電力系統の静的状態推定における並列計算 アルゴリズムについての一研究

正 員 佐々木 博 司 (広島大)

1. 緒 言

電力系統への状態推定理論の適用は、系統のオンライン状態監視のための高精度はデータベース作成の最も有力な手法であり、既に実用化されている⁽¹⁾。状態推定とは冗長な観測値をもとにある規範を最小化する状態変数値を求めるソフトウェアであり、ハードウェア(測定装置)の精度を補強する機能がある。

電力系統の状態変数は通常“ノード電圧の大きさと位相角”であり、一方観測値はノード注入電力、線路潮流、ノード電圧であるので、観測方程式は状態変数の非線形関数となり、大次元の連立一次方程式を反復して解く問題に帰着する⁽²⁾。

大規模な電力系統にオンラインで適用するには状態推定計算を高速に実行する必要がある、標準的な重み付き最小二乗法から出発して種々の効率的アルゴリズムが検討されてきているが⁽³⁾⁽⁴⁾、この方向での効率化はほぼ限界に近づいていると考えられる。

一方、ILLIAC IV に始まるマルチプロセッサまたはアレイプロセッサを利用する並列計算アルゴリズムが各分野で活発に研究され、電力系統の分野も例外ではない⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾。更に、最近の LSI 技術の進展に伴い、高速の 32 ビットマイクロコンピュータも近々市場化されようとしており、安価なマイクロプロセッサを利用して使用目的に合致したマルチプロセッサシステムを自由自在に組み上げることのできる日もそれほど遠くないであろう。

ところで、電力潮流計算や状態推定計算のように、極度にスパース性の強い方程式に対し、CRAY-I などのスーパーコンピュータまたはアレイプロセッサを適用しても予想したほどの速度向上比が得られていない

のが実状である⁽⁸⁾。この種の計算に対しては、電力系統のノードごとあるいは、数ノードごとにプロセッサを割り付ける MIMD (Multiple-Instruction stream Multiple-Data system) 形の並列計算機がより適していると考えられる。

本研究においては、MIMD 形計算機に適した計算アルゴリズムとして、点ヤコビ法を基本とする方法を提案し⁽⁹⁾、その収束特性を左右する主要因と考えられる。

- (1) 係数行列の特性
- (2) 観測値データの選定法
- (3) 最適加速係数
- (4) 電力系統のサイズ
- (5) 並列計算モデルの精密化

の諸項目について理論的考察ならびに実規模系統への適用例を基に検討する。

一般に LU 分解に基づく直接解法は直列 (Serial) 計算アルゴリズムの中で最も強力であり、系統のサイズに依存せず 4~5 回の反復で収束する。一方、点ヤコビ法は反復回数は多くなるが、ノードの順序付けおよび係数行列の LU 分解 (通常最も計算時間を要す) が不要であること、ならびに計算の並列度が非常に高いという利点を有するので、その有効性についての究明は価値あることと思われる。

なお、状態推定においては、不良データ検出をどのように行なうかが大きな問題であるが、筆者は既に時系列を利用した、不良データ検出法を先に提案している⁽¹⁰⁾。この検出方法は、並列計算アルゴリズム向きの方法であって、的確に不良データの検出ができる。従って本研究においては、不良データの混入についての検討は行っていない。

2. 状態推定問題の定式化

電力系統の最良の状態量を推定するために選ばれた観測値は、ノード注入電力 (P_i , Q_i)、線路潮流

A Study on a Parallel Computation Algorithm in The Static State Estimation of an Electric Power System. By Hiroshi Sasaki, Member (Department of Electrical Engineering, University of Hiroshima).

佐々木博司: 正員, 広島大学工学部第二類(電気系)

(PL_{ij} , QL_{ij}) およびノード電圧 (V_i) より成り、状態量の非線形関数と観測雑音の和として与えられる。いま N ノードシステムを考え、観測値数を m 個とすれば、観測値ベクトル $\mathbf{Z}_M$ は $n=2 \cdot N^*$ 次元の状態量ベクトル $\mathbf{x}$ により次式で表わされる。

$$\mathbf{Z}_M = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{x}^T = (\delta_1, V_1, \delta_2, V_2, \dots, \delta_N, V_N) \quad \dots\dots\dots (2)$$

但し、 δ_i は第 i ノードの電圧位相角、 $\mathbf{v}$ は次元観測雑音ベクトルであり、次の性質をもつと仮定する。

$$E[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad E[\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^T] = \mathbf{R} = \text{diag}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$$

ここに、 $E\{\}$ は期待値操作を、肩字 T は行列とベクトルの転置を意味する。

電力システムの静的状態推定計算は、重み付き評価式

$$J(\mathbf{x}) = [\mathbf{Z}_M - \mathbf{f}(\mathbf{x})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{Z}_M - \mathbf{f}(\mathbf{x})] \quad \dots\dots\dots (3)$$

を最小化する $\mathbf{x}$ の値 $\hat{\mathbf{x}}$ を求める問題に帰着する。よって、 $\mathbf{x}$ の最良推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ は次式の解として得られる。

