A Functional Optimization based Calculation Scheme for Dynamic Economic Load Dispatch Considering Ramp Rate of Thermal Units Output

Teruhisa Kumano Senior Member (Meiji University)

Keywords: thermal power plant, economic load dispatch, output ramp rate, calculus of variations

1. Introduction

Economic load dispatch among thermal units has been one of the most important problems in the field of power systems operation. Usually so called equal marginal cost criterion is adopted to this calculation. Recently global trend of utilizing more and more renewable energy makes this problem more important than ever. In case of large penetration of fluctuating power sources such as PV or wind, thermal units are more often required to change their prescheduled operation pattern because the outputs from PV and wind power generators are affected by uncertain change of weather condition. In a sense the large scale utilization of natural energy depends on the flexible and adaptive operation of the thermal units. In such a situation it is easily imagined that thermal units would be required to change their output faster than before sometimes violating the limitation due to the physical constraints of the plant including boilers. We will need a load dispatch calculation method which maximally utilizes their output change capability within the upper and lower limits of the ramp rate.

Dynamic economic load dispatch has been studied for a long time to give appropriate load dispatch among generators considering the above stated constraints. However the existing methods are not enough in case of the scenario of very steep demand change. Some more sophisticated calculation scheme is highly needed today which gives us feasible solution in severer situations.

2. Proposed Method

This paper proposes a new calculation scheme (Fig. 1) for the

above stated dynamic economic load dispatch problem based on functional optimization which numerically solves Euler's differential equation in the field of calculus of variations. The constraints related to units output and output ramp rate are readily considered by the logarithmic penalty function terms in the objective function together with the equality constraint regarding the total demand balance.

3. Numerical Example and Discussion

Numerical examples show that the proposed method can solve the above stated severe situation which has been difficult to treat by the existing methods. By adjusting a parameter A the feasibility of the solution is successfully controlled (Figs. 2 & 3). The obtained result is slightly less economical than the optimal solution (Table 1) but is feasible.

Fig. 2. Elimination of supply/demand mismatch by parameter selection

Fig. 3. Obtained feasible solution

Table 1. Total generation cost for various A

A	0.0	0.1	0.3	1.0
Total cost	1.000	1.018	1.034	1.038

Fig. 1. Proposed method

火力機出力変化率を考慮した動的経済負荷配分の関数最適化による計算法

上級会員 熊野 照久*

A Functional Optimization based Calculation Scheme for Dynamic Economic Load Dispatch Considering Ramp Rate of Thermal Units Output

Teruhisa Kumano*, Senior Member

Economic load dispatch among thermal units has been one of the most important problems in the field of power systems operation. Usually so called equal marginal cost criterion is adopted to this calculation. Recently global trend of utilizing more and more renewable energy makes this problem more important than ever. In case of large penetration of fluctuating power sources such as PV or wind, thermal units are more often required to change their prescheduled operation pattern because the outputs from PV and wind power generators are affected by uncertain change of weather condition. In a sense the large scale utilization of natural energy depends on the flexible and adaptive operation of the thermal units. In such a situation it is easily imagined that thermal units would be required to change their output faster than before sometimes violating the limitation due to the physical constraints of the plant including boilers. We will need a load dispatch calculation method which maximally utilizes their output change capability within the upper limits of the ramp rate.

Dynamic economic load dispatch has been studied for a long time to give appropriate load dispatch among generators considering the above stated constraints. However the existing methods are not enough in case of the scenario of very steep demand change. Some more sophisticated calculation scheme is highly needed today which gives us feasible solution in severer situations.

This paper proposes a new calculation scheme for the above stated dynamic economic load dispatch problem based on functional optimization which numerically solves Euler's differential equation in the field of calculus of variations. The constraints related to units output and output ramp rate are readily considered by the logarithmic penalty function terms in the objective function together with the equality constraint regarding the total demand balance. Numerical examples show that the proposed method can solve the above stated severe situation which has been difficult to treat by the existing methods. Convergence performance is also discussed.

キーワード：火力発電所，経済負荷配分，出力変化率，変分法

Keywords: thermal power plant, economic load dispatch, output ramp rate, calculus of variations

1. はじめに

電力系統の需要には日間変動があるため，安定供給のために水力・火力発電機の出力をこれに合わせて変化させる必要があるが，その主体は火力発電機である。需要変化を構成する変動成分のうち十数分程度以上の時定数を持つ比較的ゆっくりとした成分については経済性を考慮した負荷配分が給電指令所などで計算され，火力発電機の出力はこ

れに基づいて設定される⁽¹⁾。この際，発電機出力が出力上下限を逸脱してはならないのはもちろんであるが，出力変化率についても上限制約（変化率制約）がある。しかし，従来の経済負荷配分手法により計算された負荷分担では変化率制約に違反を生じ実現できないことがあり問題とされてきた⁽²⁾。この原因は従来の経済負荷配分に使われてきた等増分燃料費則（以下，等λ法）が個々の時点を静的断面として扱い，各発電機の時間方向のトレンドを考慮していないためである。

この問題は昨今の自然エネルギー発電の大量導入の流れから再び重要性を増している。すなわち，太陽光，風力等の変動電源の拡大やシステム全体の効率運用および信頼性

* 明治大学
〒214-8571 川崎市多摩区東三田 1-1-1
Meiji University
1-1-1, Higashi-mita, Tama-ku, Kawasaki 214-8571

の維持を考慮すると、火力発電機を含めた制御可能電源の出力を積極的に増減させることが課題となりうるとの指摘である⁹⁾。火力発電機群に変化率制約ぎりぎりの発電出力変化を従来以上に求める場合、こうした要請に応える上で有効な問題解決法は意志決定を行う上で重要である。

火力発電機の変化率制約を考慮する経済負荷配分について行われてきた諸研究の概要は以下のとおりである。文献(4)では各発電機の出力変化履歴を5分間隔でサンプリングした時系列として扱い、隣接2時点間の出力変化幅に注意して各時刻ごとに負荷配分計算用の各発電機の出力上下限を設定する方法を提案している。予め変化率制約を満たす範囲を定めた上で等λ法を用いることで文献(2)に比べて解のfeasibility(実行可能性)を高めることに成功している。文献(5)は変化率制約等を含む経済負荷配分問題を非線形最適化問題として定式化し、確率的ニューラルネットワークを用いてこれを解いている。文献(6)もニューラルネットワークによる最適化であるが、変化率制約や出力上下限は、これに違反する時に大きな値をとるペナルティの形で目的関数に含めた最適化を行っている。

一方、文献(7)は、燃料費関数の係数が持つ不確実性をファジィ数で表現するとともに、最適化部分を遺伝的アルゴリズムと組み合わせた計算法を提案している。文献(8)はファジィ動的計画法を用いてこの問題に対処しており、時間軸方向に総和をとった目的関数の最小化を行っている。これらに対して論文(9)では考察期間全体にわたる全対象発電機燃料費総和を最小化するために制御時刻ごとに異なるλ値(Lagrange乗数)が導入されている。〈2・3〉節で後述するとおり本論文でもλ値を時間変化する変数として取り扱っているが、文献(9)は制御周期を時間間隔とする離散時間系を導入、制御周期時点ごとの最適化問題列として定式化している点で異なる。本論文は連続時間系としての定式化を行っており、変分法に基づく微分方程式を解くことにより最適出力分担を時間の関数として求める。

