等価電流による3次元静磁界の計算とその応用

正 員 佐 藤 忠 (日 立)
正 員 乾 芳 彰 (日 立)

1. ま え が き

変圧器、発電機、磁石などの磁界を利用した機器を設計するうえで、これらの機器に発生する磁界を正確に求めることが重要な課題の一つとなっている。

これらの機器の磁界を求めるために、従来は2次元あるいは軸対称な構造で近似した2次元的な解法が主として用いられ、計算で仮定している2次元的な構造が適用できる範囲では、計算精度も良く、完成された技術になってきている。しかし、上記の機器は、厳密には巻線、コア、シールド、タンクなどで構成された3次元構造をしており、2次元あるいは軸対称な構造で近似する解法には本質的な限界がある。

3次元磁界のなかでも、うず電流の影響を無視した静磁界の問題に限定して考えても2次元的な解法で行なわれている方法を延長してスカラーポテンシャルあるいはベクトルポテンシャルに関する微分方程式を境界値問題として離散化し解を得る方法では、未知数の数が次元のべき乗で増加するので、現在の大形計算機でも計算速度、記憶容量の点で、適用できる問題が限定されるものと予想される⁽¹⁾。その対策として、未知数の数が、磁性体のみを考慮することで解を得ることができる積分方程式を解く方法が Trowbridge 氏、Newman 氏ら⁽²⁾により開発され、GFUN プログラムとして公開されている。

Trowbridge 氏らの方法は、磁化ベクトルを磁荷に置換え、磁荷が作るスカラーポテンシャルのこう配で磁界の強さを求めている。中村氏ら⁽³⁾は、磁荷を磁性体の表面に限定して解く表面磁荷法を開発し、外鉄形変圧器の巻線内部に生じる磁界を計算している。

Karmaker 氏ら⁽⁴⁾は、磁化ベクトルからベクトルポテンシャルを求め、磁束密度の解を得ている。遠藤氏

の解説⁽⁵⁾によると、磁化ベクトルからベクトルポテンシャルを求める方法は、コイルが鉄に近づくとき収束しなくなり、最近では研究されていないとして紹介されている。

本論文は、Karmaker 氏による方法を更に一步進めたもので、同氏の磁化ベクトルに関する積分方程式を直接離散化する方法のかわりに、磁化ベクトルが一定の直方体要素の集合で磁性体を近似し、磁化ベクトルに等価な電流が作るベクトルポテンシャルの回転で磁束密度を求める積分形解法（等価電流法と呼ぶ事にする）を提案している。

本論文では、具体的な応用として、リアクトルの計算例を示すとともに、永久磁石への応用についても述べた。

2. 記号説明

SI 単位系を使用した。わかりにくい記号については使用した場所で説明した。

$\mathbf{J}$: 磁化ベクトル(T), $\mathbf{B}$: 磁束密度(T), $\mathbf{B}_c$: 磁性体の影響を無視した状態の磁束密度(T), $\mathbf{r}$: 相対位置を示すベクトル(m), $\mathbf{A}'$: 磁化ベクトル $\mathbf{J}$ によるベクトルポテンシャル(Wb/m), $\mathbf{n}$: 表面に垂直な方向の単位ベクトル(m), $\mathbf{A}$: 電流によるベクトルポテンシャル(Wb/m), $\mathbf{i}$: 電流密度(A/m²), $\mathbf{i}'$: 等価体積電流密度(A/m²), $\mathbf{k}'$: 等価表面電流密度(A/m), $\mathbf{r}_{ip}$: 点 i と点 p の相対位置を示すベクトル(m), $\mathbf{J}_0$: 永久磁化(T), ν_r : 比透磁率の逆数, V : 磁性体の体積積分領域(m³), r : $\mathbf{r}$ の長さ(m), μ : 透磁率(H/m), μ_0 : 真空の透磁率(H/m), S : 磁性体表面積分領域(m²), $P(u, v, w)$: 点 p の座標(m), $B_x(P), B_y(P), B_z(P)$: 点 p の磁束密度の各成分(T), J_x, J_y, J_z : $\mathbf{J}$ の各成分(T), a, b, c : 直方体要素の各辺の半分の長さ(m), $\mathbf{r}_{ip}$: 点 i と点 p の距離(m), x_{ip}, y_{ip}, z_{ip} : $\mathbf{r}_{ip}$ の各成分(m).