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = -2\mathbf{H}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{Z}_M - \mathbf{f}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{f}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ であり、 $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ を構成する $m \times 1$ ベクトル $\mathbf{h}_i (i=1 \sim n)$ および $1 \times n$ 行ベクトル $\mathbf{g}_i (i=1 \sim m)$ をそれぞれヤコビアン列ベクトルおよび行ベクトルと呼ぶことにする。

さて、(4)式を Newton-Raphson (N-R) 法で解くためには、 $J(\mathbf{x})$ の Hessian 行列の $1/2$ を $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})$ とおくと

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}^K)(\mathbf{x}^{K+1} - \mathbf{x}^K) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^K)\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{Z}_M - \mathbf{f}(\mathbf{x}^K)] \quad \dots\dots\dots (5)$$

を反復して解けばよい⁽¹¹⁾。但し、

$$\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x})\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m G_i(\mathbf{x})[\mathbf{Z}_{Mi} - \mathbf{f}_i(\mathbf{x})] \frac{1}{r_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

であって、 $G_i(\mathbf{x})$ は $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ の Hessian 行列である。 $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x})$ 中の $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ が無視できるとき(微小残差問題)、(5)式は

$$\mathbf{H}^T(\mathbf{x}^K)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{x}^K)(\mathbf{x}^{K+1} - \mathbf{x}^K) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x}^K)\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{Z}_M - \mathbf{f}(\mathbf{x}^K)] \quad \dots\dots\dots (7)$$

となり、最小二乗問題における正規方程式に帰着する。

ここで、 $\Delta \mathbf{x}^K \triangleq \mathbf{x}^{K+1} - \mathbf{x}^K$ において、(5)式あるいは(7)式を一般的に次のように表現する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^K)\Delta \mathbf{x}^K = \mathbf{b}(\mathbf{x}^K) \quad \dots\dots\dots (8)$$

係数行列 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は(6)式、また右辺ベクトル $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ は $\partial J(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}$ であり、 $\Delta \mathbf{x}^K \rightarrow \mathbf{0} (K \rightarrow \infty)$ となったとき、自動的に(4)式が解けたことになる。

3. 点ヤコビ法に基づく並列計算アルゴリズム

△

〈3・1〉 点ヤコビ法の定式化⁽¹²⁾ $\hat{\mathbf{x}}$ を求めるための(8)式は通常の線形方程式とは異なり、係数行列 $\mathbf{A}$ と右辺ベクトル $\mathbf{b}$ は $\mathbf{x}$ の関数でありステップ K が進むにつれ変化するが、 K を固定して考えれば線形方程式に変わりはしない。

LU 分解による直接解法を用いれば、(8)式は唯一度の前進および後退代入で解くことができるが、緒言でも述べたように、この方法は高度に直列的で並列計算に向きでない。従って、計算上の並列度の最も高い点ヤコビ法に基づく解法を検討する。

(8)式において、肩字 K はある値に固定されていると考えて省略し、 $\mathbf{y} = \Delta \mathbf{x}$ において書き直すと、

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad \dots\dots\dots (9)$$

更に、 $\mathbf{A}$ を次のように分離する。

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{F} \quad \dots\dots\dots (10)$$

但し、 $\mathbf{D}$ は $\mathbf{D} \triangleq \text{diag}\{A_{11}, A_{22}, \dots, A_{NN}\}$ なるブロック対角行列、 A_{ii} は次のような 2×2 主小行列式である。

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} a_{pp} & a_{p,p+1} \\ a_{p+1,p} & a_{p+1,p+1} \end{bmatrix} \quad p = 2 \cdot i - 1$$

(10)式の分離を利用して、(9)式を点ヤコビ法*で解いた補助的な反復ベクトル $\hat{\mathbf{y}}^{(l+1)}$ は

$$\hat{\mathbf{y}}^{(l+1)} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{y}^{(l)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad \dots\dots\dots (11)$$

よって、適当な加速係数 $0 < \alpha < \alpha_m$ を用いて

$$\mathbf{y}^{(l+1)} = \mathbf{y}^{(l)} + (1 + \alpha) \{\hat{\mathbf{y}}^{(l+1)} - \mathbf{y}^{(l)}\} = \mathbf{M}_\alpha^K \mathbf{y}^{(l)} + \mathbf{C} \quad \dots\dots\dots (12)$$

但し、

$$\mathbf{M}_\alpha^K \triangleq -\alpha \mathbf{I} + (1 + \alpha) \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{C} &\triangleq (1 + \alpha) \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

(11)、(12)式において、(8)式の K と区別するため、(9)式を解くための反復回数は (l) としている。

(12)式は収束を早めるために、加速係数を導入した点ヤコビ法である。加速係数の上限値 α_m は(13)式のヤコビ行列 $\mathbf{M}_\alpha^K$ のスペクトル半径が1以下、即ち

$$\rho(\mathbf{M}_\alpha^K) < 1 \quad \dots\dots\dots (14)$$

で抑えられる。従来通りに、(7)式の正規方程式を解

*: $\delta_i (=0)$ をダミー変数として $\mathbf{x}$ に取り入れると、理論的展開のみならずプログラミング上都合となる。

*: (11)式はノード電圧と位相角の2変数を同時に修正するので、厳密には点ヤコビ法の名称は正しくないが、各ノードの2変数をひとまとめと考えることとし、この名称を用いている。

