べたように、NP-BGS スムーザの計算は節点パッチを単位として行われる。そのため、NP-BGS 法スムーザに対する多色順序付け法では、節点パッチ毎に色付けを行う。但し、互いに干渉しない節点パッチを探し、それらを並列処理するという基本的な考え方は変わらない。

多色順序付け法の例を Fig. 4 に示す。〈3・1〉節で述べたように、NP-BGS スムーザにおいてある節点パッチを処理するときに参照される未知数の範囲（以下、単に参照範囲と記す）は、節点パッチを構成する各辺と、それを囲む辺

との和集合となる。Fig. 4 では、節点パッチ a と c の参照範囲には色をつけて示し、節点パッチ b と d の参照範囲は太線で示している。この場合、a と b、c と d は互いに干渉しているため異なる色を付ける必要があるが、a と c、a と d、b と c、b と d は互いに干渉していないので、同じ色をつけることが可能である。そこで、例えば a と c、b と d にそれぞれ同じ色をつける。同様にして残りの節点パッチにも色を付けていくことにより、NP-BGS スムーザの多色順序付け法による並列化が可能となる。以下、多色順序付け法によって並列化した NP-BGS スムーザを MC-NP-BGS と表記する。

〈4・3〉 ブロック化多色順序付け法 実際の3次元有限要素解析で用いられるメッシュのほとんどは、歪な四面体要素が複雑に絡み合った形状をしており、各々の節点パッチはその周囲の多数の節点パッチと干渉していることが多い。そのような場合には多色順序付け法の色数を多くとる必要があるが、多色順序付け法のアルゴリズムでは色数と同じ回数の同期処理が必要であり、同期回数の増加は並列処理の効率を悪化させるため、並列処理の観点からは色数を少なく抑えることが望まれる。そのための方策のひとつとして、ブロック化多色順序付け法が考えられる。ブロック化多色順序付け法は、近接する節点パッチによるブロックを構成し、ブロック単位で色付けを行う。ブロック化多色順序付け法の例を Fig. 5 に示す。Fig. 5 では、節点パッチをブロック化し A、B、C、D の4つのブロックを構成している。また、ブロック A とブロック C は、互いに干渉しないので、同じ色を付け並列処理することができる。同様にして、ブロック B とブロック D も並列処理が可能である。各ブロック内については逐次的な NP-BGS スムーザによる処理を行う。節点パッチのブロック化方法としては様々な方針が考えられるが、本論文では Fig. 5 のようにメッシュを物理的にスライスするブロック化を行っている。この方法ではほとんどの場合、2色のみで色付けすることができる。以下、ブロック化多色順序付け法によって並列

Fig. 4. Multicolor ordering.

Fig. 5. Block multicolor ordering.

化した NP-BGS スムーザを BMC-NP-BGS と表記する。

5. 数値実験

〈5・1〉 評価用モデルと計算機 本論文では、マルチグリッドソルバの性能評価用の解析モデルとして、Fig. 6 に示すスパイラルインダクタを用いた。本モデルでは導体や誘電体の損失を考慮している、即ち、(2) 式において導電率 σ は有限の値を持ち、誘電率 ϵ は複素数となる。そのため、連立一次方程式の係数行列・右辺ベクトル・解ベクトルはすべて複素数となっている。マルチグリッドソルバのグリッド数は4とした。使用モデルの各グリッドの自由度を Table 1 に示す。計算には5ノードのPCクラスタを使用した。その構成は Table 2 に示す。

〈5・2〉 マルチグリッドソルバの計算時間とメモリ使用量 はじめに予備実験として、マルチグリッドソルバの計算を逐次処理で行い、計算時間とメモリ使用量を測定した。これらの内訳を示すとそれぞれ Fig. 7 と Fig. 8 のとおりになった。これらの図から明らかなように、計算時間とメモリ使用量のほとんどはスムーザと最も粗なグリッドに対する直接法ソルバによる LU 分解が占めており、マルチグリッドソルバの並列化においては、スムーザと直接法ソルバを高効率で並列化することが重要であることが判る。

〈5・3〉 スムーザの比較 並列マルチグリッドソルバで用いるスムーザを決定するため、第4章で述べた NP-BGS スムーザの並列化手法を比較する。比較項目は、マルチグリッドソルバの収束性、並列度、計算時間の3つである。詳細は以下の小節で述べるが、まとめると Table 3 のとおりになる。どちらも一長一短であるが、対象としている小

Fig. 6. A spiral inductor.

