UDC 621.311.16.016.352

論文

55-B45

新しい固有値解法による 電力系統の動的定態安定度解析

正員 内田 直之 (電力中研)

1. はじめに

電力系統の動的定態安定度は各種運用方式の決定に際して基本的かつ重要な検討課題であり、その解析には高い精度が要求される。しかしながら、解析対象系統の大規模化とモデルの詳細化に伴い、系統の動特性を表現する微分方程式が極めて高次のものとなるため、従来の固有値法 (QR 法)、周波数応答法、直接数値積分法などの動的定態安定度解析手法では^{(1)~(3)}、記憶容量、計算時間、計算精度の面からみて解析対象系統の大きさに限界がきている。

筆者はさきに、行列のすべての固有値と固有ベクトルを求める手法として広く用いられている QR 法によって、大規模な系統の動的定態安定度解析を行ない、その計算性能を明らかにした⁽⁴⁾。その結果、QR 法による動的定態安定度解析は極めて精度が高く、発電機数が 50 機程度までは十分実用性があり、系統運用計画面での利用価値も高いことが判明した。しかしながら記憶容量によって解析系統の大きさが限定されることがわかった。

更に大規模な系統を解析するためには、行列のスパース性、規則性などを利用し、少い記憶容量で高速かつ高精度に固有値を求める手法が必要である。そのために今回開発した新しい手法は、行列の変換によって元の行列の固有値のうち最も実部が大きい固有値 (最も減衰の悪い動揺モード) を新しい行列の絶対値最大の固有値に置換した後、ベキ乗法などによる効率的な固有値解析を行なう手法である。この行列変換によって作られる行列を Stability 行列 (S 行列)、この手法を S 行列法と呼ぶこととする。

本論文は S 行列法の理論的根拠を示し、簡単なモデル系統の解析によってその有効性を明らかにしたものである。

2. 動的定態安定度の基本方程式

〈2.1〉 電力系統構成要素のモデル化⁽¹⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾

電力系統を構成する各要素は潮流計算によって得られる運転点からの微小変動量に対して、次のような線形方程式で表現できる。

(1) 発電機 発電機は第 1 図に示すように、Park の基本方程式、回転子の運動方程式、AVR、カバナの伝達関数および系統基準 (R-J) 座標と Park (D-Q) 座標との座標変換式によって表わすことができる。発電機 n の端子でみた電圧電流の関係は状態変数ベクトル X_{Gn} を用い (1) 式で表わされる。

$$\begin{cases} \Delta \dot{X}_{Gn} = A_{Gn} \Delta X_{Gn} + B_{Gn} \Delta V_{Gn} \\ \Delta I_{Gn} = C_{Gn} \Delta X_{Gn} + D_{Gn} \Delta V_{Gn} \end{cases} \quad \dots (1)$$

但し、 $V_{Gn} = [V_{GnR}, V_{GnJ}]^T$, $I_{Gn} = [I_{GnR}, I_{GnJ}]^T$

(2) 送電網回路方程式 送電網は系統基準座標に対して、アドミタンス方程式 (2) で表現する。

$$I = YV \dots \dots \dots (2)$$

(3) 負荷 負荷特性としては電圧の指数特性

$$P_L \propto |V_L|^\alpha, Q_L \propto |V_L|^\beta \dots \dots \dots (3)$$

を考える。これを線形化し、電圧電流の関係式 (4) を求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{LR} \\ \Delta I_{LJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{LRR} & J_{L RJ} \\ J_{L JR} & J_{L JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{LR} \\ \Delta V_{LJ} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

第 1 図 発電機モデルの構成

Fig. 1. Structure of generator model.