著者らは既に論文(10)においてこの問題を連続時間系における変分問題として定式化し、Eulerの微分方程式によって火力機の出力変化率を考慮した最適化が可能であることを示した。ただし文献(10)では出力変化率の考慮はできるものの、出力上下限の考慮が不十分であり、可能出力値の幅が狭い場合には負荷配分が得られない場合が見られた。このため本論文では文献(10)では使用しなかった対数障壁関数(後出Fig.1)を目的関数に導入して不等式制約の考慮を容易にするとともに、出力可能範囲中央からの偏差を二次関数によって表現した新しいペナルティ関数項を解のfeasibility向上のために目的関数に導入する。この結果、実行可能解を得ることが難しかった文献(9)の「パターン4」(後出Fig.4)の需要変化など、厳しい条件に対しても実行可能解を算出することに成功した。

本論文では、まず第2章で問題の定式化について述べた後、第3章で計算アルゴリズムを提案し、第4章で具体例に適用して得られた結果を議論する。第5章は結論である。

なお、本稿では経済性の観点で最も重要な発電燃料費に焦点を絞り、系統の潮流方程式は考慮しない。よって送電損失は無視されるが、その大きさは通常、発電出力に対して1割以下であり、意志決定に大きな影響は与えない。

2. 動的経済負荷配分問題の基本的考え方

〈2・1〉 文献(9)における問題の定式化 既に前章で述べたが本論文で提案する手法は文献(9)が取り扱っているものと同じ数値例に適用し、比較・検討する。そこで文献(9)における問題の定式化について説明する。

文献(9)は文献(11)等と同様に、火力発電機 k の燃料費はユニットごとに異なる係数 a_k , b_k , c_k を用いて二次関数の形で表している。時間軸方向は5分をサンプリング間隔とする離散時間系として取り扱っており、考察する時間範囲($t = 1, 2, \dots, T$)全体にわたっての燃料費総和を最小化する。すなわち

$$f = \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^N \left(\frac{a_k}{2} P_{kt}^2 + b_k P_{kt} + c_k \right) \cdots \cdots \cdots (1)$$

が目的関数である。(1)式の目的関数は時間の取り扱いが離散時間系か連続時間系かという違いはあるにせよ、以下に述べる本論文の目的関数(9)式に非常に近い。これが本論文で文献(9)を比較検討の対象に選んだ理由である。

制約条件としては、需給バランスに関する等式制約

$$\sum_{k=1}^N P_{kt} = \hat{P}_t \cdots \cdots \cdots (2)$$

と、出力上下限に関する不等式制約

$$P_k < P_{kt} < \overline{P}_k \cdots \cdots \cdots (3)$$

および変化率制約

$$-\delta_k \leq P_{kt} - P_{k(t-1)} \leq \delta_k \cdots \cdots \cdots (4)$$

を考慮している。制約条件も本論文と類似の取り扱いであるが、離散時間系として扱うため、後述するEulerの微分方程式は用いられていない。また本論文における時間方向のサンプリング間隔は1分としており、この点でも取り扱いが異なっている。

〈2・2〉 本論文における問題の定式化 本論文でも、火力発電機の燃料費は係数 a_i , b_i , c_i を用いて次のように表せるものと仮定する。

$$f_i = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 \cdots \cdots \cdots (5)$$

添え字 i は第 i 発電機($i = 1, 2, \dots, NG$: NG は発電機数)に関する量であることを意味し、 a_i , b_i , c_i の具体的な値については文献(9)と同じく後出のTable 1に示すように定めた。同表には出力変化率の最大値(増加側減少側とも同一値)も併せて示す。本論文は系統を無視するため総コストは各発電機に関する(5)式のコストを加え合わせたもの、すなわち

Fig. 1. Logarithmic penalty function.

$$C = \sum_{i=1}^{NG} f_i = \sum_{i=1}^{NG} (a_i + b_i P_i + c_i P_i^2) \dots\dots\dots (5')$$

となる。

各発電機の出力の和は需要の総和に等しい必要がある。式で示すと、総需要を表す時間関数を $P_L(t)$ として

$$\sum_{i=1}^{NG} P_i(t) = P_L(t) \dots\dots\dots (6)$$

となる。また各発電機の出力およびその変化率は次のとおり上下限で抑えられている。以下、傍点は時間微分を表す。

$$\left. \begin{array}{l} P_i(t) \geq P_{i,\min} \\ P_i(t) \leq P_{i,\max} \\ \dot{P}_i(t) \geq \dot{P}_{i,\min} \\ \dot{P}_i(t) \leq \dot{P}_{i,\max} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

以上まとめると、本論文で扱うのは (5') 式の燃料費モデルを元に (6), (7) 式の制約を満足しながら燃料費を最小化する問題である。ただし、本論文では (5') 式の代わりに次の (5'') 式に関する最小化を (6) 式のみ制約の元で行う。

$$f_i = a_i + b_i P_i + c_i P_i^2 + w_{i1}(\dot{P}_i) + w_{i2}(\dot{P}_i) + w_{i3}(P_i) + w_{i4}(P_i) + A(P_i - P_{im})^2 \dots\dots\dots (5'')$$

ここで新しく加わっている第 4～5 項は変化率制約に関するペナルティ、同様に第 6～7 項は出力上下限に対するペナルティであり、第 8 項は出力範囲中央からのずれに関するペナルティである。4～7 項の具体的な関数形は次に示す (8) 式で表される。ここで $\dot{P}_{i1o}$, $\dot{P}_{i2o}$ および P_{i1o} , P_{i2o} はそれぞれ第 i 発電機の変化率制約および出力上下限に関する対数障壁関数の形状を決定するパラメータであり、Fig. 1 に示すように、これより内側ではペナルティ関数はゼロとなり、ここから急激に立ち上がり、上下限値に近づくにつれ無限大のペナルティ値をとる。また $\dot{P}_{i1o}$, $\dot{P}_{i2o}$ 等においてペナルティ関数値およびその微分値は連続である。

$$\left. \begin{array}{l} w_{i1}(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq \dot{P}_{i1o}) \\ -\ln\left(\frac{x - \dot{P}_{i\max}}{\dot{P}_{i1o} - \dot{P}_{i\max}}\right) - \frac{x - \dot{P}_{i1o}}{\dot{P}_{i\max} - \dot{P}_{i1o}} & (x > \dot{P}_{i1o}) \end{cases} \\ w_{i2}(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq \dot{P}_{i2o}) \\ -\ln\left(\frac{x - \dot{P}_{i\min}}{\dot{P}_{i2o} - \dot{P}_{i\min}}\right) - \frac{x - \dot{P}_{i2o}}{\dot{P}_{i\min} - \dot{P}_{i2o}} & (x < \dot{P}_{i2o}) \end{cases} \\ w_{i3}(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq P_{i1o}) \\ -\ln\left(\frac{x - P_{i\max}}{P_{i1o} - P_{i\max}}\right) - \frac{x - P_{i1o}}{P_{i\max} - P_{i1o}} & (x > P_{i1o}) \end{cases} \\ w_{i4}(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq P_{i2o}) \\ -\ln\left(\frac{x - P_{i\min}}{P_{i2o} - P_{i\min}}\right) - \frac{x - P_{i2o}}{P_{i\min} - P_{i2o}} & (x < P_{i2o}) \end{cases} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