くとすれば、係数行列 A は正規行列の特性から正定値行列となる⁽¹³⁾。このとき、 $0 < \alpha < \alpha_m < 1$ なる α の値に対し、 $M\alpha^K$ は(14)式の条件を満足し、収束行列となることが証明できる(付録参照)。

〈3.2〉 並列計算アルゴリズム 本研究で提案する並列計算アルゴリズムは、 x^K を固定して(12)式がある程度収束した段階で、 $x^K + y \rightarrow x^K$ として $A(x^K)$ 、 $b(x^K)$ を更新し、再び(12)式を解くという手順に従うもので以下のようにまとめられる。

(i) 初期推定値を x^0 とする。

〔ii〕 $x^K (K \geq 0)$ を用いて $A(x^K)$ を計算する。

〔iii〕 $x^K (K \geq 0)$ を用いて $b(x^K)$ を計算する。

〔iv〕 (12)式を反復して解き、 $\|\Delta y^{(i)}\| < \varepsilon_i$ となるかまたは反復回数 $l = l_{\max}$ になったとき次のステップへ行く。但し、 $\Delta y^{(i)} = y^{(i+1)} - y^{(i)}$

(v) $\Delta x^K = y^{(i+1)}$ とし、 $\|\Delta x^K\| < \varepsilon_K$ ならばステップ vii へ、その他のときは次へ。

(vi) $x^{K+1} = x^K + \Delta x^K$, $K+1 \rightarrow K$ とし、MOD(K , K_{up}) = 0 ならばステップ ii へ。非零のときはステップ iii へ行く。

(vii) $\hat{x} = x^K + \Delta x^K$ を最良推定値として計算を終了する。

上述のアルゴリズムにおいて注意すべき点は、(12)式の解が得られ、 K が増加するごとに右辺ベクトル $b(x^K)$ を再計算するが、係数行列は K_{up} 回ごとにしか更新しない点である。

何故ならば、 b は定義関数 (Defining function) であるから、常に更新計算する必要があるが、 A の変化は比較的緩やかであるので、計算効率の点からみても K の増加するごとに再計算することは得策でない。そして、並列計算の行なわれるのは □ で囲んだステップ (ii) ~ (iv) であるが、その方法について以下に検討する。

4. マルチプロセッサシステムによる並列計算アルゴリズムの実現

本節においては各ノードに1個のプロセッサを割り当てる方式を想定し、前節のアルゴリズムの計算上の並列度をできるだけ高める方策を検討する。このためには、ステップ (ii) ~ (iv) から明らかなように、 A 、 b の計算法と(12)式の解法を並列計算法に適合するように工夫する必要がある。その準備として、 A と b のヤコビアン行ベクトルによる定義、および(12)式の N 個の式による分割表示を与える。

〈4.1〉 A 、 b のヤコビアン行ベクトルによる定義

A および b の定義は(5)~(7)式から明らかなように、ヤコビアン行ベクトル h によるのが自然であるが、これは並列計算アルゴリズムに不適なだけでなく、SISD 形計算機による従来のアルゴリズムに適用したとしても極わめて非効率となる。

この欠点は、 A と b をヤコビアン行ベクトル g で定義することにより回避できる。(6)式と(5)式より若干の計算過程を経て次式が得られる。

$$A = \sum_{i=1}^m \left[\frac{1}{r_i} g_i^T g_i - \frac{\partial g_i^T}{\partial x} \Delta Z_i \right] \dots \dots \dots (15)$$

$$b = \sum_{i=1}^m g_i^T \Delta Z_i \dots \dots \dots (16)$$

但し、

$$\Delta Z_i = \frac{1}{r_i} [Z_{Mi} - f_i(x)] \dots \dots \dots (17)$$

$$g_i \triangleq \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} \triangleq \nabla f_i(x) \dots \dots \dots (18)$$

ここで、 g_i は第 i 観測値 Z_{Mi} に対応する観測計算式 $f_i(x)$ のこう配ベクトルであることは明らかである。上述の定義式を用いることにより、従来の逐次形計算アルゴリズムにおいてもヤコビアン行列 H を完全に作成する必要はなく、全観測値を逐次的に処理していけば、 A と b は自動的に計算されてくる。

一方、本研究で提案する並列計算アルゴリズムにおいても、 g_i による A と b の定義は各プロセッサが、 A 、 b の計算のために必要とするデータの局所性を明確に把握でき、計算上の並列度の見積りおよびマルチプロセッサのアーキテクチャの基礎となる。

〈4.2〉 マルチプロセッサによる並列解法 先に述べたように、本研究では N 個のプロセッサによる並列計算アルゴリズムについて議論しているので(12)式を N 個の式に分割表示する必要がある。