Dynamic Stability Studies of Power Systems by a New Eigenanalysis Method. By Naoyuki Uchida, Member (Central Research Institute of Electric Power Industry)
内田直之: 正員, 電力中央研究所

〈2・2〉 多機系統の線形状態微分方程式

N 機の発電機群は(1)式を用いて

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{X}}_G = A_G \Delta \mathbf{X}_G + B_G \Delta \mathbf{V}_G \\ \Delta \mathbf{I}_G = C_G \Delta \mathbf{X}_G + D_G \Delta \mathbf{V}_G \end{cases} \quad \dots\dots\dots (5)$$

のように表現できる。但し、

$$\mathbf{X}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{G1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_{GN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{G1} \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{GN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{G1} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{GN} \end{bmatrix}$$

A_G, B_G, C_G, D_G はそれぞれ $A_{Gn}, B_{Gn}, C_{Gn}, D_{Gn}$, ($n=1, \dots, N$) が対角線上に並ぶブロック対角行列である。

一方、系統の回路網方程式(2)に負荷特性(3)式を代入し、発電機端子の電圧 $\mathbf{V}_G$ 、電流 $\mathbf{I}_G$ 以外の変数を消去すれば次の(6)式が得られる。

$$\Delta \mathbf{I}_G = Y_G \Delta \mathbf{V}_G \quad \dots\dots\dots (6)$$

(5)式と(6)式から $\Delta \mathbf{I}_G, \Delta \mathbf{V}_G$ を消去すれば、状態微分方程式が得られる。

$$\Delta \dot{\mathbf{X}}_G = A \Delta \mathbf{X}_G \quad \dots\dots\dots (7)$$

但し、

$$A = A_G + B_G(Y_G - D_G)^{-1}C_G$$

3. 新しい固有値解法

線形微分方程式

$$\dot{\mathbf{X}} = A \mathbf{X} \quad \dots\dots\dots (8)$$

安定性は、次式

$$S = (A + hI)(A - hI)^{-1} \quad \dots\dots\dots (9)$$

但し、 h は正の実数、 I は単位行列

によって定まる行列 S (Stability Matrix) の絶対値の最大の固有値* λ_{Smax} の絶対値が、

$|\lambda_{Smax}| > 1$ のとき不安定

$|\lambda_{Smax}| = 1$ のとき安定限界

$|\lambda_{Smax}| < 1$ のとき安定

と判定される。

λ_{Smax} は、ベキ乗法に代表されるベクトル反復法を用いて極めて効率良く求めることができる。(付録参照)

〈3・1〉 原理 $n \times n$ の非対称実行列 A が(10)式のように対角化できるとする。

$$A = P \Lambda P^{-1} \quad \dots\dots\dots (10)$$

但し、

$$\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad P \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{P}_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は行列 A の固有値

$\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ は行列 A の固有ベクトル

このとき行列 $(A + hI)$ と $(A - hI)^{-1}$ は、それぞれ(11)式、(12)式のように対角化できる。

$$A + hI = P(\Lambda + hI)P^{-1} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$(A - hI)^{-1} = P(\Lambda - hI)^{-1}P^{-1} \quad \dots\dots\dots (12)$$

従って、(9)式によって定まる行列 S は次の(13)式で表わされる。

$$\begin{aligned} S &= \{P(\Lambda + hI)P^{-1}\} \{P(\Lambda - hI)^{-1}P^{-1}\} \\ &= P(\Lambda + hI)(\Lambda - hI)^{-1}P^{-1} \\ &= P \Lambda_S P^{-1} \quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

但し、

$$\Lambda_S \equiv \begin{bmatrix} \lambda_{S1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{Sn} \end{bmatrix}$$

$\lambda_{S1}, \lambda_{S2}, \dots$ は行列 S の固有値である。

行列 A の固有値 λ_i ($i=1, \dots, n$) と行列 S の固有値 λ_{Si} ($i=1, \dots, n$) は(14)式の関係にある。

$$\lambda_{Si} = (\lambda_i + h)/(\lambda_i - h) \quad \dots\dots\dots (14)$$

従って、行列 S の固有値を求めれば(14)式によって、ただちに行列 A の固有値を求めることができる。また、(10)式と(13)式より、行列 A と行列 S の固有ベクトルは同一であることがわかる。

更に、 $h > 0$ であることから、 λ_i の実部が負のとき $|\lambda_{Si}| < 1$ であり、 λ_i の実部が正のとき $|\lambda_{Si}| > 1$ であることがわかる。すなわち、行列 S の最大固有値の絶対値が1より大きいとき元の行列 A によって定まる線形微分方程式は不安定であり、1より小さければそれは安定である。