また (5'') 式右辺最終項に含まれるパラメータ P_{im} は発電機 i の出力範囲

$$P_{i\min} \leq P_i \leq P_{i\max}$$

の中心

$$P_{im} = (P_{i\min} + P_{i\max})/2$$

を意味し、係数 A は解の実行可能性を制御するパラメータであり、求解の過程で調整する。

本来不等式制約で表される条件をペナルティ関数に置き換えたため、 $\dot{P}_{i1o}$, $\dot{P}_{i2o}$ は限りなく $P_{i\max}$, $P_{i\min}$ に近づける必要がある。本論文では特に断らない限り $\dot{P}_{i1o}$ は上限値 $\dot{P}_{i\max}$ よりも 0.001% 小さく選び、この 0.001% 分と同一の大きさの幅を下下限 $\dot{P}_{i\min}$ と $\dot{P}_{i2o}$ の間にも設けている。 $\dot{P}_{i1o}$, $\dot{P}_{i2o}$ を $\dot{P}_{i\max}$, $\dot{P}_{i\min}$ に近づけた場合に、一般には非線形性の影響で収束性が悪化する可能性が考えられるが、後に述べる数値検討の結果、収束性が悪化することは見られなかった。なお、ここで述べたことは全て出力変化率だけでなく、出力上下限についても同様である。

最小化する目的関数について述べる。通常の経済負荷配分問題では (5') 式を各時点において最小化するが、対象とする時間帯全体にわたっての発電費用を最小化することができれば目的は達せられるので、この代わりに

$$J[\mathbf{P}] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i f_i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \dots\dots\dots (9)$$

を最小化することを考える。つまり、通常、従来法では各時点における発電量ベクトル

$$\mathbf{P} = (P_1 \quad P_2 \quad \dots \quad P_{NG})^T$$

を別々の問題として最適化する場合が多いのに対して、提案法は時間関数としての発電量波形ベクトル

$$\mathbf{P}(t) = (P_1(t) \ P_2(t) \ \cdots \ P_{NG}(t))^T \cdots \cdots (10)$$

を関数として最適化する。なお既に述べたが、目的関数を構成する各要素は(5')式の形をしており、(6)式の等式制約条件を満たす必要がある。

また、本論文では特に需要変化の激しい昼休み等の時間帯を対象に負荷配分を行うことを前提とする。考察期間は3時間程度とし、文献(9)で用いている数値例がそうであるように、3時間の考慮期間の最初と最後では需要が一定レベルに落ち着く(後出 Fig. 4 を参照)ことを前提とする。

〈2・3〉変分法と提案法の概要 変分法の知識によると付録1に示すように(10)の汎関数はEulerの方程式を解くことによって最小化することができる^{(12)~(14)}。ここで考えている問題では付帯条件は(6)式の代数方程式(発電機出力総和が総需要に等しいとする)なので具体的に書くと

$$\frac{\partial f}{\partial P_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{P}_i} \right) + \lambda = 0 \cdots \cdots (11)$$

$$\sum_{i=1}^{NG} P_i(t) = P_L(t) \cdots \cdots (6')$$

である。 λ は(2)式の制約条件に対応するLagrange乗数であり、時間 t の関数である。(11)式の微分方程式の具体的な形は付録2に示す。ここで得られた微分方程式(11)は付録2に述べたように時間方向に数値積分することで解くことができるが、いかなる初期条件あるいは境界条件を用いるべきかについて検討する。

提案法の詳細は次章で述べるが、その概略をFig. 2に示す。横軸(時間軸)方向両端の t_1 と t_2 の間が対象時間範囲であり、この間の任意の時点で縦軸(発電機出力値)方向に出力の取りうる範囲が決まる。Fig. 2の上下部にある太い縦線を施した領域は出力が取り得ない範囲である。出力上下限が時刻に応じて変わらなくとも、総需要の大きさが時々刻々変化するために実際に出力の取りうる範囲は変化する。たとえば後出の数値例で時刻 $t = 115 \text{ min}$ では総需要が350MWと非常に小さくなるので、発電機1, 2, 3はそれぞれの最小値100MW, 50MW, 200MWを取らざるを得ない。

本論文で考える問題とは、Fig. 2の可能領域(feasible region)の中に、燃料費が最小になるように発電機出力の変化を表す曲線を引くことである。この際、変化率制約も考慮するのであるから、曲線の傾きはこれ以内にしなければならない。次節にも述べるが、提案法は解のfeasibilityを重視するので最も実行可能領域の狭い時刻を特別にとりあげ、まず、この時点において確実に解をfeasibleとする。具体的には、出力値の変動可能幅の最も小さい時刻 t_0 を探し、ここを数値積分の始点に選び(Fig. 2の1))、その可能領域の中央に出力値を定める(Fig. 2の2))。始点 t_0 では各発電機の出力値はこの値に固定されることになり、付録1に述べた固定境界条件となる。また t_0 での出力変化率はゼロと指定する(Fig. 2の3)を参照)。ここで右側微分値と左側

Fig. 2. Numerical integration in the proposed method.

微分値は等しく角点ではないとする。これにより t_0 では出力上下限と変化率制約の両方が満たされる。

付録2で述べたように、提案法で解く微分方程式は出力に関する2階の方程式であるから、以上のように出力とその変化率を始点で与えれば初期条件は一意に定まり、Fig. 2の t_0 から右へと(つまり順時間方向に)数値積分を行うことができる(Fig. 2の4))。

一方、 t_1 から t_0 までの範囲(Fig. 2の対象時間範囲の前半)についても、やはり初期条件が一意に決まっているので逆時間方向に数値積分を進めることができる(Fig. 2の5))。

最後に終点(順時間方向積分では $t = t_2$ 、逆時間方向積分では $t = t_1$)においては特に出力を固定する必要はないので、解の最適性の条件は付録1に述べた自然境界条件すなわち(9)式被積分関数 f を出力変化率 $\dot{P}_i$ で偏微分した値についての条件(付13)式が満たされなければならない。これについては〈3・3〉節において述べる。

〈2・4〉計算の前提と提案法のねらい 動的経済負荷配分問題では対象とする問題の前提条件によって用いることのできる初期条件や入力データが左右される。たとえば文献(2)は将来時点の需要予測値を出発点として逆時間方向に発電機の出力をまず計算し、これでは需給バランスが満足できない場合に順時間方向の再配分を行っている。対象時間範囲の需要が既に推定されていることを仮定している。一方、文献(9)は一時刻前の経済負荷配分計算によって数時点先までの出力分担が分かっていることだけを前提に現時点での意思決定をどうするかを論じ、時間の経過とともに需要想定が変化した場合の調整を、これとは切り離して考察している。

本論文では、対象とする時間範囲の需要が予め推定できていることを前提とし、制約条件を全て満たすこと(すなわち実行可能解)を条件として、できるかぎり経済的な負荷配分法を求めることを目指す。また、初期時点として選んだ時刻における各発電機の出力とその時間変化率は分かっているものとする。本論文では、これまで種々の方法が試されても完全に需給バランスをとることの難しかった文献(9)の「パターン4」(後出 Fig. 4)において実行可能解を算出

することをねらう。

これにより、解くべき問題は初期条件

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t_1) &= \begin{pmatrix} P_1(t_1) & P_2(t_1) & \cdots & P_{NG}(t_1) \end{pmatrix}^T \\ \dot{\mathbf{P}}(t_1) &= \begin{pmatrix} \dot{P}_1(t_1) & \dot{P}_2(t_1) & \cdots & \dot{P}_{NG}(t_1) \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad \dots\dots (12)$$

のもとで、汎関数 (9) 式を最小化するように等式制約条件 (6') 式を満たす時間関数ベクトル (10) 式を決める関数最適化問題となる。

本論文では提案手法の妥当性を示すため、文献 (9) で用いられている例題に適用し、文献 (9) の計算結果と比較する。これは〈2・1〉節にも述べたように、最適化問題としての定式化における目的関数が、時間の取り扱いが若干異なるだけで非常に近く、かつ制約条件も実質的に同一であるため、比較の対象としやすいことによる。