まず、(2)式の x を次のように再定義する。

$$x^T = (X_1^T, X_2^T, \dots, X_N^T); X_i^T = (\delta_i, V_i) \dots \dots \dots (19)$$

ここで、 X_i をノード i の状態変数と呼ぶ。 $1 \leq i, j \leq N$ なる $i, j (i \neq j)$ に対し、 $p = 2i - 1$, $q = 2j - 1$ とすると

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{p,q} & a_{p,q+1} \\ a_{p+1,q} & a_{p+1,q+1} \end{bmatrix} = A_{ji}^T \dots \dots \dots (20)$$

なる 2×2 行列は、 X_i と X_j に対応する A の部分行列であり、(10)式の分離においては F に含有される。

(19)式で定義した X_i に対応して、 $Y_i \triangleq \Delta X_i$ とおくと、(12)式は N 本の式に分割表示できる。

$$Y_i^{(i+1)} = -\alpha Y_i^{(i)} + (1 + \alpha) A_{ii}^{-1}$$

$$\times \sum_{j \neq i}^N A_{ij} \mathbf{Y}_j^{(1)} + (1 + \alpha) A_{ii}^{-1} \mathbf{b}_i$$

$$i = 1 \sim N, \dots (21)$$

但し、

$$\mathbf{b}_i^T = (b_p, b_{p+1}), \quad p = 2 \cdot i - 1$$

(21)式は次のように解釈できる。すなわち、第 i ノードに割り付けられたプロセッサは、 K が更新されるごとに $\mathbf{b}_i$ を、 K_{up} 回ごとに $A_{ij} (j=1 \sim N)$ を再計算した後(20)式の反復解法に移るが、2回目以降の反復においては $A_{ij} \neq 0$ なる j に対し、 $A_{ij} \mathbf{Y}_j^{(1)}$ の計算に第 j プロセッサの計算結果 $\mathbf{Y}_j^{(1)}$ を参照する必要がある。

係数行列 A のスパース性から $A_{ij} (j \neq i)$ のほとんどは零行列と考えて良いが、どの A_{ij} が非零となるかは A のトポロジー特性*から定まる。著者は既に、 A のトポロジーは、系統のトポロジー情報(接続状態を示す N ノード無向グラフ G_c^{**})と、観測値情報をトポロジー情報へ等価変換したもの*とから決定されることを明らかにした⁽¹⁴⁾。さて、 A_{ij} 中の4要素は同時に零または非零となるので、 A のトポロジーを研究するには A_{ij} をスカラーに退化させた $N \times N$ 行列で十分である⁽¹⁴⁾。そこで、 $N \times N$ の2値行列 $B = \{B_{ij}\}$ を

$$B_{ii} = 1 \quad i = 1 \sim N$$

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } A_{ij} \neq 0 \\ 0 & \text{if } A_{ij} = 0 \end{cases} \quad (i, j = 1 \sim N)$$

なる規則で A から作成する。そして、 i, j をノードに対応させ、 $B_{ij} = 1$ となるノード対 i と j を枝で結んでいくと、 A のトポロジーを表現する N ノードの無向グラフ G_B を得る。

一般に、 G_B は G_c にない枝を含むが、これはノード注入電力観測値によるもので、これを図1の例で説明する。図は部分系統の接続図(グラフ G_c)に観測値情報を書き込んだものであるが、ノード j と m において注入電力を観測している。その結果、図2の A のトポロジー特性を表わすグラフ G_B においては、点線で示した新しい枝が付加されて、ノード j と m の G_c における、隣接ノードは完全に相互結合されている。 G_c に存在していた枝 ($i-l$) が G_B においては

図1 電力系統接続図(グラフ G_c) および観測値情報の指定

Fig. 1. The connection diagram of an electric power system (Graph G_c) and specification on the measurement set.

図2 係数行列 A のトポロジー特性を示すグラフ G_B

Fig. 2. Graph G_B representing the topological property of the coefficient matrix A .

取り除かれているが、これは線路 ($i-l$) の潮流が観測されておらず、また両端ノード i と l での注入電力も観測していないからである。しかしながら、注入電力を適当に含むように、観測値セットを選定した場合、 G_c から除去される枝は G_B に付加される枝に比較してはるかに少ない。

系統のトポロジー情報と観測値情報とから、係数行列 A のトポロジーを示す無向グラフ G_B が得られると、各プロセッサが(21)式を反復して解く上で必要な情報を確保できる。

5. 並列計算アルゴリズムの収束性

緒言でも述べたように、本アルゴリズムの収束性を支配する要因として、

- (1) 係数行列の性質
- (2) 観測値データの選定法
- (3) 加速係数
- (4) 電力系統のサイズ
- (5) 計算モデルの精密化(二次項の導入)