幾何学的には以下のように説明できる。第2図に示すように、 $\lambda, h, -h$ に対応する複素平面上の点をそれぞれ R, H_1, H_2 とする。このとき、 λ_S の絶対値は線分 RH_2 と線分 RH_1 の長さの比に等しい。

$$|\lambda_S| = |RH_2|/|RH_1| \quad \dots\dots\dots (15)$$

従って、点 R が左半平面にあるとき、 $|\lambda_S|$ は1より大きく、点 R が右半平面にあるとき $|\lambda_S|$ は1より小さい。

言いかえれば、行列 A の行列 S への変換 (S 変換) は、複素平面の左半平面を、原点に中心を持つ単位円の内部に写す写像に対応するものである。

第2図の曲線群は、次式

$$\rho = |z + h|/|z - h| \quad \dots\dots\dots (16)$$

で定まる ρ が一定となる z の軌跡を示したものである。 $\rho=0$ は $z=-h$ に、 $\rho=1.0$ は虚軸に対応し、

* 以下の文章中では絶対値最大の固有値のことを最大固有値と書くこととする。

第2図 λ と $|\lambda_s|$ の関係
Fig. 2. Relation of λ vs $|\lambda_s|$.

$0 < \rho < 1$ に対応する z の軌跡は、
中心 $-(1+\rho^2)h/(1-\rho^2), 0$
半径 $2\rho h/(1-\rho^2)$
の円になる。

〈3・2〉 例題

(1) 安定の場合

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -101 \end{bmatrix} \xrightarrow{h=90}$$

$$S = \begin{bmatrix} -0.9884 & -0.0104 \\ 1.0411 & 0.0630 \end{bmatrix}$$

A の固有値, 固有ベクトルは次のとおりである。

$$\lambda_1 = -100, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -100 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

さて, 行列 S にベキ乗法を適用してみる。出発値 $\mathbf{X}_0$ に対し, $\mathbf{X}_1 = S\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2 = S\mathbf{X}_1, \dots$ は以下のようになる。

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} -0.9884 \\ 1.0411 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 0.9662 \\ -0.9639 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -0.9450 \\ 0.9451 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 0.9242 \\ -0.9241 \end{bmatrix}$$

$\lambda_{s\max}$ と, その固有ベクトル $\mathbf{P}_{s\max}$ の近似値は,

$$\lambda_{s\max} \doteq -0.9241/0.9451 = -0.9778$$

$$\mathbf{P}_{s\max} \doteq \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.9999 \end{bmatrix} \doteq \mathbf{P}_2$$

となる。従って安定と判定することができる。

(2) 不安定の場合

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 100 & -99 \end{bmatrix} \xrightarrow{h=90}$$

$$S = \begin{bmatrix} -1.0118 & -0.0106 \\ -1.0645 & 0.0420 \end{bmatrix}$$

A の固有値, 固有ベクトルは次のとおりである。

$$\lambda_1 = -100, \quad \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -100 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) と同様にベキ乗法を適用してみる。

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -1.0584 \\ -1.0585 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} 1.0822 \\ 1.0821 \end{bmatrix}$$

従って

$$\lambda_{s\max} \doteq -1.022, \quad \mathbf{P}_{s\max} \doteq \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.9999 \end{bmatrix}$$

となり, 不安定と判定することができる。

〈3・3〉 S 行列の拡張 前節までは, (9)式によって定まる S 行列について述べたが, これを以下に述べる方法で拡張することにより, 更に計算効率の良い S 行列を作成することができる。

(1) 多重 S 行列 m 個の正の実数 $h_1, \dots, h_m$ を用いて次の(17)式によって作られる行列 S_m は, これまで述べてきた S 行列と同様に, その最大固有値を求めることにより, 行列 A の安定性の判定に用いることができる。

$$S_m = \{(A + h_1 I)(A - h_1 I)^{-1}\} \\ \times \{(A + h_2 I)(A - h_2 I)^{-1}\} \\ \dots \{(A + h_m I)(A - h_m I)^{-1}\} \dots (17)$$

これは, (17)式が次の(18)式に書き換えられることから容易にわかることである。

$$S_m = \{P(A + h_1 I)(A - h_1 I)^{-1}P^{-1}\} \\ \times \{P(A + h_2 I)(A - h_2 I)^{-1}P^{-1}\} \\ \dots \{P(A + h_m I)(A - h_m I)^{-1}P^{-1}\} \\ = P A_m P^{-1} \dots (18)$$