3. 等価電流法

〈3・1〉 基本計算式⁽⁴⁾ 磁性体を磁化ベクトル $\mathbf{J}$

Three Dimensional Static Magnetic Field Calculation by Equivalent Current of Magnetization Vector and Its Applications. By Tadashi Sato, Member & Yoshiaki Inui, Member (Hitachi Research Laboratory, Hitachi Ltd)

佐藤 忠: 正員, 日立製作所日立研究所第24(研)

乾 芳彰: 正員, 日立製作所日立研究所第2部

の集合と考えると、 $\mathbf{J}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の関係は周知のように次の(1)式で表現される。

$$\mathbf{J} = (1 - \nu_r) \mathbf{B} \dots\dots\dots (1)$$

うず電流を無視すると、任意の点の磁束密度は、次の(2)式で表わすことができる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_c + \frac{1}{4\pi} \int_V \text{rot} \left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) dV \dots\dots\dots (2)$$

ここで、右辺の第1項 $\mathbf{B}_c$ は、巻線などに流れる電流によって作られ、磁性体の影響を無視した状態における磁束密度を示している。ここでは、この右辺第1項を、Biot-Savart の式で容易に求めることができるので、既知量として扱う。右辺第2項は、磁性体の磁化ベクトルが任意の点に作る磁束密度の値である。

(1)式と(2)式より $\mathbf{B}$ を消去して(3)の基本計算式を得る。

$$\mathbf{J} - \frac{1 - \nu_r}{4\pi} \int_V \text{rot} \left(\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) dV = (1 - \nu_r) \mathbf{B}_c \dots\dots\dots (3)$$

未知数 $\mathbf{J}$ に関する(3)の積分方程式を解くことにより $\mathbf{J}$ を求め、(2)式より任意の場所の磁束密度を求めることができる。

〈3・2〉 数値解を得るためのモデル (3)式の $\mathbf{J}$ を未知数、 $\mathbf{B}_c$ を既知として直接離散化する方法が、Karmaker 氏より提案されている⁽⁴⁾。

しかし、筆者らの経験では、同氏の方法は離散化する過程における dV のとり方により、得られる数値解が大きく変り、数値計算のためのモデルとしては不適当であることがわかった。

(3)式を直接離散化する方法の代りに次のような離散化を行なった。

(i) 磁性体を直方体の集合で近似する。

(ii) 各1個の直方体では直方体の全体積にわたって $\mathbf{J}$ が一定である(直方体が違えば、 $\mathbf{J}$ は違った値を持つことができる)。

すなわち、1個の直方体は無限個の同一磁化ベクトルの集りと仮定している。(ii)の仮定により、 $\mathbf{J}$ の一定な直方体を作る磁束密度を解析的に求めることができる。

〈3・3〉 等価電流法による数値解析の具体的な方法

基本計算式である(3)式の左辺第2項の積分を行なうために磁化ベクトル $\mathbf{J}$ に対する物理的なイメージを利用する。任意の磁化ベクトル $\mathbf{J}$ による磁界のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'$ は(4)式で表わされる⁽⁶⁾。

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{r})}{r^3} dV \dots\dots\dots (4)$$

(4)式をベクトルの公式⁽⁶⁾に従って変形すると、次の(5)式を得る。

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \mathbf{J}}{r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{n})}{r} dS \dots\dots\dots (5)$$

電流密度 $\mathbf{i}$ による磁界のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が(6)式となるので、

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}}{r} dV \dots\dots\dots (6)$$

(5)式、(6)式を比較すると、磁化ベクトル $\mathbf{J}$ に等価な電流として、次の(7)、(8)式で表わされる体積電流密度 $\mathbf{i}'$ および表面電流密度 $\mathbf{k}'$ が得られる。

$$\mathbf{i}' = (\text{rot} \mathbf{J}) / \mu_0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{J} \times \mathbf{n}) / \mu_0 \dots\dots\dots (8)$$

〈3・2〉節で磁性体を直方体の集合で近似し、各直方体の $\mathbf{J}$ はおのおの一定であると仮定したので、 $\text{rot} \mathbf{J}$ が零すなわち体積電流密度は零となり、等価表面電流密度 $(\mathbf{J} \times \mathbf{n}) / \mu_0$ による磁束密度のみ考慮すればよい。従って、 $\mathbf{J}$ が一定の1個の直方体により作られる磁束密度は、表面のみの6面に流れる表面電流によるもので考えればよい。

第1図は任意の磁性体を直方体の集合で近似したときの1個の直方体を取り出して示したものである。この直方体の磁化ベクトル $\mathbf{J}$ に等価な表面電流は $(\mathbf{J} \times \mathbf{n}) / \mu_0$ で表わされ、 $\mathbf{J}$ の x, y, z の各方向に対応して、第1図に示すような電流が考えられる。

直方体の表面は6面あるが、任意の一つの面により作られる磁界の式を得れば、他の面による式も容易に類推できるので、第1図(c)に示す面が任意の点に作

第1図 磁化ベクトルが一定の直方体要素に等価な電流のモデル

Fig. 1. Constant magnetization vector of rectangular [right prism element and its equivalent current model.