が挙げられるが、実は(1)と(2)は密接に関係しているので一緒に論ずることにし、更に本章では、(3)と

*: $M = \{M_{ij}\}$ を $p \times p$ 対称行列とすると、 p ノードの無向グラフを考え、(行列)番号をノード番号に対応させ、 $M_{ij} \neq 0 (i \neq j)$ なるすべての要素に対し、ノード i と j を結ぶ枝を作っていくとき、この無向グラフは行列 M の非零要素の出現パターンの位相幾何学的特性を示す。このことを端的に、行列 M のトポロジー特性と呼ぶ。

***: 電力系統の母線をノードに、線路を枝にそれぞれ1対1対応させた無向グラフ G_c は、電力系統の位相幾何学的特性、つまり母線と線路との相互接続関係を表現すると同時に、系統のノードアドミタンス行列のトポロジー特性も示す。

(5)項について若干の検討を行なう。

〈5・1〉 係数行列の性質と観測値選定法との関係

反復式(12)が収束するための必要十分条件は〈3・1〉節で述べたように係数行列 A の正定値性と、 $0 \leq \alpha < \alpha_m < 1$ なる加速係数の選択である。数学的に(14)式が成り立つことは、必ずしも(12)式が数値に安定に収束することを保証するものではないが、観測値セットの選定法が行列 A の性質にどう関わってくるかを考察しておくことは重要であろう。本節では線路潮流と電圧値のみより成る観測値セット（以後“LFV セット”と呼ぶ）および注入電力、線路潮流、電圧値からなる観測値セット（“ノーマルセット”と呼ぶ）を対象として検討する。

(1) LFV セット いま、 PL_{ij}, QL_{ij}, V_i が観測値セットの中に入っていると看做する。 PL_{ij}, QL_{ij} は共に X_i, X_j のみの関数で

$$PL_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij}) - G_{ij} V_i^2 \dots \dots \dots (22)$$

$$QL_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} - B_{ij} \cos \delta_{ij}) + B_{ij} V_i^2 \dots \dots \dots (23)$$

但し、 $\dot{Y}_{ij} = G_{ij} + jB_{ij}$ は伝達アドミタンスである。ここでは、 A の性質について概略の検討を行なうことが目的なので、Hessian 行列の項 $B(x)$ を無視し、また $A = H^T R^{-1} A$ は k によって大きく変化しないので、 PL_{ij}, QL_{ij} のヤコビアンベクトルを直流法の条件 $\delta_i = 0, V_i = 1$ ($i = 1 \sim N$) で評価する。図3は、 X_i, X_j に対応する A の部分行列に対する、上述の3観測値の寄与を示したものである。同一観測地点における PL と QL は同一の PT, CT, トランスジュー

サから得るので、 $r_P \approx r_Q$ と仮定してよく、 $C \approx 0$ とみなすことができる。

従って、観測値セットが注入電力を含まないとき、 A は対称正定値でかつ $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$) となり、スティルチェス行列となる。このとき(10)式の分離に対し、 $D^{-1} \geq 0$, かつ $F \geq 0^*$ が成り立ち、(10)式は正則分離となる⁽¹²⁾。 $\alpha = 0$ に対して、(13)式のヤコビ行列は $M_0 = D^{-1}F = (A+F)^{-1}$ となり

$$\rho(D^{-1}F) = \frac{\rho(A^{-1}) \cdot \rho(F)}{1 + \rho(A^{-1}) \cdot \rho(F)} < 1 \dots \dots (24)$$

となることが証明できる⁽¹²⁾。

更に、 A について次の二通りの正則分離を行なう。

$$A = D_1 - F_1 = D_2 - F_2 \dots \dots \dots (25)$$

$F_2 \geq F_1 \geq 0$ に対して、次式が成り立つ⁽¹²⁾。

$$0 < \rho(D_1^{-1}F_1) < \rho(D_2^{-1}F_2) < 1 \dots \dots \dots (26)$$

上式は、 A がスティルチェス行列であるときはブロック分けを大きくした方が(12)式の収束がより早いことを示している。しかし、本研究の対象である並列計算アルゴリズムにおいては、分割を大きくすれば所要プロセッサの数は減少するが、逆にプロセッサ当りの計算量が増加するので、全体として収束時間が早くなるかどうかは詳しく検討する必要がある。

(2) ノーマルセット P_i, Q_i, V_i が観測値に含まれており、また説明の便宜上、ノード i の隣接ノードは j と k のみとし、かつ j と k を結ぶ線路は存在しないと仮定する。上述の観測値による A への寄与(上三角部分)を図4に示す。非対角要素で波線を下に引いた項は符号不定、 $\oplus$ とあるのは正、明示してない項は負の要素である。点線で囲んだ部分は注入電力観測によって出現する項であり、 $\delta_j - \delta_k, V_j - V_k$ に対応する要素は共に正である。

かくて、注入電力を観測値として含むとき A は単に正値対称行列という以上の性質は得られず、反復解法には余り都合な点はない。事実、数値例の項で明らかにするように、LFV セットに比較して収束までの反復回数が相当多くなる。

〈4・2〉 加速係数の選定 一般に、反復解法の収束を早めるには加速係数の導入が有効であり、(12)式はそのための式である。付録に示すように、 $-1 < \alpha < \alpha_m < 1$ である限り(13)式のヤコビ行列 M_α は収束行列となる。ガウスザイデル法では $\alpha_m = 1$ であるが、ヤコビ法においては α_m をきつ

図3 線路潮流観測値の係数行列 A への寄与

Fig. 3. The contribution of line flow measurement to the coefficient matrix A .