但し, A_m は対角行列で, その i 行 i 列目の要素すなわち S_m の固有値 λ_{smi} は次の(19)式で与えられる。

$$\lambda_{smi} = \frac{(\lambda_i + h_1)(\lambda_i + h_2) \dots (\lambda_i + h_m)}{(\lambda_i - h_1)(\lambda_i - h_2) \dots (\lambda_i - h_m)} \dots (19)$$

(2) 複素 S 行列 前節までは h を正の実数としてきたが, これを複素数に拡張することができる。この場合 S 行列は次の(20)式であらわされる。

$$S = \{A - (-h_R + jh_J)I\} \{A - (h_R + jh_J)I\}^{-1} \quad \dots\dots\dots (20)$$

但し, $j = \sqrt{-1}$, $h_R > 0$

複素平面上で、虚軸に関して対称な2点 $H_1(h_R + jh_J)$, $H_2(-h_R + jh_J)$ から点 R までの距離の比に着目すれば h が実数の場合と全く同様に考えることができる。

(3) ひずみ S 行列 ひずみ S 行列 S' は次式によって定義される。

$$S' = (A - h_1 I)(A - h_2 I)^{-1} \quad \dots\dots\dots (21)$$

但し, $h_1 < h_2$

行列 S' の固有ベクトルは行列 A のそれと同一である。また, S' の固有値 $\lambda_{S'i}$ は次式で与えられる。

$$\lambda_{S'i} = (\lambda_i - h_1)/(\lambda_i - h_2) \quad \dots\dots\dots (22)$$

虚軸を $(h_1 + h_2)/2$ だけ平行移動すれば、通常の S 行列に帰着することがわかる。

〈3・4〉 最大固有値の計算 S 行列の最大固有値を求める適切な方法としてはベクトル反復法が考えられる。ベクトル反復法は、行列の最大固有値と2番目に大きい固有値* λ_{Snext} の絶対値の比率

$$\zeta = |\lambda_{Snext}|/|\lambda_{Smax}| \quad \dots\dots\dots (23)$$

が小さいほど収束が良い。 ζ の値は、元の A 行列の固有値分布と h, h_1, h_2 などによって定まるものであり、 ζ を小さくし計算効率を良くする為にはあらかじめ A 行列の固有値の概略分布を想定して、 h, h_1, h_2 などのパラメータを適切に選定することが望ましい。電力システムの動的定態安定度解析の場合には、固有値の存在範囲もそのモデルの性質から限定されており、 h の選択が特に問題となることはない。具体的な h の決め方については〈5・2〉節で述べることにする。

4. S 行列法の動的定態安定度への適用

S 行列法による動的定態安定度解析の概細フロー図を第3図に示す。

電力システムの状態微分方程式は、系統規模が大きくなると係数行列 A のサイズが極めて大きくなり、 A 行列をそのまま用いる QR 法などの固有値解析手法は、計算機の記憶容量によって適用規模の限界が決まる。しかしながら、 S 行列による方法は以下に述べるように、行列の構造的な、スパース性を利用することができるので記憶容量を大幅に節約することができ、計算効率も良いため、大規模な系統の解析が可能である。

ベクトル反復法によって S 行列の最大固有値を求める計算は、次の(24)式の繰返し計算からなる。

第3図 S 行列法のフローチャート

Fig. 3. The flow chart of S -matrix method.

$$X_{k+1} = S X_k \quad \dots\dots\dots (24)$$

但し,

$$S = (A + hI)(A - hI)^{-1} \quad \dots\dots\dots (25)$$

(24)式の計算は、これを次のように2段階に分離し、元の構造を保存した形の(5),(6)式を用いることによって、効率的に実行することができる。

第1段階:

$$y = (A - hI)^{-1} X_k \quad \dots\dots\dots (26)$$

第2段階:

$$X_{k+1} = (A + hI)y \quad \dots\dots\dots (27)$$

(1) 第1段階 (X_k から y を求める)

