UDC 621.311.1.016.352

論文

58-B 80

電力系統における潮流多根問題の一解法

正員 石丸 勝之 (北海道大)

正員 西谷 健一 (北海道大)

正員 長谷川 淳 (北海道大)

正員 藤原 一 (北海道大)

1. ま え が き

電力系統の計画や運用に際し、系統内各母線の電圧や各線路潮流の分布を知る目的で潮流計算が実施されるが、この基礎となる電力潮流方程式の非線形性から、同一のノード指定条件に対して複数個の解が存在し得る^{(1)~(3)}。これは『潮流多根問題』と呼ばれ、複数個の潮流解を求める計算法についても各方面で研究され、種々報告されてきている^{(4)~(8)}。

潮流多根問題への一つのアプローチとしては、複数個存在し得る潮流解のうち実運用可能な解のみを得ることを主眼とし、例えば文献(3)などで議論されているように、そのための初期値選定法を確立するという方向がある。これに対し、潮流解の安定性を明確に論ずることを目的として、複数個の潮流解をその解の性質の指標となるモードと関連させて求めようとするアプローチ^{(4)~(8)}もある。

筆者らは、電力安定性と電圧安定性とを包括した統一的な安定度理論の構築を最終目標とした研究に着手しており、その過程で、指定されたモードの潮流解を得ること、および場合によっては、モードと明確に対応させて全ての潮流解を得ること、が必要となった。本論文はこの目的のために開発した潮流多根計算法について述べたものであり、どちらかといえば後者のアプローチに属している。

本論文で提案する潮流多根計算法は、連立高次代数方程式の全根を求めるための Garcia & Zangwill 法⁽⁹⁾ (概要は付録Ⅰに略述する)を潮流計算に修正適

用したものである。その基本概念は、複数個の既知解を持つ方程式を徐々に潮流方程式へ変形しながら、その解を追跡すれば、最終的に当初の既知解に対応した潮流解が得られるというものである。本論文においては、この考え方に基づく定式化とモードの定義を行なった後二つのアルゴリズムを提案している。第1の方法は、指定されたモードの潮流解を1個ずつ求める手法(アルゴリズムⅠ)であり、複数個の解を得たい場合にはモードの指定を変更して繰返しこのアルゴリズムを適用することになる。第2の方法は、全ての潮流解を求める必要がある場合に有効な方法で、文献(10)で提案された考え方を本手法に応用したものである(アルゴリズムⅡ)。アルゴリズムⅡでは2個の解を対にして追跡することになり、潮流解が2個ずつ求められることになる。

本論文で提案する手法は、(1)モードと明確に対応させた初期値の選定が極めて容易で、そのための特別な計算は不要である(従来方法⁽²⁾⁽⁵⁾⁽⁶⁾では初期値選定のための特別な計算を必要としている)、(2)潮流解を得るために別の既知潮流解を必要としていない。(3)理論的には、収束の過程で解の基本的性質が変ることはないので、収束解の性質の一端をあらかじめ予想できる。(4)計算負担が比較的軽い、などの特色を有している。

2. 電力潮流方程式の定式化

n 母線系統における第 k 母線に対する電力潮流方程式は、直角座標系を用いて次式で与えられる。

$$P_k = e_k \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m) + f_k \sum_{m=1}^n (B_{km} e_m + G_{km} f_m) \quad \dots\dots (1)$$

$$Q_k = -e_k \sum_{m=1}^n (B_{km} e_m + G_{km} f_m)$$

A Method to Find Multi-Solutions of Load Flow in Electric Power Systems. By Katsuyuki Ishimaru, Member, Ken-ichi Nishiya, Member, Jun Hasegawa, Member & Hajime Fujiwara, Member (Faculty of Engineering, Hokkaido University). 石丸勝之: 正員, 北海道大学工学部電気工学科 (現在, 北海道電力株式会社)

西谷健一: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

長谷川 淳: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

藤原 一: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

$$+f_k \sum_{m=1}^n (G_{km} e_m - B_{km} f_m) \dots\dots (2)$$

$$|\dot{V}_k|^2 = e_k^2 + f_k^2 \dots\dots (3)$$

但し,

$$\left. \begin{aligned} \dot{Y}_{km} &= G_{km} + j B_{km} \text{ アドミタンス行列の要素} \\ \dot{S}_k &= P_k + j Q_k \text{ 母線電力} \\ \dot{V}_k &= e_k + j f_k \text{ 母線電圧} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

ここで、第1母線はスラック母線とし、また、 P - Q 指定ノードに対しては(1)、(2)式、 P - V 指定ノードに対しては(1)、(3)式を用いる。次に、以下の議論に便利のように、上式を一括して次式で表わす。

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \dots\dots (5)$$

上式中、 $\mathbf{x}$ は e_k, f_k を、 $\mathbf{y}_s$ は P_k, Q_k あるいは $|\dot{V}_k|^2 (k=2, \dots, n)$ をそれぞれ要素とする、 $2(n-1)$ 次元の電圧ベクトル、指定値ベクトルである。また $\mathbf{y}$ は(1)~(3)式に対応する $2(n-1)$ 次元の非線形関数ベクトルで、その配列は $k=2, \dots, n$ に対して、次のとおりとする。

$$y_{2k-3} = \text{第 } k \text{ 母線での (1) 式} \dots\dots (6)$$

$$y_{2k-2} = \text{第 } k \text{ 母線での (2) 式あるいは (3) 式} \dots\dots (7)$$

3. 提案する潮流多根計算法

〈3.1〉 本手法の定式化 いま、 $2(n-1)$ 本の既知解を持つ方程式が次式で与えられるものとする。

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \dots\dots (8)$$

ここでパラメータ $t (0 \leq t \leq 1)$ を導入し、(5)、(8)式を用いて、解くべき方程式を次式のように定式化する。

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = (1-t)\mathbf{h}(\mathbf{x}) + t\{\mathbf{y}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_s\} = \mathbf{0} \dots\dots (9)$$