る磁界の式を解析的に求めることにする。第1図より任意の点 $P(u, v, w)$ に作る磁界の強さは、Biot-Savart の式より、次の(9)~(11)式を得る。

$$4\pi B_x(P) = J_z \int_{-c}^{+c} \int_{-b}^{+b} \frac{w-z}{r^3} dy dz + J_y \int_{-c}^{+c} \int_{-b}^{+b} \frac{v-y}{r^3} dy dz \dots (9)$$

$$4\pi B_y(P) = -J_z \int_{-c}^{+c} \int_{-b}^{+b} \frac{u-a}{r^3} dy dz \dots (10)$$

$$4\pi B_z(P) = -J_x \int_{-c}^{+c} \int_{-b}^{+b} \frac{u-a}{r^3} dy dz \dots (11)$$

それぞれに定積分を行なう。

$$4\pi B_x(P) = J_z \cdot F(u, w, v, a, c, b) + J_y \cdot F(u, v, w, a, b, c) \dots (12)$$

$$4\pi B_y(P) = J_y \cdot G(u, v, w, a, b, c) \dots (13)$$

$$4\pi B_z(P) = J_z \cdot G(u, v, w, a, b, c) \dots (14)$$

但し、

$$F(u, v, w, a, b, c) = \sum_{i=1}^4 (-1)^i \ln(r_{ip} - z_{ip}) \dots (15)$$

$$G(u, v, w, a, b, c) = -\text{Sign}(x_{ip}) \cdot |G'| \dots (16)$$

ここで、 $\text{Sign}(x) \equiv \begin{cases} 1.0 (x \geq 0) \\ -1.0 (x < 0) \end{cases}$ とする。

$$G' = 2\pi - \left| \sum_{i=1}^4 \tan^{-1} \frac{x_{ip} \cdot r_{ip}}{y_{ip} \cdot z_{ip}} \right| (|v| < b, |w| < c)$$

$$= \sum_{i=1}^4 \tan^{-1} \frac{x_{ip} \cdot r_{ip}}{y_{ip} \cdot z_{ip}} \quad (\text{上記以外})$$

第2図に等価電流法による解析の過程をまとめて図示した。磁性体を直方体の集りとし、その各々の直方体の J を未知数として(3)式を離散化する。このとき、(3)式の第2項が結局(12)~(14)式で表現できることから、離散化したときの(3)式の左辺に相当するマトリックスの係数は F と G の関数で計算する。実際には、第2図中に示すマトリックスの係数は、直方体要素できまる u, v, w, a, b, c の値を用いて、 F と G の値を数値的に求め、計算機プログラム内で重畳することにより求めている。

4. 軸対称な計算モデルの有限要素法による解との比較

等価電流による3次元静磁界の計算結果の妥当性を調べるために、第3図に示す軸対称な磁界の有限要素法による解と、第4図に示す3次元のモデルによる計算結果を比較検討した。有限要素法における要素分割と境界条件は第5図に示した。等価電流の計算モデルの要素分割は第6図に示した。有限要素法においても第4図に示すような3次元磁界の解析が可能であるが一般的ではないため、第3図に示す軸対称な磁界を計算モデルとして選んだ。

第3図、第4図で説明しているように、励磁電流としては同じものを考えた。磁性体としては、有限要素法では直径が 100 mm と 113 mm の2種類を考慮し

第2図 等価電流法による3次元静磁界計算の手順

Fig. 2. Procedures for 3-D static magnetic field calculation with equivalent current model.

第3図 有限要素法で使用了計算モデル
(軸対称場)

Fig. 3. Calculation model for finite element method (axi-symmetric field).

第4図 等価電流法で使用了計算モデル
(3次元場)

Fig. 4. Calculation model for equivalent current model method (three-dimensional field).