(26)式は、次の(28)式に変形できる。

$$h y + X_k = A y \quad \dots\dots\dots (28)$$

ここで、 $A = A_\sigma + B_\sigma(Y_G - D_G)^{-1}C_G$ であるから、(28)式は(5),(6)式の表現を用いて

$$\begin{cases} h y + X_k = A_\sigma y + B_\sigma v & \dots\dots\dots (29) \\ u = C_G y + D_G v & \dots\dots\dots (30) \\ u = Y_G v & \dots\dots\dots (31) \end{cases}$$

と表わすことができる。未知数は y, v, u である。

(29),(30)式より y を消去し(32)式を得る。

$$u = -F X_k + G v \quad \dots\dots\dots (32)$$

但し,

$$F \equiv C_G(hI - A_\sigma)^{-1}$$

$$G \equiv C_G(hI - A_\sigma)^{-1}B_\sigma + D_G$$

(31),(32)式より u を消去し、(33)式を得る。

* λ_{Smax} が一對の共役複素根の場合は3番目に大きい固有値。

$$\mathbf{v} = (\mathbf{G} - \mathbf{Y}_G)^{-1} \mathbf{F} \mathbf{X}_k \dots\dots\dots (33)$$

(33)式によって、まず $\mathbf{v}$ を計算する。次に(29)式に $\mathbf{v}$ を代入し、(34)式によって $\mathbf{u}$ を求めることができる。

$$\mathbf{u} = (\mathbf{hI} - \mathbf{A}_G)^{-1} (-\mathbf{X}_k + \mathbf{B}_G \mathbf{v}) \dots\dots\dots (34)$$

$\mathbf{u}$ の計算のためにあらかじめ準備しておく行列は、(33)、(34)式中の $\mathbf{F}$ 、 $(\mathbf{G} - \mathbf{Y}_G)^{-1}$ 、 $\mathbf{B}_G$ 、 $(\mathbf{hI} - \mathbf{A}_G)^{-1}$ であるが、 $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{B}_G$ 、 $(\mathbf{hI} - \mathbf{A}_G)^{-1}$ はいずれもブロック対角行列であり、 $(\mathbf{G} - \mathbf{Y}_G)^{-1}$ は機間アドミタンス行列と同じサイズの行列である。従って、必要な記憶容量はきわめて少なく、計算の効率も良いといえる。

(2) 第2段階 ($\mathbf{u}$ から $\mathbf{X}_{k+1}$ を求める)

(27)式は、第1段階の(29)～(31)式と同様に、次の(35)～(36)式に変換できる。

$$\begin{cases} -\mathbf{h} \mathbf{y} + \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}_G \mathbf{y} + \mathbf{B}_G \mathbf{v} \dots\dots\dots (35) \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_G \mathbf{y} + \mathbf{D}_G \mathbf{v} \dots\dots\dots (36) \\ \mathbf{u} = \mathbf{Y}_G \mathbf{v} \dots\dots\dots (37) \end{cases}$$

第1段階において、 $\mathbf{y}$ 、 $\mathbf{v}$ は計算済みであり、 $\mathbf{X}_{k+1}$ はブロック対角行列 $\mathbf{A}_G$ 、 $\mathbf{B}_G$ を用い(35)式によって簡単に求めることができる。

5. モデル系統への適用例

本解析は、 S 行列法の理論の実証ならびに計算性能の試験を行なうことを目的としている。そのため同一モデル系統に対し、 S 行列法、 QR 法およびルンゲクッタ法による解析を行ない比較検討を行なった。基本方程式は S 行列法と QR 法では全く同一の線形微分方程式を用いており、ルンゲクッタ法では元の非線形微分方程式を用いている。以下に述べるように、3手法による解析結果は良好な合致がみられ、 S 行列法の有効性が確められた。

(5・1) モデル系統 モデル系統は、揚水機を含む3機モデル a と、5機の火力機からなるくし形系統モデル b であり、第4図に系統図、第5図に制御系ブロック図、第1表にデータ諸元を示す。

モデルで a は、高速応高利得のサイリスタ形 AVR による負制動現象の解析を行なった。そのため揚水機の AVR 利得をパラメータとし、安定ケース、不安定ケースを作成した。

モデル b は、全長約 800 km の 5 機系くし形系統のモデルであり、重潮流時における振動発散現象の解析を行なった。そのため、左端の発電機 1G の出力をパラメータとし、これに見合うように 1G の発電機容量と右端のノードの負荷を定め、左から右への潮流を変化させた。

なお、負荷はすべて定インピーダンス負荷とした。

(1) モデル系統 a

(2) モデル系統 b

第4図 モデル系統の系統図

Fig. 4. The diagram of model systems.