Table 1. Degrees of freedom.

grid level	degrees of freedom
1	3,088,742
2	1,341,995
3	641,723
4	281,418

Table 2. PC cluster.

CPU	Intel®Xeon®3.6 GHz
Memory	4GB
OS	SUSE Linux 9.1
Compiler	Intel®Fortran Compiler 9.1
MPI	MPICH-1.2.7

Fig. 7. A breakdown of computational time.

Fig. 8. A breakdown of memory usage.

Table 3. Comparison between MC-NP-BGS and BMC-NP-BGS.

	MC-NP-BGS	BMC-NP-BGS
convergence speed	○	○
parallelism	○	△
computational time	△	○

規模 PC クラスタにおいては、並列度が小さくても計算時間の短い BMC-NP-BGS が有利となる。

〈5・3・1〉 マルチグリッドソルバの収束性 マルチグリッドソルバが収束するまでに要した反復回数の比較を Table 4 に示す。ただし、収束の判定は相対残差ノルム：

$$\frac{\|b - Ax\|}{\|b\|} < 10^{-6} \dots \dots \dots (12)$$

を用いて行った。

スムーザを変えても反復回数はほぼ同じ結果となり、スムーザによるマルチグリッドソルバの収束性に差は無いということが判った。また、CPU 数を増やしても反復回数に変化が無いということも確認できた。

〈5・3・2〉 スムーザの並列度 並列度は、MC-NP-BGS では各色の節点パッチの個数、BMC-NP-BGS では各色のブロックの個数と等しくなる。今回のモデルにおいて各スムーザの並列度を求めると、Table 5 に示すとおりになった。MC-NP-BGS の並列度は約 400 であり、この値は一般的な PC クラスタにとっては十分な大きさと考えられる。一方、BMC-NP-BGS の並列度は 8 となっている。8 ノード程度の小規模 PC クラスタであれば問題ないが、それ以上の台数では効率が低下することが予想される。

マルチグリッドソルバ全体としての並列化効率を考えた場合、スムーザ以外の処理についてもスムーザと同程度の並列度が必要とされる。しかし、特に最も粗なグリッドの

Table 4. Number of iterations.

smoother	1CPU	5CPU
MC-NP-BGS	62	59
BMC-NP-BGS	62	59

Table 5. Parallelism of the smoothers.

smoother	number of colors	parallelism
MC-NP-BGS	20	408
MC-NP-BGS	40	404
BMC-NP-BGS	2	5
BMC-NP-BGS	4	8
BMC-NP-BGS	10	8

Fig. 9. Computational time of the smoothers.

求解に用いられている直接法ソルバ（LU 分解と前進後退代入）は並列化が難しい処理として知られており、現状では 8 台程度で頭打ちとなる。よって現時点では、スムーザとしても 8 程度の並列度があればよく、BMC-NP-BGS でも問題ないレベルであると考えられる。ただし、色分け方法やブロック化方法を工夫することにより、並列度を高められる可能性が考えられるので、今後の課題としたい。

〈5・3・3〉 スムーザの計算時間 各スムーザの計算時間を Fig. 9 に示す。これは、マルチグリッドソルバによる反復計算 1 回中の各グリッドにおけるスージング計算時間の合計を表している。ここで、通信時間は分散メモリ型並列処理のための PC 間通信と、それに付随する前後処理にかかる時間を表す。これらには、データの送受信、送受信データの PACK・UNPACK 処理、送受信データ配列と送受信バッファ間のデータ転送に要する時間、通信関数呼び出し時のオーバーヘッドなどが含まれる。BMC-NP-BGS の計算時間は、通信時間、非通信時間とも、MC-NP-BGS より短いことが判る。通信時間については、色数の差による影響と考えられる。MC-NP-BGS は BMC-NP-BGS よりも色数が多くなる傾向があり、今回の数値実験では、BMC-NP-BGS の色数は 2、MC-NP-BGS の色数は 20 であった。多色順序付け法では色数と同数の通信が必要となるため、通信の回数は MC-NP-BGS の方が 10 倍多いことになる。送受信されるデータの総量はどちらのスムーザも同じなのでデータの送受信時間には差は無いと考えられるが、それ以外の時間については通信回数によって増加するため、通信回数

Fig. 10. Computational time of the multigrid solver.