た。3次元の計算モデルとしては、100 mm の立方体磁性体を使用した。計算値を比較した場所は第3図、第4図に示すように電流源と磁性体の中間の位置とした。第3図の直径が 100 mm の円柱磁性体は、第4図の立方体に内接しており、磁性体としての影響は小さくなる。これに対し、直径 113 mm の円柱磁性体は立方体と体積が同じで、比較している場所に 6.5 mm 磁性体の境界が近ずいており、第4図の立方体より磁性体の影響が大きく、磁性体を作る磁界も大きくなるものと予想される。

第7図は第3図と第4図の計算モデルの結果をまとめたもので、等価電流による3次元静磁界計算の解が軸対称な上記2個の解(図の実線と破線)の間にきており、計算結果が妥当であることがわかる。

第5図 有限要素法で使用了要素の分割
と境界条件

Fig. 5. Element arrangement and boundary condition for finite element method.

第6図 等価電流法で使用了要素の分割

Fig. 6. Element arrangement for equivalent current model method.

5. 磁気シールドつき空芯リアクトルへの応用⁽⁸⁾

測定および計算に使用したリアクトルの構造と、計算に使用した直方体要素を第8図に示す。図でリアクトルは xyz の3方向に対称性があるので、未知数としての要素の数は、磁気シールドを要素で分割したときの全要素数の $(1/2)^3 = 1/8$ である。測定に際しては、直流および交流で励磁し、磁束密度の測定にそれぞれホール素子によるガウスメータとさぐりコイルを使用した。測定値は交流による値を示したが、直流による測定結果とも3%以下の差で一致していた。

上部の磁気シールドおよび脚部の磁気シールドを流

第7図 有限要素法による計算値と等価電流法による計算値の比較

Fig. 7. Comparison of calculated values by the finite element method and equivalent current model method.

れる総磁束量の分布の測定と計算の結果を第9図に示す。磁気シールドの表面に垂直に入射する方向の磁束密度の結果を第10図に示す。第11図にタンク相当面の空間の磁束密度の測定と計算の結果を示す。

第9図および第11図から、磁気シールド中およびタンク相当面における計算では、分布および値が測定値とよく一致しており、良い結果が得られることがわかった。

第8図 磁気シールドつき空芯リアクトルと計算に用いた直方体要素

Fig. 8. Air-core reactor with magnetic shield and rectangular right prism elements for calculation.

第9図 空芯リアクトルの磁気シールド中の全磁束量の分布

Fig. 9. Distribution of total magnetic flux amount in magnetic shield of air-core reactor.

磁気シールド表面で、特に上下の磁気シールドと脚部の磁気シールドの接合部分近傍では空間の磁束密度が複雑に変化しており、計算精度もこの部分では悪い。

なお、第11図では測定位置とコイル中心軸を含む断面での軸対称近似による計算結果〔計算手法については論文(7)参照〕も示したが、第8図に示すような磁気シールドの閉ループになっている影響が、軸対称系などの2次元的な解法では表現できないため、今回の3次元計算や測定値と大きな差が生ずる。

6. 永久磁石への応用

(3)式を非線形の磁性体に適用するときは、 μ_r が J に依存して変化するので、 μ_r の繰返し修正により解を得る方法と、電流源の電流をステップ状に増加させる方法の2種類が代表的であると考えられる。ヒステリシス現象を利用している永久磁石では後者の方法が磁化の過程を忠実に模擬できる点で適している。

第 10 図 空心リアクトルの磁気シールド表面の磁束密度の分布

Fig. 10. Distribution of flux densities at surfaces of magnetic shield of air-core reactor.

第 11 図 空心リアクトルのタンク相当面における空間の磁束密度の分布

Fig. 11. Distribution of flux densities in air at supposed surface of air-core reactor tank.

永久磁石においては、他のより容易な解析方法として、(3)式における磁化ベクトルを永久磁化と誘導磁化 $J_0^{(9)}$ と J^* に分離し、 J_0 を既知量として J^* について解く方法があるので、以下に説明する。

〈6・1〉 永久磁石の基本式 永久磁化を J_0 とすると、 B^* , J^* , μ^* , χ^* を次の(17), (18)式で定義する。

$$B^* \equiv B - J_0 \equiv \mu^* H \quad (17)$$

$$J^* \equiv J - J_0 \equiv \chi^* H \quad (18)$$

(17), (18)式から(19)式を得る。

$$J^* = (1 - \nu_r^*) B^* \quad (19)$$

但し、 $\nu_r^* \equiv \chi^* / \mu^*$

(2), (17), (19)式から B^* を消去して、基本計算式である(20)式を得る。

$$J^* - \frac{1 - \nu_r^*}{4\pi} \int_V \text{rot} \left(\frac{J^* \times r}{r^3} \right) dV \\ = (1 - \nu_r^*) (B_c - J_0)$$