*: 行列 $B = \{B_{ij}\}$ に対し、 $B \geq 0$ は $B_{ij} \geq 0$ であることを意味する。また $A \geq B$ は $A - B \geq 0$ と同値である。

$r_P, r_Q, r_V: P, Q, V$ の観測雑音の分散

図 4 注入電力観測値の係数行列 A への寄与

Fig. 4. The contribution of injected power measurement to the coefficient matrix A.

ちりと指定することができない。

〈4.3〉 二次項導入による計算モデルの精密化

ヤコビ法は $\hat{x}$ を得るまでの反復回数は N-R 法とは比較にならぬほど多くなるので、二次項を導入することによって計算モデルの精密化が可能かどうか検討する価値がある。本研究では次の二方法を検討した。

方法 1……係数行列への Hessian 項の導入

静的状態推定問題は重み付最小二乗問題として定式化されるので、 $\hat{x}$ を求める式は (5) 式となり、その係数行列 $\Gamma(x)$ には (6) 式に示すように、Hessian 項が入ってくる。通常、推定計算アルゴリズムでは $B(x)$ を無視しているが、推定計算の最初の間は残差が大きいのので収束の改善に役立つことが期待される。

方法 2……残差ベクトルの二次項の導入

第 i 観測値に対応する $f_i(x)$ をテラー展開の二次項まで近似すると、先に定義した $g_i(x)$, $G_i(x)$ を使い

$$f_i(x + \Delta x) \approx f_i(x) + g_i(x) \cdot \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T G_i(x) \Delta x$$

と表現できる。ここで、右辺第 3 項を $\lambda_i(\Delta x)$ とおき

$$\lambda(\Delta x) = (\lambda_1(\Delta x), \dots, \lambda_m(\Delta x))^T$$

と定義すると、(7) 式をやや修正した形で次の二次項を考慮した反復式が得られる。

$$\begin{aligned} [H(x^k) R^{-1} H(x^k)] \Delta x^k \\ = H^T(x^k) R^{-1} [Z_M - f(x^k) - \lambda(\Delta x^{k-1})] \end{aligned} \quad (27)$$

この方法は、反復過程がかなり進んだ段階で反復式を上のように変更することで、収束特性の良くなることを期待したものである。

6. 並列計算アルゴリズムのシミュレーション結果

第 3 章で提案した並列計算アルゴリズムの有効性を

検証するため、大形計算機によるシミュレーションを行なった。IEEE 30, 57, 118 ノード系統を対象として取り上げ、各々の系統に第 5 章で述べた 2 種類の観測値セットを選定した。一方は、線路潮流と電圧観測値のみより成る LFV セット、他方はほぼ半数のノードの注入電力を観測値として含むノーマルセットであり、この選定により注入電力観測値の影響を具体的に検討することができる。また、観測値数は各系統とも冗長度が約 2 となるように選んだ。

〈3.2〉節で提案した並列アルゴリズムの適用に当たって、加速係数 α 、(12) 式の最大反復回数 $l_{\max}$ および ε_i , A の更新間隔、収束基準 ε_K などの諸パラメータの決定が必要である。このため、初期のテストランを多数回行なった結果、これらのパラメータは概略次のように決定すればよいことが判明した。

(i) 加速係数 α は 0.6~0.7 が適切である。

(ii) $l_{\max}$ は k の増加と共に、40→30→20→15→10 と漸次減少させる。また、 ε_i も k の増加と共に 10^{-4} → 10^{-5} となるように漸減させる。

(iii) A の更新計算は $K_{up}=4\sim 6$ 回が適当である。

(iv) k の小さい間は、 A の $\delta_i - V_j$ ($i, j=1\sim N$) に対応する要素を零とおく、つまり A をデカップルして、 δ と V を独立に解く方が収束が早い。

(v) 収束判定基準は $\varepsilon_K=10^{-4}$ で十分である。

表 1 は上述の初期シミュレーションの結果選定したパラメータ値の基に、各系統に対し並列計算アルゴリズムの適用結果をまとめたものである。表中の総反復回数は (12) 式を解いた全回数を示しており、また推定精度は次式で定義するものを用いた。

$$R_\delta^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta_{it})^2, \quad R_V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{V}_i - V_{it})^2$$

但し、 δ_{it} , V_{it} は真値を意味する。表中の推定並列計

表 1 シミュレーション結果のまとめ
Table 1. The summary of the simulation results.