第1表 発電機の定数

Table 1. Constants of generators.

発電機	ケース a の 1G (火力)	ケース a の 2, 3G (揚水)	ケース b の 1 ~ 5G (火力)
MVA	1,112	105.0	1,100*
力率 (%)	89.9	95.2	90.9
変圧機 X_t (p.u.)	0.12	0.113	0.15
慣性定数 (s)	10.25	7.15	7.0
x_d (p.u.)	1.63	1.06	1.55
x_d' (p.u.)	0.277	0.298	0.25
x_d'' (p.u.)	0.198	0.226	0.2
x_q (p.u.)	1.63	0.741	1.55
x_q'' (p.u.)	0.198	0.226	0.2
T_a (s)	0.54	0.4	0.4
T_d' (s)	1.01	1.51	1.0
T_d'' (s)	0.026	0.033	0.04
T_q'' (s)	0.026	0.033	0.0345
x_l (p.u.)	0.18	0.21	0.1688
AVR	DC 標準形 火力標準形	サイリスタ形 なし	DC 標準形 火力標準形

* 但し、1G はケース b -2, b -3 では出力に比例して増加した。

5G は 2,200 MVA

ルンゲクッタ法では、微少外乱を与えるため、第4図に示す送電線 1 回線が瞬時 (0.02 s) の開放、再閉路を

第2表 計算結果
Table 2. Results of calculations.

ケース	解 析 条 件		S 行 列 法			Q R 法		ルンゲクッタ法		備 考
			$ \lambda_{s\max} $	減衰率 (1/s)	周波数 (Hz)	減衰率 (1/s)	周波数 (Hz)	減衰率 (1/s)	周波数 (Hz)	
a-1	揚水機 A V R 利得	390×1/8	0.899	-0.31	1.167	-0.406	1.171	-0.4	1.16	h=10 (1/s) 繰返し回数 200 回
a-2		×1/4	1.0263	0.099	1.157	0.099	1.157	0.1	1.16	
a-3		×1/2	1.2154	0.793	1.259	0.793	1.259	0.8	1.26	
a-4		×1	1.1716	0.738	1.479	0.738	1.479	0.8	1.47	
a-5		×1.5	0.920	-0.352	1.529	-0.403	1.543	-0.4	1.59	
a-6		×2	0.949	-0.453	2.439	-0.445	2.439	—	—	
b-1	(1G) の 出力	1,000 MW	0.955	-0.263	1.1078	-0.264	1.1083	-0.29	1.111	h=2 (1/s) 繰返し回数 300 回
b-2		2,000 MW	0.9947	-0.024	0.9754	-0.024	0.9754	-0.03	0.976	
b-3		2,200 MW	1.0153	0.067	0.9617	0.067	0.9617	0.06	0.966	

(1) サイリスタ形 AVR

α : AVR 利得倍率

(2) DC 標準形 AVR

(3) 火力標準形 ガバナ

第5図 AVR ガバナのブロック図

Fig. 5. The block diagrams of AVR and governors.

行なった。

<5.2> 解析結果と考察

(1) 直接法, QR 法との比較 第2表に S 行列法, QR 法, 直接法 (ルンゲクッタ法) の結果を示した。安定判別については各手法の結果がすべて一致している。表中の減衰率は固有値の実数部に, 周波数は固有値の虚数部に対応するものであるが, 3手法によって得られた固有値は十分な一致が見られる。なお, 直接法では動揺波形の包絡線から減衰率を概算しており, その精度はあまり高くない。また, ケース a-1, a-5 などでは S 行列法による固有値計算が十分に収束していないため, QR 法による固有値との間にわずかな差異がみられる。

(2) 固有値の収束について 第6図にケース b-1 およびケース b-3 について, S 行列法の k 回目の繰返しにおける推定固有値 $\lambda_s^{(k)} \max$ と発電機 1G の相差角 δ_{1G} の推移を示した。第7図はケース a について $\lambda_s^{(k)} \max$ の誤差の推移を示したものである。この二

第6図 $\lambda_s^{(k)} \max$ と δ_{1G} の推移Fig. 6. Transition of $\lambda_s^{(k)} \max$ and δ_{1G} .