Fig. 11. Memory usage of the multigrid solver.

の少ない BMC-NP-BGS の方が通信時間が短くなる。また非通信時間については、以下のように説明できる。ブロック化多色順序付け法では同じ色のつけられた節点パッチが近くにまとまっており、各節点パッチを計算する時に参照される未知数が、互いに重複している。重複している未知数についてはキャッシュメモリにあるデータが利用され、メインメモリへの参照回数が少なくなり、計算時間が短くなっている。一方、多色順序付け法では、そのような重複を起こさないように色分けを行う必要がある。そのため、ほとんどがメインメモリからの参照となり、計算時間が長くなる。

〈5・4〉 並列マルチグリッドソルバ全体としての性能

スムーザとして BMC-NP-BGS を使用し、それ以外の処理についても分散メモリ型並列化した並列マルチグリッドソルバを作成し性能評価を行った。最も粗なグリッド上での線形ソルバとしては、並列化された直接法ソルバである MUMPS を導入した。計算時間の測定は、全グリッドの係数行列と右辺ベクトルが既に与えられている状態から始め、マルチグリッドソルバの反復計算が終了するまでとした。よってここでの計算時間は、節点パッチの作成・最も粗なグリッドの LU 分解・SQMR 法による反復計算の時間を合計したものとなる。

PC1 台で計算した場合と PC5 台で計算した場合の、連立一次方程式の自由度に対する計算時間とメモリ使用量の関係をそれぞれ Fig. 10 と Fig. 11 に示す。PC5 台で計算した場合は、並列処理の効果により計算時間が短くなり、メ

Fig. 12. Parallel efficiency of computational time.

Fig. 13. Parallel efficiency of memory usage.

モリ分散の効果によりメモリ使用量が少なくなっているのが判る。Fig. 11 より、1 台あたりのメモリ容量を 2 GByte とした場合、PC1 台では約 80 万自由度までしか計算できなかったところが、PC5 台では約 240 万自由度まで計算可能になっていることが判る。64 bitPC が登場する以前の 32 bitPC では利用できるメモリ容量が 2 GByte に制限されていたため、80 万自由度が限界であった。しかし、従来の 32 bitPC を用いる場合でも PC クラスタを構成し並列マルチグリッドソルバを用いることにより、従来の 3 倍の規模の解析が可能であることが示された。さらに Fig. 10 より、計算時間についても、約 300 万自由度の計算において PC1 台使用時は 14.5 分だったものが PC5 台使用時では 3.9 分となり、約 3.7 倍に高速化された。また、標準的な PC による PC クラスタ構成は PC1 台に大容量メモリを搭載する構成と比べて導入コストを大幅に抑えられるという点も、産業応用の観点からは重要である。

Fig. 12 と Fig. 13 は、それぞれ Fig. 10 と Fig. 11 の結果を効率の観点から見直したものである。今回提案した BMC-NP-BGS スムーザについては PC5 台使用時でも 95 パーセントの高効率を維持できていることが確認できる。全体としては計算時間の効率は 75 パーセント、メモリ使用量の効率は 61 パーセントとなっている。これは、直接法ソルバの LU 分解の効率が低いことによる影響が大きい。今後さらに効率を上げるためには、直接法ソルバの効率改善が課題となる。

6. ま と め

5 CPU の小規模 PC クラスタを対象としてマルチグリッド法の分散メモリ型並列化を行い、並列マルチグリッドソルバを開発した。同ソルバを用いることにより、計算速度を 3.7 倍に高速化し、標準的な 32 bitPC での解析規模を 3.0 倍に増やすことができた。

並列化効率の観点からは、計算コストの大きいスムーザと直接法ソルバのうちスムーザの並列化に取り組んだ結果、BMC-NP-BGS を用いて PC5 台での並列化効率 95 パーセントを達成した。スムーザについて高効率の並列化に成功したため、直接法ソルバの効率が全体の効率に大きく影響している状態となり、今後は直接法ソルバの効率を上げていくことが課題となる。