試験系統		30 ノード		57 ノード		118 ノード	
観測値セット		LFV	Normal	LFV	Normal	LFV	Normal
観測値数 m		120	120	212	212	448	448
[IN*, LF**]		[0, 112]	[34, 78]	[0, 204]	[50, 130]	[0, 430]	[100, 290]
総反復回数		115	151	251	452	262	710
k の更新回数		14	16	13	35	53	70
推定精度	位相角 [pu]	0.0018	0.0020	0.0022	0.0025	0.00012	0.0019
	電圧 [pu]	0.0019	0.0011	0.0018	0.0016	0.0016	0.0032
実行時間 [s]	T_{Jf}^{*3}	0.0468	0.0700	0.0700	0.2283	0.5704	0.8769
	T_{Ab}^{*4}	0.0598	0.0889	0.0942	0.3719	1.0098	1.2276
	T_{SOL}^{*5}	0.1473	0.2295	0.5794	1.2254	1.3514	4.0850
	T_{SUM}	0.2539	0.3884	0.7435	1.8254	2.9414	5.4003
推定並列計算時間 $T_P = T_{SUM} \cdot 1/2$ [s]		0.0169	0.0258	0.0261	0.0640	0.0496	0.0915
直接法計算時間 T_d [s]		0.0756	0.0984	0.2510	0.1510	0.3856	0.6741
推定実行時間比 T_P/T_d [%]		22.4	26.3	10.4	42.4	12.9	13.6

*1: 注入電力観測値数, *2: 線路潮流観測値数, *3: $f(x)$ と g の計算時間, *4: A と b の計算時間, *5: (12) 式の実復解の時間
使用計算機: 広大総合情報処理センター M-180 H

算時間 T_P は

$$T_P = T_{SUM}(K/N) \quad K=2$$

としているが、 $K=2$ としたのは CPU のデータ伝送やブロードカースティングによるオーバーヘッドを見込んだものである。以下に本表の結果について考察を加えることにする。

〈6・1〉観測値セットの選定による影響 〈5・1〉節で述べたように、LFV セットに対して係数行列は近似的にスティルチェス行列とみなすことができるので本論文で提案するような反復解法にとって極めて好都合であり、事実、総反復回数はノーマルセットに比較してはるかに少ない。更に〈4・2〉節で述べたように、LFV セットに対しては A 中の非零要素数も少いので計算は一層高速となる。

また、収束の精度からみても、LFV セットの方がノーマルセットより総じて良好であることがわかる。

従って、並列計算アルゴリズムに対しても文献(3)のように LFV セットが有効と考えられる。

〈6・2〉加速係数の選定 加速係数の最適値を求めるべく種々シミュレーションをしてみた。もちろん最適値は系統により、また観測値セットにより異なっているが、本研究で対象とした各ケースに共通な上限値は $\alpha_m=0.7$ であった。 $\alpha=0.6$ としても総反復回数は余り大きく変わらないので、反復解法の数値的安定性からみて $\alpha=0.6$ とした方がよいと思われる。

〈6・3〉並列計算による速度向上比 直接法によって状態推定値を求める計算は一般に潮流計算よりも時間がかかる。表 1 の最下行は並列解法による速度向

上比を示したものであり、特に 118 ノード系に対しては直接法の約 13% 程度の時間で並列計算が実行できると推定される。

〈6・4〉二次項の導入の効果 表 1 から判るように、注入電力観測値を含むノーマルセットに対しては、系統のサイズに比例して総反復回数が増加している。このため、〈5・3〉節で提案した二次項導入の効果を、特に 57 ノード系について詳しく検討した。本章の最初で述べたように、 A は最初デカップリングして解いた方が収束が早い、繰り返しがある程度進行した段階では正確な A を用いた方が解法式がより厳密になる。従って、この点も含めて検討した。

表 2 はこれらの比較結果をまとめたものであり、ケース 1 は基準状態(表 1 と同一)である。なお所要計算時間はほぼ総反復回数に比例するので載せていない。

ケース 2 は $K \geq 13$ 以降、 A を正確なものに戻しているが、総反復回数は 25 回減少しており、この方法の有効性がみられる。

ケース 3 は、 $K \leq 15$ まで A に Hessian 項を入れ、また $K \geq 13$ 以降上のケース同様に A を正確にしているが、殆んど Hessian 項導入の効果はみられない。Hessian 項のみを導入すると、総反復回数は却って増加するが、これは A の正定値性が損われるのが原因と考えられる。

ケース 4 は、 $K \geq 4$ 以降右辺ベクトルに二次項を入れ、 $K \geq 13$ 以降 A を同様に正確にしている。この組合せが最も有効であり、総反復回数が 401 回へ減少している。

表 2 二次項導入の効果
Table 2. The effect of introduction of quadrature terms.