3. 提案手法

〈3・1〉 静的経済負荷配分 動的経済負荷配分を計算する前に、まず一度発電機出力変化率制約を無視した等λ法による静的負荷配分計算を行い、得られた負荷配分曲線をチェックする。もしも全ての発電機の出力変化率が対象とする全時間範囲で制約範囲内に収まっていたら、動的負荷配分を計算する必要はなく、これを解とする。

発電機の出力変化率に制約違反が生じていた場合に、以下の動的負荷配分を行う。

〈3・2〉 初期点の選択 数値積分の出発点となる時刻 $t = t_0$ (Fig. 2) について考察する。動的負荷配分問題の解ベクトル $\mathbf{P}(t)$ が存在しうる領域は静的負荷配分問題において得られる $\mathbf{P}(t)$ の存在領域の内部にあるのは明らかである。極端な例として、静的負荷配分問題の実行可能解が時刻 $t = t_0$ において、ただ一点に定まる場合には、動的負荷配分問題の解も、必ずこの一点を通るはずである。従って解の feasibility を重視する提案法では、前段で行う静的最適負荷配分の結果得られた解曲線の軌道上各点で静的制約を満たす解の範囲を求め、最も範囲が狭い点を初期点に選ぶ。

具体的には任意の時点 t において求められた静的最適負荷配分結果 $\mathbf{P}(t) = (P_1(t) \ P_2(t) \ \cdots \ P_{NG}(t))^T$ に関して発電機ごとの出力増加可能量ベクトル

$$\begin{aligned} \Delta_+ \mathbf{P}(t) &= \begin{pmatrix} \Delta P_1(t)_+ & \Delta P_2(t)_+ & \cdots & \Delta P_{NG}(t)_+ \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} P_{1\max} - P_1(t) & \cdots & P_{NG\max} - P_{NG}(t) \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

と、出力減少可能量ベクトル

$$\begin{aligned} \Delta_- \mathbf{P}(t) &= \begin{pmatrix} \Delta P_1(t)_- & \Delta P_2(t)_- & \cdots & \Delta P_{NG}(t)_- \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} P_1(t) - P_{1\min} & \cdots & P_{NG}(t) - P_{NG\min} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

を計算し、増加、減少それぞれの要素の総和のうち小さいほうの大きさ M (Margin) を

$$M = \min \left(\sum_i \Delta P_i(t)_+, \sum_i \Delta P_i(t)_- \right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

により計算、時点 t ごとに比較し、これが最小となる時刻 t を動的負荷配分のための初期点 t_0 として選択する。

〈3・3〉 Euler の方程式の数値積分 以上で定めた初期点 $t = t_0$ から出発し、微分方程式を数値的に解いていく。数値積分の手法としては安定性の高い後退オイラー法を用いることとし、

$$\begin{aligned} Q(t) &\equiv \dot{P}(t) = (P(t) - P(t - \Delta t)) / \Delta t \\ \dot{Q}(t) &= (Q(t) - Q(t - \Delta t)) / \Delta t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (14)$$

により代数化した方程式を等式制約 (6') 式すなわち

$$P_1(t) + P_2(t) + \cdots + P_{NG}(t) = P_L(t) \quad \dots\dots\dots (15)$$

と連立して、まず順時間方向に時刻 $t = t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_2$ について解く。時間刻みは、扱っている問題が ELD であり制御対象が十数分程度の、ある程度長い時間の現象であるため過度に細かくとる必要はなく、一分程度で十分である。

この連立方程式はペナルティ関数を対数関数にしているため非線形である。本論文ではニュートン法によって解いた。ここで解いている方程式の具体的な形を付録3に示す。

なお、初期時点として選んだ $t = t_0$ が計算対象となる時間区間 $t_1 \leq t \leq t_2$ の最初の時点 $t = t_1$ に一致しないかぎり、数値積分は順方向だけでなく逆方向にも行う。逆方向の数値積分は時間刻み Δt を負として $t = t_1$ まで同様に計算する。

〈2・3〉節と付録1に述べたように、終点 $t = t_1$ および $t = t_2$ では本来自然境界条件すなわち (9) 式の被積分関数 f を出力変化率 $\dot{P}_i$ で偏微分した値についての条件 (付 13) 式が満たされなければならない。具体的には

$$-2c_i \ddot{P}_i - dw_{i1}(\dot{P}_i) - dw_{i2}(\dot{P}_i) = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

である。しかし、提案法では〈2・2〉節最後に述べたように、対象時間範囲の始点および終点で需要と発電機出力が一定レベルに落ち着くことを前提としている。このためこの時出力変化率はゼロで一定となり、 $\dot{P}_i = 0$ かつ dw_{i1} と dw_{i2} はいずれもゼロとなり (付録2の (付 15) 式を参照)、これらの点で成立すべき (16) 式は満足されるものと予想される。

このため数値積分においては取り扱うのが難しい二点境界値問題として定式化する必要はなく、固定境界である始点において、その後の計算が可能になるよう、出力値と出力変化率の双方を与え、数値積分を実行する。ただし、このうち出力変化率については与え方に任意性があるので、結果に及ぼす影響を議論する必要がある。これについては〈4・4〉節において述べる。

〈3・4〉 パラメータ A の調整 既出 (5'') 式の右辺第8項は解が出力可能領域の中心からずれると徐々に大きな値をとるペナルティ関数であり、係数 A をゼロとした場合が本来の意味での燃料費最適化に対応する。しかし最適性のみを考慮するのでは、本論文で対象とするような厳しい条件には実行可能解が求められない場合がある。このため A の値を次第に大きくして方程式を解き、解が制約を満たす

Fig. 3. Flow chart of the proposed method.

ように調整を行う。

大きな A を与えすぎると得られる解の最適性が必要以上に損なわれる可能性があるため、 A 値の調整は注意深く行う必要がある。本論文では予め定めたステップ幅 ΔA で増加させた。次章数値例では $\Delta A = 0.1$ としている。

以上述べた提案法の計算手順を Fig. 3 に示す。

4. 数値例

〈4・1〉 計算条件 既に述べたが、本論文では文献(9)で取り扱われている需要変化パターン「パターン4」を題材にして提案手法の妥当性を検証する。文献(9)に述べられているように、このパターンは昼休みにおける急激な火力発電機群の出力制限と午後最初の出力の急増を表現するもので、従来の動的負荷配分手法の研究において完全な需給バランスをとるのは非常に難しいとされてきた。Fig. 4 にパターン4の需要変化シナリオを示す。また、計算に用いる発電機の燃料費データも文献(9)と共通としている。これらを Table 1 に示す。

〈4・2〉 数値計算結果 Fig. 5 は静的最適経済負荷配分の結果である。需要の小さい $t = 115 \text{ min}$ 付近では各発電機の出力が下限ぎりぎりまで絞られるが、需要が大きくなるにつれて (Fig. 5 で $t = 115 \text{ min}$ から左右にずれるにつれて)、最初は最もコストの安い発電機3、次いで発電機2、1の順に出力が分担され、この結果、どの時点でも発電機1, 2, 3のうち、いずれか一機のみ出力が変化している。Fig. 4 に示した需要変化では $t = 110 \sim 120 \text{ min}$ の間を除き出力変化率は 10.8 MW/min と大きいため、いずれの発電機も自身の出力変化率として許される上限値を超えて出力を変化する結果となり、Fig. 5 の出力変化は実行可能ではない。

〈2・3〉節、〈3・2〉節で述べたように、提案法では静的負

Fig. 4. Demand variation pattern 4.

Table 1. Input data.