(平成 18 年 10 月 19 日受付)

文 献

- (1) W.L. Briggs, V.E. Henson, and S.F. McCormick: A Multigrid Tutorial Second Edition, SIAM, Philadelphia (2000)
- (2) J. Gopalakrishnan, J.E. Pasciak, and L.F. Demkowicz: "Analysis of a multigrid algorithm for time harmonic maxwell equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.42, No.1, pp.90-108 (2004)
- (3) M. Mori, K. Yosui, T. Iwashita, E. Kobayashi, and S. Abe: "Preconditioned Iterative Methods for High Frequency Edge Finite Element Electromagnetic Field Analyses", *T. IEICE*, Vol.J89-C, No.8, pp.521-528 (2006) (in Japanese)
森 倫也・用水邦明・岩下武史・小林英一・阿部 眞:「高周波電磁界要素有限要素解析のための前処理付き反復法」, 信学論 C, **J89-C**, 8, pp.521-528 (2006-8)
- (4) R. Hiptmair: "Multigrid method for maxwell's equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol.36, No.1, pp.204-225 (1998)
- (5) S. Reitzinger and J. Schöberl: "An algebraic multigrid method for finite element discretizations with edge elements", *Numer. Linear Algebra*, Vol.9, pp.223-238 (2002)
- (6) D.N. Arnold, R.S. Falk, and R. Winther: "Multigrid in H(div) and H(curl)", *Numer. Math.*, Vol.85, pp.197-218 (2000)
- (7) T. Iwashita and M. Shimasaki: "Algebraic Block Red-Black Ordering Method for Parallelized ICCG Solver With Fast Convergence and Low Communication Costs", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol.39-3, pp.1713-1716 (2003)
- (8) P.R. Amestoy, I.S. Duff, and J.-Y. L'Excellent: "Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers", *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.*, Vol.184, pp.501-520 (2000)
- (9) P.R. Amestoy, I.S. Duff, J. Koster, and J.-Y. L'Excellent: "A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling", *SIAM J. Matrix Analysis & Applications*, Vol.23, No.1, pp.15-41 (2001)
- (10) P.R. Amestoy, A. Guermouche, J.-Y. L'Excellent, and S. Pralet: "Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems", *Parallel Computing*, Vol.32, No.2, pp.136-156 (2006)
- (11) N. Obata, T. Mifune, T. Iwashita, and M. Shimasaki: "A Parallel Block Gauss-Seidel Smoother for Algebraic Multigrid Method in Edge-Element Analyses", The Papers of Joint Technical Meeting on tatic Apparatus and Rotating Machinery, IEE Japan, SA-06-68, RM-06-70 (2006) (in Japanese)

小畑信彦・美船 健・岩下武史・島崎眞昭:「辺要素解析における代数マルチグリッド法のための並列ブロックガウスザイデルスムーザ」, 電気学会静止器・回転機合同研究, SA-05-70, RM-06-70 (2006)

- (12) R.W. Freund and N.M. Nachtigal: "A new krylov-subspace method for symmetric indefinite linear systems", *Proc. of the 14th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics*, pp.1253-1256 (1994)

用水邦明 (非会員) 2003 年早稲田大学大学院理工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年 (株) 村田製作所入社。電磁界解析に関する研究に従事。情報処理学会会員。

岩下武史 (正員) 1998 年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。1998 年より京都大学工学部電気工学科リサーチアソシエイト, 2000 年より同大学学術情報メディアセンター助教授, 現在に至る。ハイパフォーマンスコンピューティング, 線形反復法, 電磁界解析に関する研究に従事。京都大学博士 (工学)。IEEE, 情報処理学会, 日本 AEM 学会, 日本計算工学会各会員。

森 倫也 (非会員) 2002 年金沢大学自然科学研究科修士課程修了。同年 (株) 村田製作所入社。電磁界解析に関する研究に従事。日本物理学会会員。

小林英一 (非会員) 1991 年埼玉大学大学院理工学研究科修士課程修了。同年 (株) 村田製作所入社。マイクロ波フィルタ, 電磁界解析に関する研究に従事。