	方 法	総反復回数 k の更新回数	推定精度 位相角 [pu] 電 圧 [pu]
ケース 1	A: デカップリング (基準状態)	452 35	0.0025 0.0016
ケース 2	$K \geq 13$: A: 正確	427 34	0.0025 0.0016
ケース 3	$K \geq 13$: A: 正確 $K \leq 15$: 二次項(方法 1)	453 44	0.0025 0.0016
ケース 4	$K \geq 13$: A: 正確 $K \geq 4$: 二次項(方法 2)	401 30	0.0025 0.0016

7. 結 言

本論文においては、オンライン適用を主目的とする状態推定計算の高速化の有力な方法として、マルチプロセッサシステムによる並列計算アルゴリズムの可能性を検討した。対象とした解法は計算上の並列度の最も高いと考えられる点ヤコビ法であり、状態推定計算に現われる正規方程式はその係数行列が正定値であることから、対象としたシステムに対してすべて推定計算は収束した。更に、並列計算法を高速に収束させるためには、線路潮流と電圧観測値のみを対象とすることが望ましいことを理論的に解明し、また数値例で立証した。

本研究の成果は、将来のマルチプロセッサシステムに適した推定アルゴリズム開発の基本となるものと期待している。また、近い将来状態推定計算専用のマルチプロセッサシステムが構成されることになれば、真に State Estimator と呼ぶにふさわしいものとなる。

末尾ながら、本研究の可能性について御示唆戴いた早稲田大学岩本伸一助教授に感謝の意を表します。なお、計算は広島大学総合情報処理センターの M-180 を使用した。

(昭和 57 年 1 月 4 日受付, 同 57 年 8 月 30 日再受付)

文 献

- (1) E. Handschin: "Theoretical and practical considerations in the design of state estimators for electric power systems", *Computerized Operation of Power Systems*, p. 104, Elsevier Publishing Company (1971)
- (2) R.E. Larson: "State estimation in power systems, Part I & II", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* **PAS-89**, p. 345 (1970)
- (3) J.F. Dopazo: "State calculation of power systems from line flow measurements", *ibid.*, **PAS-89**, p. 1698 (1970)
- (4) A. Garcia: "Fast decoupled state estimation and bad data processing", *ibid.*, **PAS-89**, p. 1645 (1979)
- (5) F.L. Alvarado: "Parallel solution of transient problems by trapezoidal integration", *ibid.*, **PAS-89**, p. 1080 (1979)

- (6) W.L. Hatcher: "A feasibility study for the solution of transient stability problems by multiprocessor structures", *ibid.*, **PAS-96**, p. 1789 (1978)
- (7) J. Fong: "Parallel Processing of Power system analysis problems via simple parallel microcomputer structures", *ibid.*, **PAS-97**, p. 1834 (1978)
- (8) H.H. Happ: "Future computer technology for large power system simulation", *Automatica*, **15**, p. 622 (1979)
- (9) 佐々木: 「電力系統の状態推定における並列計算アルゴリズムについて」電気学会電力技術研究会 PE-81-38 (1981)
- (10) 佐々木, 他: 「電力系統の状態推定における不良データ検出法」電学論 B **98**, 846 (昭 53-10)
- (11) P.E. Gill & W. Murray: "Algorithms for the solution of the nonlinear least-squares problem", *SIAM J. Numer. Anal.* **15**, No. 5 (Oct, 1978)
- (12) R.S. Varga: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall Inc. (1962)
- (13) J.K. Reid: *Large Sparse Sets of Linear Equations*, (1971) Academic Press
- (14) 佐々木: 「電力系統の状態推定アルゴリズムの効率化に関する考察」電気学会情報処理研究会 IP-80-33 (昭 55)

付 録

(13) 式に示すヤコビ行列 M_a の固有値を λ , これに対応する固有ベクトルを x とすると,

$$[-\alpha I + (1+\alpha)D^{-1}F]x = \lambda x$$

$$\therefore (1+\alpha)Ax = (1+\lambda)Dx$$

上式に x^T を左乗して

$$(1+\alpha)x^T A x = (1+\lambda)x^T D x \quad \dots\dots (付 1)$$

A, D は共に正定値であるから, $\alpha > -1$ に対して

$$\lambda < 1 \quad \dots\dots (付 2)$$

上式は A が正定値であれば必ず成り立つ。

一方, M_a を書き換えると,

$$M_a = -\alpha I + (1+\alpha)(I+G)^{-1}G$$

ここで, $G = A^{-1}F$. G の固有値 τ に対応する固有ベクトルを y とすると,

$$Gy = \tau y \quad \therefore (I+G)^{-1}Gy = \tau/(1+\tau)y$$

この結果より, 次式が得られる。

$$M_a y = \lambda y = \tau - \alpha / (1 + \tau) y$$

$$\therefore \lambda = \frac{\tau - \alpha}{1 + \tau} \quad \dots\dots (付 3)$$

即ち, G の固有ベクトルは, また M_a の固有ベクトルでもあり, 両者の固有値は(付 3)式で関係づけられる。 M_a が収束行列であるための必要十分条件は $|\lambda| < 1$ であり, (付 3)式より $\lambda > -1$ なる条件を求める

$$\alpha < 2\tau + 1 \quad \dots\dots (付 4)$$

一般に, A が対称正定値というだけでは, $G = A^{-1}F$ の固有値の存在範囲は定まらない。従って, M_a が収束行列であるための α の範囲は $-1 < \alpha < \alpha_m < 1$ となるが, $\alpha \leq 0$ は減速係数となり実用上除外して,

$$0 < \alpha < \alpha_m < 1 \quad \dots\dots (付 5)$$