	Gen. Unit 1	Gen. Unit 2	Gen. Unit 3
a[yen]	15.0	10.0	5.0
b[yen/MW]	7.5	5.0	2.5
c[yen/MW ²]	0.002	0.0015	0.001
min P[MW]	100.0	50.0	200.0
max P[MW]	300.0	250.0	400.0
max dP/dt	7.0MW/min	3.0 MW/min	5.0 MW/min

Fig. 5. Result of static ELD.

Fig. 6. Shape of function M .

荷配分結果をもとに動的負荷配分計算の初期点 t_0 を選ぶ。このために (13) 式の M 値を計算した。結果を Fig. 6 に示す。 M が最小となるのは $t = 115 \text{ min}$ であり、この点を初期点に選ぶ。

この点を初期点に選んで数値積分を行った。〈3・3〉節に

(a) Outputs variation

(b) Output ramp rate variation

Fig. 7. Result of proposed method ($A = 0$).

述べたように初期点の出力変化率は全てゼロとした。解の実行可能性を制御するパラメータ A はここではゼロである。この時には〈4・3〉節で後述するように後退オイラー法数値積分を実行する際の Newton 法が収束せず、解を得ることができなかった (Fig. 12 に $t = 170$ min における残差の推移を示す)。Newton 法の 1000 回の繰り返しの中で最も残差が小さい点を近似解として強引に計算を継続したところ、近似的な解が得られた。得られた結果を Fig. 7 に示す。

Fig. 7 に示す波形では全ての発電機の出力変化率と出力は制約内部に収まっている。また、最低需要の $t = 115$ min から需要が増えるにつれて、最初は最もコストの安い発電機 3 のみ、次に発電機 3 の出力変化率を最大にした上でコスト中位の発電機 2 の変化率を最大にし、これで賄えない部分を最も費用性能の劣る発電機 1 に分担させる結果となっている。最後に発電機 1 の出力が一旦上昇した後減少しているのは、需要とともに増加させてきた発電機 3 (最安) の出力が $t = 158$ min で上限 400 MW に達したため、発電機 2 の変化率制約による出力不足を発電機 1 に分担させて賄い、その後出力一定の定常状態における最適分担 (これは静的計算によっても知られる) に合わせるように、残り 2 機のうちコスト優位の発電機 2 の出力をできるかぎり増やすため、余分な出力を発電機 1 において調整した結果である。この結果は完全には方程式が解けていないながらも、各時点の出力値が、その時点で利用可能な発電機出力余力を用いて、最も費用の安い組み合わせを実現していると理

Fig. 8. Mismatch between supply/demand ($A = 0$).

Fig. 9. Obtained maximum mismatch for various A .

解できる。

結果として得られる総発電量は Fig. 8 のように推移しており、時刻 $t = 60$ min, 170 min 付近で最大 40 MW 程度の需給不均衡が生じており、実行可能ではない。文献 (9) でも量は 10 MW と提案法よりも小さいが需給不均衡を生じている。次に需給不均衡を解消するためにパラメータ A (5'' 式右辺第 8 項の係数) を調整した。この時に得られた結果での需給不均衡量の大きさを Fig. 9 に示す。 A を大きくすることによって Fig. 8 で生じていた需給不均衡は急速に解消している。なお、この時に得られた発電ユニットごとの出力変化は Fig. 10 のとおりであり、Table 2 に $A = 0.3$ の時の出力変化を要約するが、全時間範囲にわたって制約条件範囲内に収まっている。つまりこれは実行可能解である。Fig. 7 と比較すると費用の安い発電機 3 の出力レベルが落ち、費用の高いユニット 2 や 1 の利用量が増している。これは経済性の面で好ましくない。Table 3 に各 A 値で得られた発電ユニット運用における総発電費用を示す。最大で約 3% の差が見られる。

以上のように、提案法はここで仮定した需要変化パターンに対して有効に働き、実行可能解を算出することができる。文献 (9) とは結論が異なるが、この理由の一つは〈2・1〉節で述べたサンプリング間隔の違いであると考えられる。

〈4・3〉 収束性の検討 本手法は数値積分においてニュートン法を用いているため、収束性が重要である。そこで本節では $A = 0.3$ の場合を中心に収束性を検討する。Fig. 11

Fig. 10. Results of proposed method for different A.

は初期点から出発して最初に計算される $t = 116 \text{ min}$ における収束状況である。縦軸は解いている連立方程式 (付 17) の残差平方和 $\sum \Delta g_i^2$ を初期値で割った相対値であり、Fig. 11 中の ALPHA はニュートン法の減速乗数 α (下式) である。

$$\left. \begin{aligned} x &= x + \alpha \Delta x \\ \Delta x &= [J]^{-1} \Delta g \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

ここで $x = [P_1(t) \ Q_1(t) \ \dots \ Q_{NG}(t) \ \lambda(t)]^T$ は付録 3 の未知数ベクトル、 Δg は (付 17) 式に示す連立方程式の残差ベクトル、 J は (付 18) 式のヤコビ行列である。

α が大きい場合には相対的に毎回の修正量が大きいため、非線形性および不等式制約条件の影響によって時折残差が大きくなることがあるが、全体的には収束は良好である。 α が小さい場合には、あまり非線形性の影響も受けず、振動的にもならず収束する。実行可能性に関する重みパラ

Table 2. Resultant output pattern in case of $A = 0.3$.

time [min]	Unit 1		Unit 2		Unit 3	
	[MW]	[MW/min]	[MW]	[MW/min]	[MW]	[MW/min]
~49	278.75		233.60		387.64	
		0.25		-0.49		0.25
50	279.00		233.11		387.89	
		1.50 ~ 3.00		-3.00		0 ~ 1.50
60	296.93		203.11		399.96	
		-6.85		-3.00		-0.95
61	290.08		200.11		399.01	
		3.15 ~ 3.89		-3.00		-3.91 ~ -4.65
110	100.03		53.11		206.86	
		0.0		-0.09 ~ -1.00		-1.00 ~ -1.91
114	100.03		50.03		201.94	
		-0.03		-0.03		-1.94
115	100		50		200	
		0.03		0.03		1.94
116	100.03		50.03		201.94	
		0.0		0.09 ~ 1.00		1.00 ~ 1.91
120	100.03		53.11		206.86	
		3.15 ~ 3.89		3.00		3.91 ~ 4.65
169	290.08		200.11		399.01	
		6.85		3.00		0.95
170	296.93		203.11		399.96	
		-3.00 ~ -1.50		3.00		0 ~ -1.50
180	279.00		233.11		387.89	
		-0.25		0.49		-0.25
181 ~	278.75		233.60		387.64	

Table 3. Total generation cost for various A.

A	0.0	0.1	0.3	1.0
Total cost	1.000	1.018	1.034	1.038
Figure	7	10(a)	10(b)	10(c)

*cost is normalized by the case of $A=0.0$

Fig. 11. Convergence at $t = 116 \text{ min}$.

メータ A の値が違っていても収束性にはほとんど影響せず、ほぼ同様の結果となった。

この傾向は求解する時間の全範囲でほぼ同様であったが、〈4.2〉節で述べた需給不均衡が生じる時間領域では悪化した。ここで解こうとする連立方程式は需給バランスに関する等式を含んでいるが、この条件を満たしつつ目的関数を最小化する解が存在しないためである。 $A = 0.0$ の場合は〈4.2〉節で述べたように反復収束計算が成功せず、強引に求めた近似解 (Fig. 7) にも Fig. 8 のように需給アンバラ

Fig. 12. Convergence at $t = 170$ min.

Fig. 13. Effect of initial value setting.