第7図 固有値の収束状況

Fig. 7. Convergent aspects of eigenvalues.

つの図が示すように, ケース b-1, a-1, a-5, a-6, の安定ケースでは収束が悪く, ケース b-2, a-3, a-4, a-5 の不安定ケースでは収束が良い。この収束の相違は以下のような理由による。

第3章でもふれたように、ベキ乗法の計算では最大固有値と2番目に大きい固有値の絶対値の比率 $\zeta(=|\lambda_{snext}|/|\lambda_{smax}|)$ が小さいほど収束が良い。従って、本手法においては、 A 行列の固有値の分布と h から定まる S 行列の固有値の分布が収束に大きな影響を及ぼす。電力系統の安定度解析の場合には、固有値が幾つかのグループに別れ、せまい範囲に密集している場合が多い。但し、不安定な場合は、1個の実数固有値あるいは1対の互いに共役な複素固有値が右半面に存在する場合が大半であり、多数個の固有値が右半面に存在するのはまれである。従って、安定ケースでは ζ が大きく、不安定ケースでは ζ が小さいのが普通であり、収束の差異もこのために生じるのである。

(3) 安定判別について S 行列法では、最大固有値の絶対値によって安定判別ができるが、例えば第6図ケースb-1のように ζ が大きく従って固有値計算の収束が悪い場合には、計算時間が長くなることがある。このような場合でもベクトル $\mathbf{X}_k$ の推移を見れば、少い繰返し回数で簡便に安定判別を行なうことができる。

初期ベクトルに行列 S を何回も掛けると、ベクトルは振動しながら減衰あるいは増大していく。 S のすべての固有値が1より小さい場合、すなわち安定の場合には、ベクトルが減衰し、 S の固有値のうち一つでも絶対値が1より大きい場合、すなわち不安定の場合にはベクトルが増大していく。

第6図に示した発電機相角(ベクトル $\mathbf{X}_k$ の成分の一つ) δ_k の推移を見れば60回程度の繰返しで安定、不安定の判別が可能であることがわかる。

(4) h の選択について 第8図は、ケースa-4について h を50, 20, 10, 5, 2, 1(1/s)とした場合の最大

第8図 h による収束の差異

Fig. 8. Changes of convergent aspects due to h .

第3表 計算時間

Table 3. Computing time.

発電機数	計算手法	計算時間(s)	計算機	備考
25	S 法	14.4	FACOM M-180	繰返し回数 200 回 外乱後 10 秒間計算
	QR 法	622		
	直接法	132		
111	S 法	282	IBM 370-155	繰返し回数 300 回

固有値の収束状況を比較したものである。この例では、 $h=5, 10, 20$ (1/s) のとき良好な収束を示しているが、その他は収束が悪くなっている。筆者の経験によれば h は、系統の問題となる動揺モードの動揺周期 T に対し $h=2\pi/T$ 程度が適当である。これは以下の考察からも裏づけられる。

いま、 A 行列の固有値のうち問題となる固有値の虚数部 λ_I がほぼ一定で、実数部 λ_R が $-\varepsilon \leq \lambda_R \leq \varepsilon$ の範囲にあるとする。このとき、対応する $|\lambda_S|$ は次式の範囲にある。

$$f(h) \leq |\lambda_S| \leq 1/f(h)$$

但し、

$$f(h) = \sqrt{\{(\varepsilon - h)^2 + \lambda_I^2\} / \{(\varepsilon + h)^2 + \lambda_I^2\}}$$

ここで h は $f(h)$ を最小にするように決めるのが望ましい。そのような h は $f'(h)=0$ を解いて、次式で与えられる。

$$h = \sqrt{\varepsilon^2 + \lambda_I^2}$$

通常、 $\varepsilon \ll \lambda_I$ だから、 $h \approx \lambda_I (=2\pi/T)$ とすれば十分である。

(5) 記憶容量、計算時間 第3表は25機、111機の系統を解析した例である。計算時間は、QR法は発電機数 N の3乗に比例するのに対し、S法では1.2~1.5乗に比例する程度である。記憶容量の面でもS法は優れており、1Mバイトのコアサイズの計算機を使用する場合、QR法では最大20~30機程度が限界であるのに対し、最大200機までの解析が可能である。