総磁束量：磁束計*による測定値 26.6 k Maxwell
計算値 $z=0.0$ の B_z 平均値 0.67 T
 $0.67 \times 10^4 \times 0.8 \times 5 = 26.8 \text{ k Maxwell}$

*：さぐりコイルに誘起される電圧を積分する。
**：F.W. Bell 社 640 形ガウスメータで測定。

第 12 図 希土類磁石の磁束密度分布の計算例

Fig. 12. Calculated example of flux density distribution by rare earth permanent magnet.

$$+\frac{1-\nu_r^*}{4\pi}\int_V \text{rot}\left(\frac{\mathbf{J}_0 \times \mathbf{r}}{r^3}\right) dV \dots\dots (20)$$

$\mathbf{J}^*$ を誘起磁化と呼ぶことにすると、(3)式の右辺に更に永久磁化 $\mathbf{J}_0$ による磁束密度の項が付加されている。従って、電流源がない状態でも $\mathbf{J}^*$ が零でない値になりうる。また $\mathbf{J}_0$ を零とすると、(20)式は(3)式に一致する。

フェライト磁石などの焼結磁石は、磁化が外部磁界によりほとんど影響を受けない一定の値を示すので、(20)式の $\mathbf{J}^*$ が零となり、 $\mathbf{J}_0$ で各部の磁束密度を求めることになり、非常に簡便な計算に帰するため、リードリレー、回転機、マグネトロン、磁気カプラー、選別機など多方面の応用が考えられる。

また $\mathbf{J}^*$ が無視できない例でも、 ν_r^* を一定とする線形方程式で近似的に解ける磁石が多い。

〈6・2〉 永久磁石の計算例 Co-Sm 系の磁石について、計算した結果と測定値の比較を第12図に示す。Co-Sm 系の磁石は ν_r^* が ≈ 1.0 で、(20)式における $\mathbf{J}^*$ は零となっている。これは永久磁石の3次元静磁界としては、最も容易な例で、第2図における未知数 $\mathbf{J}_i$ が既知 $\mathbf{J}_0$ となり、密行列 $\mathbf{M}$ に関する連立方程式を解く必要はない。従って、実際の応用に際して必要となる数100個を越えるような永久磁石が作る磁界の計算も容易にできる。

7. む す び

3次元静磁界の積分解法の一つとして、直方体要素の磁化ベクトルに等価な電流の作る磁界の解析解を求めることを基本とした新しい解法を等価電流法として提案した。

等価電流法の具体的な応用として、磁気シールドつき空心リアクトルについて計算を行ない、実用的な計算が可能であることを示した。

更に、永久磁石の磁界の計算について述べ、特に焼結磁石について簡便な計算になることを説明した。

3次元静磁界の積分解法の最も有利な分野の一つは焼結磁石などを中心とした永久磁石の磁界計算であり、今後この方面への発展が期待される。

最後に、本研究を行なうにあたって終始ご指導を賜った日立製作所国分工場 森山副工場長、磯部副技師長、奥山副技師長、ならびに日立研究所 加子技術主幹 に対して深く謝意を表するとともに、測定および計算データを得る上で協力していただいた黒沢 巴、鈴木安昭の両氏に深謝するものである。

(昭和53年10月31日受付)

文 献

- (1) C.W. Trowbridge: "Progress in Magnet Design By Computer", *Proc. 4th Int. Conf. Magnet Tech.* (1972)
- (2) M.J. Newman & C.W. Trowbridge: "An Interactive Program as an Aid to Magnet Design" *ibid*
- (3) 中村・野村・岩本:「変圧器漏れ磁界の3次元解析」電学誌 96, 443 (昭51-9)
- (4) H.C. Karmaker & S. Robertson: "Integral Equation Formulation For the Solution of Magnetic Field Problems" *IEEE Power Eng. Soc. Winter Meeting Paper No. T 72-036-7* (1972)
- (5) 遠藤:「電算機による3次元磁場の計算」日本物理学会誌 30, 5 (昭50)
- (6) 例えば、竹山: 電磁気学現象理論 259 (昭39) 丸善
- (7) 佐藤、他:「磁性体の非線形特性と電流の影響を考慮した磁界の計算」電学誌 96, 399 (昭51-8)
- (8) 佐藤・黒沢・乾:「3次元静磁界の計算と応用」昭52電気学会東京支大 No. 182
- (9) 例えば、竹山: 電磁気学現象理論 295 (昭39) 丸善