ンスが生じていた。これはここで解こうとした連立方程式が制約範囲内に解が持たなかったためである。Fig. 12 上部は、 $t = 170$ min における反復収束計算過程で連立方程式の残差平方和がどのように動いているかを示している。収束する様子が見られないが、同図下部に示すように $A = 0.3$ の場合には良好に収束していることが分かる。

〈4・4〉初期点出力変化率の設定の検討 本手法は (7) 式の微分方程式を (11) 式に示すように離散化して数値積分するものであり、初期条件が解に影響を与える。〈4・2〉節以降の計算結果は初期点の出力変化率を全てゼロと置いて得たものである。〈2・3〉節で述べたように P_i に関する初期値は条件から確定するが Q_i (出力変化率) の初期値は不確定であり、数値積分を行う都合上設定したものであるため、これをどのように設定するかが解に影響を及ぼさないか確認する必要がある。初期点の影響を調べるので前節 Fig. 11 と同様に $t = 116$ min に注目した。

この結果を Fig. 13 に示す。図でケース 1 とは、これまで行ってきたように

$$Q(t_0) = \frac{dP}{dt} \Big|_{t=t_0} \dots\dots\dots (18)$$

をゼロとした場合の収束状況であり、ケース 2 は前段である静的経済負荷配分結果を用いて、

$$Q(t_0) = P(t_0) - P(t_0 - \Delta t) \dots\dots\dots (19)$$

とした場合である。ここで検討している数値例では $t =$

Table 4. Final value of Eq. (16) for the both cases (Check result of the natural boundary condition).

	Unit 1	Unit 2	Unit 3
Case 1	-5.68×10^{-17}	-4.26×10^{-17}	5.68×10^{-17}
Case 2	-6.01×10^{-16}	-8.53×10^{-17}	-3.41×10^{-16}

115 min を境に需要が減少から増加に転じているので求解対象の時間範囲ではユニット出力が増加する方向となるべきであるにもかかわらず、ケース 2 では初期時点の出力変化率が負であるため収束に必要な反復回数が増している。しかし収束特性はケース 1 とあまりかわらず、ほぼ同様にスムーズに収束している。求められた出力の値を両ケースで比較すると、その相違は最大でも 1.0×10^{-5} MW 未満であり、最も小さい場合でも考察時間範囲である 230 分の間に発電出力は 200 MW 程度変化していることを考えれば、初期点での出力変化率 Q 値の設定による影響は非常に小さく無視できるレベルであった。以上より、初期点の出力変化率の設定は提案法の数値解法としての性能に大きな影響を及ぼさないことが分かった。

なお、終点が満足すべき自然境界条件 (16) 式左辺値についても調べた。この結果を Table 4 に示すが、〈3・3〉節で予想したとおりゼロとなっていることが確認される。これは〈2・2〉節最後に述べた前提によるものである。論文冒頭にも述べたとおり変動電源の増大等の趨勢を考えると、今後必ずしもこの前提が常に成り立つものとは考えられない。このようなケースでも終点での自然境界条件を満足させるには、提案法を拡張する必要があるが、これは今後の課題とする。

5. 結 論

本論文では火力発電機の出力変化率制約を考慮する動的経済負荷配分計算手法を提案した。提案法は出力上下限と変化率制約を対数関数形のペナルティ関数として目的関数に入れ込むもので、こうして得られる新しい目的関数を等式制約を考慮して最小化する。ただし最小化において、予め想定した時間範囲の積分値を扱うことによって変分法として定式化し、Euler の微分方程式を数値的に解くことで最適な負荷配分を求める。

提案法では従来法に比べてより一層の実行可能解の求解性を向上するために、各発電機の出力可能範囲の中央からの逸脱量に関する 2 次関数形のペナルティを導入した。その重みを調節することで特に厳しい需要変化が見込まれる場合の求解性能を高めた。

提案法を、これまでたびたび用いられてきた変化率の高い厳しい需要想定パターンに適用した。その結果、実行可能解を算出することができ、有効性が確認された。

今後は規模の大きな問題に適用した場合の求解性能等について検討を行いたい。

(平成 21 年 6 月 11 日受付, 平成 21 年 8 月 14 日再受付)

文 献

- (1) T. Inoue: "MW Response of Thermal Power Plant from Viewpoint of Power System Frequency Control", *IEEE Trans. PE*, Vol.124, No.3, pp.343-346 (2004-3) (in Japanese)
井上俊雄:「電力システムの周波数制御から見た火力機の出力応動特性」, 電学論 B, **124**, 3, pp.343-346 (2004-3)
- (2) H. Isoda: "On-line Load Dispatching Method Considering Load Variation and Response Capability of Thermal Units", *IEEE Trans. PAS*, Vol.PAS-100, No.8, pp.2925-2930 (1982)
- (3) N. Yorino, Y. Zoka, Y. Sasaki, and A. Sudo: "Dynamic Generation Dispatching Method for AGC for the System with a large amount of Unpredictable DG generation", 2009 National Convention Record IEE Japan, No.6-038 (2009) (in Japanese)
餘利野直人・造賀芳文・佐々木豊・須藤 文:「変動電源を含む系統の需給バランス調整に適したダイナミック負荷配分法」, 平成 21 年電気学会全国大会, No.6-038 (2009)
- (4) Y. Kitauchi, N. Yorino, and Y. Tamura: "The On-line ELD Method with High Feasibility of Dispatching for Thermal Units", *T. IEE Japan*, Vol.107-B, No.3, pp.131-138 (1987-3) (in Japanese)
北内義弘・餘利野直人・田村康男:「Feasibility の高いオンライン火力機経済負荷配分法」, 電学論 B, **107**, 3, pp.131-138 (1987-3)
- (5) Y. Fukuyama and Y. Ueki: "An application of artificial neural network to dynamic economic load dispatching", Proc. of the First International Forum on Applications of Neural Networks to Power Systems, pp.261-265 (1991)
- (6) R. Naresh, J. Dubey, and J. Sharma: "Two-phase neural network based modelling framework of constrained economic load dispatch", *IEE Proc. Generation, Transmission & Distribution*, Vol.151, No.3, pp.373-378 (2004)
- (7) Z. Guo-Li, L. Hai-Yan, and L. Geng-Yin: "Dynamic economic load dispatch using hybrid genetic algorithm and the method of fuzzy number ranking", Proc. of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Vol.4, pp.2472-2477 (2005)
- (8) Z.Y. Miao, K. Yasuda, and R. Yokoyama: "Fuzzy dynamic load dispatching", 1991 International Conference on Advances in Power System Control, Operation and Management, pp.311-315 (1991)
- (9) N. Yorino, Y. Fukuyama, and Y. Tamura: "A Time-suboptimal Method for Online ELD with Generation Rate Constraints", *T. IEE Japan*, Vol.108-B, No.4, pp.141-148 (1988-4) (in Japanese)
餘利野直人・福山良和・田村康男:「変化率制約を考慮した ELD 問題のオンライン時間準最適化法の提案」, 電学論 B, **108**, 4, pp.141-148 (1988-4)
- (10) K. Asano and T. Kumano: "Dynamic Economic Load Dispatch by Calculus of Variation Considering Ramp Rate", Proc. of the 8th International Power Engineering Conference—IPEC2007, Session TuP-2, Singapore (2007)
- (11) Y. Fukuyama, N. Yorino, and Y. Tamura: "On-line ELD Scheme of 2-Level Structure for Coal Fired Units with Operating Constraints and Man-Machine Interface Taken Into Account", *T. IEE Japan*, Vol.107-B, No.4, pp.173-180 (1987-4) (in Japanese)
福山良和・餘利野直人・田村康男:「火力ユニットの諸制約とマン・マシン・インタフェースを考慮した階層型オンライン ELD」, 電学論 B, **107**, 4, pp.173-180 (1987-4)
- (12) 林 毅・村外志夫: 変分法, コロナ社 (1983)
- (13) 寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論, 岩波書店 (1954)
- (14) 川崎英文: 極値問題, 横浜図書 (2004)