直接法とS法の比較では、計算時間の面でS法の方が優れており、特に長周期の動揺モードの解析にはS法が適している。

6. おわりに

本論文は、電力系統の動的定態安定度解析のための新しい固有値解析手法であるS行列法を提案し、その有効性を明らかにしたものである。本手法の特徴は以下の如くである。

(1) 安定度上最も問題となる固有値を行列の変換

によって絶対値最大の固有値に変換することによりベクトル反復法による効率的な固有値解析が可能となった。

(2) 行列のスパース性や構造性を利用することができるので、記憶容量を大幅に節約でき、計算効率も高く、大規模システムの解析が可能となった。

(3) ルンゲクッタ法や周波数応答法に比べて繰り返し計算の回数が少く計算時間も短い。また、収束を速める為の各種の加速法の導入も可能である。

(4) 計算精度の面では、各繰返しにおいて誤差を推定することができるので、目的に応じて必要な精度の固有値と固有ベクトルが得られる。

本手法は、原理的に極めて優れた手法であることが明らかとなったが、今後、実測との対比、大規模実システムへの適用など実用性を高めるための検討を進めていきたい。

最後に本研究を進めるにあたり、貴重な御意見を賜った東京大学電気工学科 関根泰次教授、また、常に御指導を頂いている電力中央研究所電力技術研究所 上之園 博副所長、電力システム部 町田武彦部長、電力システム部電力回路研究室 植田清隆室長、長尾待士主査研究員、系統技術研究室 高橋一弘室長に深く感謝致します。(昭和 54 年 8 月 6 日受付)

文 献

- (1) 電気協同研究会系統安定化専門委員会：「電力系統の安定度」電気協同研究 34, 第 5 号 (昭 54-1)
- (2) 内田, 他：「固有値法による動的定常安定度解析」電力中央研究所研究報告 No. 178061 (昭 54-3)
- (3) 長尾, 他：「多機系統の固有定常安定度 (現象論と解析手法一推移行列法一)」電力中央研究所研究報告 No. 175019 (昭 50-12)
- (4) 植田, 他：「多機系統の動的解析のための新しい発電機シミュレーション手法の開発」電力中央研究所研究報告 No.

72046 (昭 47-10)

- (5) J. M. Undrill: "Dynamic Stability Calculations for an Arbitrary Number of Interconnected Synchronous Machines" *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-87, pp. 835 (1968)

付 録

ベクトル反復法

非対称実行列 T の最大固有値が実数の場合は良く知られており、ここでは一対の共役な複素数 $\lambda, \bar{\lambda}$ が最大固有値となる場合について述べる。

ベクトル反復法は次の (付 1) 式の計算が基本になっている。

$$X_{k+1} = T X_k \dots\dots\dots (付 1)$$

但し、 X_k は k 回目の反復で得られる実数のベクトル

(付 1) 式の計算を多数回繰返すと

$$\left. \begin{aligned} X_k &\doteq r(P + \bar{P}), X_{k+1} \doteq r(\lambda P + \bar{\lambda} \bar{P}) \\ X_{k+2} &\doteq r(\lambda^2 P + \bar{\lambda}^2 \bar{P}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (付 2)$$

但し $P, \bar{P}$ はそれぞれ $\lambda, \bar{\lambda}$ の固有ベクトルの関係が成立するようになり、 X_k, X_{k+1}, X_{k+2} は次のように一次従属となる。

$$\lambda \bar{\lambda} X_k - (\lambda + \bar{\lambda}) X_{k+1} + X_{k+2} \doteq 0 \dots\dots (付 3)$$

従って、 X_k, X_{k+1}, X_{k+2} が一次従属となってきたとき、その関係式

$$c X_k + b X_{k+1} + a X_{k+2} = 0 \dots\dots\dots (付 4)$$

を求め、二次方程式

$$a \lambda^2 + b \lambda + c = 0 \dots\dots\dots (付 5)$$

を解けば、その根が求める複素固有値である。