付 録

1. 変 分 法

本論文では動的経済負荷配分を条件付き変分問題として定式化し, 本文(11)式に示す Euler の微分方程式を解くことによって関数最適化を行っている。付録 1 では参考文献(12)の記述を参考に Euler の微分方程式を解くことによって条件付き変分問題が解ける理由を説明し, 提案法の理論的基盤を与える。

(1) 付帯条件付き変分問題と最適解の条件 本論文で提案した手法はここで述べる付帯条件付き変分問題の一例である。付帯条件付き変分問題には種々の形のものがあるが, 提案法を含む一般的な形で, よく知られている定式

化について述べる。

関数 $y(x)$, $z(x)$ に対して境界条件

$$y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1, z(x_0) = z_0, z(x_1) = z_1 \quad \dots\dots\dots (付 1)$$

が成り立ち, y と z の間に束縛条件

$$G(x, y, z, y', z') = 0 \quad \dots\dots\dots (付 2)$$

が成立すると仮定する。この場合に汎関数

$$I[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y, z, y', z'] dx \quad \dots\dots\dots (付 3)$$

を極値とするために (停留関数であるために) 必要かつ十分な条件は, 同じ境界条件の元で

$$\hat{I}[y, z] = \int_{x_0}^{x_1} [F + \lambda(x)G] dx \quad \dots\dots\dots (付 4)$$

を極値とすることである (λ はラグランジュ乗数であり, x の関数である)。これは

$$\hat{F} = F + \lambda G \quad \dots\dots\dots (付 5)$$

に対して次の Euler の微分方程式が成立することである。

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial z'} \right) = 0, \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial \lambda} = 0 \quad \dots\dots\dots (付 6)$$

(2) 最適解条件の導出 上で述べた (付 6) 式の条件を導出する。ここで考えているのは関数 $y(x)$ と $z(x)$ の最適化であるから, いかなる関数 $\eta(x)$ および $\zeta(x)$ を用いて $y(x)$ と $z(x)$ を

$$y'(x) = y(x) + \alpha \eta(x), z'(x) = z(x) + \alpha \zeta(x) \quad \dots\dots (付 7)$$

と変更しても α にかかわらず (付 4) 式の積分が変化しないという条件である。ただし, ここで考えている条件では (付 1) 式に示したように $y(x)$ と $z(x)$ は考察区間の両端で固定値をとる必要があるので

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0, \zeta(x_0) = \zeta(x_1) = 0 \quad \dots\dots\dots (付 8)$$

なる条件が成り立つべきである。

さて, (付 4) 式の積分を実際に計算してみると y と z が変化することによる I の変化 δI は

$$\begin{aligned} \delta I = & \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \dot{\eta} + \frac{\partial F}{\partial z} \zeta + \frac{\partial F}{\partial z'} \dot{\zeta} \right] dx \\ & + \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial (\lambda G)}{\partial y} \eta + \frac{\partial (\lambda G)}{\partial y'} \dot{\eta} + \frac{\partial (\lambda G)}{\partial z} \zeta + \frac{\partial (\lambda G)}{\partial z'} \dot{\zeta} \right] dx \quad \dots\dots\dots (付 9) \end{aligned}$$

となる。右辺第一項の積分 (F に関する積分) で被積分関数第 2 項および第 4 項と右辺第二項の積分 (λG に関する積分) で被積分関数第 2 項および第 4 項にそれぞれ部分積分を適用すると

$$\begin{aligned}
\delta I = & \alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \eta \Big|_{x_0}^{x_1} - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx \\
& + \alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \zeta \Big|_{x_0}^{x_1} - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right) \zeta dx \\
& + \alpha \frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{y}} \eta \Big|_{x_0}^{x_1} - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx \\
& + \alpha \frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{z}} \zeta \Big|_{x_0}^{x_1} - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{z}} \right) \zeta dx \\
& + \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial z} \zeta + \frac{\partial(\lambda G)}{\partial y} \eta + \frac{\partial(\lambda G)}{\partial z} \zeta \right] dx \\
& \dots\dots\dots (\text{付 } 10)
\end{aligned}$$

ここで (付 8) 式の条件を考慮すると上式は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
\delta I = & -\alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right) \zeta dx \\
& - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{y}} \right) \eta dx - \alpha \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{z}} \right) \zeta dx \\
& + \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial z} \zeta + \frac{\partial(\lambda G)}{\partial y} \eta + \frac{\partial(\lambda G)}{\partial z} \zeta \right] dx \\
& \dots\dots\dots (\text{付 } 11)
\end{aligned}$$

得られた (付 11) 式はいかなる η , ζ に関してもゼロでなければならないので

$$\begin{cases}
\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial(\lambda G)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \\
\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{\partial(\lambda G)}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(\lambda G)}{\partial \dot{z}} \right) = 0
\end{cases}
\dots\dots\dots (\text{付 } 12)$$

でなければならない。これらと付帯条件 (付 2) を合わせて書いたものが既出 (付 6) 式である。

(3) 自然境界条件の場合 上で述べたのは境界点 (端点) x_0 , x_1 においてともに (付 1) 式の固定境界条件が成り立つ場合である。しかし本文で述べたケースでは考察領域の始点と終点では個々の発電機出力について明確に固定値とすべき理由はない。このような場合には自然境界条件

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \dot{y}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{F}}{\partial \dot{z}} = 0 \dots\dots\dots (\text{付 } 13)$$

が成り立つことが要求される。これは (2) 項の導出において (付 10) 式を (付 11) 式のように書き直すところで

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \eta \Big|_{x_0}^{x_1}$$

等の項をゼロとするために必要である。Euler の微分方程式は前項と同じ形となる。

(4) まとめ 上で述べたことより, (付 3) 式に示す積分を (付 2) 式の付帯条件の元で最小化する関数最適化を行うには, 境界の性質に応じて固定境界条件 (付 1) あるいは自然境界条件 (付 13) の元で (付 6) 式の Euler の微分方程式を解けばよいことが分かる。ここで述べた理論の詳細については文献 (12)~(14) 等を参照されたい。

2. 提案法で取り扱う微分方程式

提案法で解いている Euler の微分方程式 (本文 (11) 式) の具体的な形を以下に記す。発電機 i に対して

$$\begin{aligned}
& b_i + 2c_i P_i + w'_{i3}(P_i) + w'_{i4}(P_i) + 2A(P_i - P_{im}) \\
& - 2c_i \dot{P}_i - dw_{i1}(\dot{P}_i) - dw_{i2}(\dot{P}_i) + \lambda = 0 \dots\dots (\text{付 } 14)
\end{aligned}$$

であり, $i = 1, \dots, NG$ に関して同様の式が成り立つ。二重傍点は時間変数による二階微分を意味し, ペナルティ関数項 w'_{i3} , w'_{i4} , dw_{i1} , dw_{i2} の具体的な内容は以下のとおりである。

$$\begin{cases}
dw_{i1}(\dot{P}_i) = \begin{cases} 0 & (\dot{P}_i \leq \dot{P}_{i1o}) \\ \frac{\ddot{P}_i}{(\dot{P}_i - \dot{P}_{imax})^2} & (\dot{P}_i > \dot{P}_{i1o}) \end{cases} \\
dw_{i2}(\dot{P}_i) = \begin{cases} 0 & (\dot{P}_i \geq \dot{P}_{i2o}) \\ \frac{\ddot{P}_i}{(\dot{P}_i - \dot{P}_{imin})^2} & (\dot{P}_i < \dot{P}_{i2o}) \end{cases} \\
w'_{i3}(P_i) = \begin{cases} 0 & (P_i \leq P_{i1o}) \\ -\frac{1}{P_i - P_{imax}} - \frac{1}{P_{imax} - P_{i1o}} & (P_i > P_{i1o}) \end{cases} \\
w'_{i4}(P_i) = \begin{cases} 0 & (P_i \geq P_{i2o}) \\ -\frac{1}{P_i - P_{imin}} - \frac{1}{P_{imin} - P_{i2o}} & (P_i < P_{i2o}) \end{cases}
\end{cases}
\dots\dots\dots (\text{付 } 15)$$

関数 $w'_{i3}(P_i)$ 等における「'」(ダッシュ記号) は発電機出力 P_i による微分を意味し, 関数 dw_{i1} 等における d は時間変数による微分の意味で用いている。この方程式を時間 t で積分すれば任意時点での各発電機の出力値を得る。

この微分方程式は二階の非線形方程式であり, 未知数の数を n とすれば, n 個の状態変数に関する値を二点で与えるか, あるいはこれらの変数値と微分係数の両者を一点で与えることで解くことができる。

変分法によれば, この問題は本来二点での関数値あるいは状態変数の微分係数に関する偏微分値を与えることによって解く必要があるが, これは数値的に解くのが難しいため, 本論文ではこれを一点において変数値と微分係数の両者を与えることで解く。

3. Newton 法による求解の具体的内容

提案法で行う Newton 法による求解の際に解いている方程式の具体的な形を以下に記す。まず, 解く方程式は, 発電機 $i = 1, 2, \dots, NG$ に関して (付 14), (付 15) 式と本文 (14) 式が成り立つので次のようになる。解析対象時間範囲中の任意の時刻 t に関して $P_1(t - \Delta t), \dots, P_{NG}(t - \Delta t)$ および $Q_1(t - \Delta t), \dots, Q_{NG}(t - \Delta t)$ は既知であり, 総需要 $P_L(t)$ も与えられているとしているので, これらを用いて $P_1(t), P_2(t), \dots, P_{NG}(t)$ と $Q_1(t), Q_2(t), \dots, Q_{NG}(t)$ ならびに $\lambda(t)$ の値を求めることを考える。

$$\left. \begin{aligned} & b_1 + 2c_1 P_1 + w'_{13}(P_1) + w'_{14}(P_1) + 2A(P_1 - P_{1m}) \\ & \quad - 2c_1 \dot{Q}_1 - dw_{11}(Q_1) - dw_{12}(Q_1) + \lambda = 0 \\ & \dot{P}_1 - Q_1 = 0 \\ & \dots \\ & b_{NG} + 2c_{NG} P_{NG} + w'_{NG3}(P_{NG}) + w'_{NG4}(P_{NG}) \\ & \quad + 2A(P_{NG} - P_{NGm}) - 2c_{NG} \dot{Q}_{NG} - dw_{NG1}(Q_{NG}) \\ & \quad - dw_{NG2}(Q_{NG}) + \lambda = 0 \\ & \dot{P}_{NG} - Q_{NG} = 0 \\ & P_1 + P_2 + \dots + P_{NG} = P_L(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{付 16})$$

つまり

$$\left. \begin{aligned} & b_1 + 2c_1 P_1(t) + w'_{13}(P_1(t)) + w'_{14}(P_1(t)) \\ & \quad + 2A(P_1(t) - P_{1m}) - 2c_1 \frac{Q_1(t) - Q_1(t - \Delta t)}{\Delta t} \\ & \quad - dw_{11}(Q_1(t)) - dw_{12}(Q_1(t)) + \lambda(t) = g_1 = 0 \\ & \frac{P_1(t) - P_1(t - \Delta t)}{\Delta t} - Q_1(t) = g_2 = 0 \\ & \dots \\ & b_{NG} + 2c_{NG} P_{NG}(t) + w'_{NG3}(P_{NG}(t)) + w'_{NG4}(P_{NG}(t)) \\ & \quad + 2A(P_{NG}(t) - P_{NGm}) \\ & \quad - 2c_{NG} \frac{Q_{NG}(t) - Q_{NG}(t - \Delta t)}{\Delta t} - dw_{NG1}(Q_{NG}(t)) \\ & \quad - dw_{NG2}(Q_{NG}(t)) + \lambda(t) = g_{NG-2} = 0 \\ & \frac{P_{NG}(t) - P_{NG}(t - \Delta t)}{\Delta t} - Q_{NG}(t) = g_{NG-1} = 0 \\ & P_1(t) + P_2(t) + \dots + P_{NG}(t) - P_L(t) = g_{NG} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{付 17})$$

未知数の数と方程式の数は共に $2NG + 1$ 本であるので、原理的にはこれは解けると期待される。実際に解こうとする場合問題になるのは w'_{i3} , w'_{i4} , dw_{i1} , dw_{i2} が非線形である点であるが、Newton 法を用いて次に示す修正量に関する方程式を用いて反復収束計算を行えばよい。

$$\left[\begin{array}{ccccc} J_{1,1} & J_{1,2} & \dots & J_{1,2NG} & J_{1,2NG+1} \\ J_{2,1} & J_{2,2} & \dots & J_{2,2NG} & J_{2,2NG+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ J_{2NG,1} & J_{2NG,2} & & J_{2NG,2NG} & J_{2NG,2NG+1} \\ J_{2NG+1,1} & J_{2NG+1,2} & \dots & J_{2NG+1,2NG} & J_{2NG+1,2NG+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta P_1(t) \\ \Delta Q_1(t) \\ \vdots \\ \Delta Q_{NG}(t) \\ \Delta \lambda(t) \end{array} \right] = [\Delta g_1 \quad \Delta g_2 \quad \dots \quad \Delta g_{NG-1} \quad \Delta g_{NG}]^T \dots\dots\dots (\text{付 18})$$

ただしヤコビ行列の要素は次に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} J_{1,1} &= 2c_1 + \frac{d}{dP_1} w'_{13} + \frac{d}{dP_1} w'_{14} + 2A \\ J_{1,2} &= -\frac{2c_1}{\Delta t} - \frac{d}{dQ_1} dw_{11} - \frac{d}{dQ_1} dw_{12} \\ J_{1,3} &= 0 \\ &\vdots \\ J_{1,2NG} &= 0 \\ J_{1,2NG+1} &= 1.0 \\ J_{2,1} &= \frac{1}{\Delta t} \\ J_{2,2} &= -1.0 \\ J_{2,3} &= 0 \\ &\vdots \\ J_{2,2NG+1} &= 0 \\ &\vdots \\ J_{NG,1} &= J_{NG,3} = \dots = J_{NG,2NG-1} = 1 \\ J_{NG,2} &= J_{NG,4} = \dots = J_{NG,2NG} = J_{NG,2NG+1} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{付 19})$$

熊 野 照 久 (上級会員) 1963 年 2 月 4 日生。1990 年 3 月東京大学大学院博士課程修了。工学博士。同年 4 月(財)電力中央研究所入所。2004 年 11 月明治大学助教授。2003 年電気学術振興賞(論文賞)受賞。電力系統と電力用大型回転機の解析・運用・制御の研究に従事。電子情報通信学会, IEEE, ISAL 会員。