明らかに上式は、 $t=0$ のときに(8)式と一致し、 $t=1$ のとき(5)式、すなわち本来の電力潮流方程式に一致する。つまり、本手法の基本原理は、 t を0から1まで徐々に増加し、解くべき方程式を(8)式から、(5)式に徐々に変形することによって、(8)式の既知解から(5)式の解、すなわち潮流解への解の軌跡をたどり、それぞれの既知解に対応する潮流解を得ることである。

残された問題は、(8)式の選定である。直角座標表示を用いた場合の潮流方程式が円の標準形に変形でき着目する母線以外の電圧を固定したときの、いわゆる局所解がその二つの円の交点により与えられることは既によく知られている⁽⁶⁾。そこで(8)式を、第 k 母線

に対して次式で与えるものとする。

$$h_{2k-3} = e_k^2 + (f_k + 1)^2 - 2 = 0 \dots\dots (10)$$

$$h_{2k-2} = e_k^2 + (f_k - 1)^2 - 2 = 0 \dots\dots (11)$$

P, Q および V 指定円の e - f 平面上の位置関係から(10)式を(1)式、(11)式を(2)式あるいは(3)式に対応させて、(9)式を形成する。

(10)、(11)式は付録Iで述べた2条件を満足しており、従って t を0から1まで単調に連続的に増加させながら(9)式の解を求めていけば、(9)式のヤコビアン行列の行列式の符号は変化しないことになる。このことは、得られた潮流解の安定性に関して重要な役割を演ずることになる⁽¹¹⁾。

また(10)、(11)式は、第 k 母線に関する変数のみの関数となっているので、他母線の変数に関りなく解くことができ、明らかに

$$(e_k, f_k) = (1.0, 0.0) \text{ あるいは } (-1.0, 0.0) \dots\dots (12)$$

である。従って、初期値つまり $t=0$ のときの(9)式の解は、この2解のいずれか一方を任意に指定することにより得られる。図1は1機無限大母線系統における、 t を0から1まで変化させた際の、解の推移および(9)式の変化の様子を示したものである。初期値を $(1+j0)$ とした解は A に、 $(-1+j0)$ とした解は B に収束している。この例の場合、本手法の考え方をと

図1 1機無限大母線系統での2解の推移

Fig. 1. Transition of two solutions for a one-machine and infinite-bus system.

らず、初期値を $(1+j0)$ として従来通りの潮流計算を、例えば Newton-Raphson 法 (以下 N-R 法と略記する) により行なえば、その解は A ではなく B に収束することが確かめられ得る。

〈3.2〉 モードの定義 図2は、P-Q 指定の第 k 母線に対する局所解の関係を e_k - f_k 平面に表示したものであるが、N-R 法に用いるヤコビアン行列の内、自己の母線の変数で偏微分した要素からなる小行列式を次式で定義する。

$$\det J_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_{2k-3}}{\partial e_k} & \frac{\partial q_{2k-3}}{\partial f_k} \\ \frac{\partial q_{2k-2}}{\partial e_k} & \frac{\partial q_{2k-2}}{\partial f_k} \end{vmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

図2において、二つの円の中心を通る直線 l 上では、 $\det J_k = 0$ となり、この直線を境界として $\det J_k > 0$ と $\det J_k < 0$ の領域とに分割されることは、既に知られている⁽⁶⁾。そこで、非線形方程式(9)式を各母線に関して e_k - f_k 平面に描いた場合に二つの局所解 (二つの円の交点で、その一方が実際の解の要素 $\hat{V}_k$ になる) が直線 l の両側に分離することに着目して、各母線に対するモードを次のように定義する。

任意の $t(0 \leq t \leq 1)$ に対して(9)式の解 x が与えられたとき、解 x における $\det J_k (k=2, \dots, n)$ を計算し、この $\det J_k$ の符号を用いて

- (i) $\det J_k < 0$ ならば第 k 母線は (+) モード
- (ii) $\det J_k > 0$ ならば第 k 母線は (-) モード

とする。次に、複数个の解を表示するために、解 x のモードを次のように表現する。

$$\text{Mode}(x) = (a_2, a_3, \dots, a_n) \dots\dots\dots (14)$$

ここで a_k は、解 x に対する第 k 母線のモードで (+) か (-) のいずれかの符号である。またヤコビアン行列は、(13)式を用いて次式で表わすことができる。

$$J = \begin{bmatrix} J_2 & J_{23} \cdots J_{2n} \\ J_{32} & J_{33} \cdots J_{3n} \\ \vdots & \vdots \cdots \vdots \\ J_{n2} & J_{n3} \cdots J_{nn} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{\partial q_{2i-3}}{\partial e_j} & \frac{\partial q_{2i-3}}{\partial f_j} \\ \frac{\partial q_{2i-2}}{\partial e_j} & \frac{\partial q_{2i-2}}{\partial f_j} \end{cases} \quad (i \neq j) \dots\dots\dots (16)$$

(15)式の非対角要素、すなわち(16)式を全て無視できる場合には、

$$\det J = \prod_{k=2}^n \det J_k \dots\dots\dots (17)$$

となるが、特に $t=0$ のときには、(10)、(11)式から明らかなように、上式は完全に成立している。

図2 モードの概念

Fig. 2. Concept of mode.

ところで、(15)式の行列式の符号の場合とは異り、(13)式の符号すなわちモードは、特に系統が重負荷になっている場合には、例えば t を連続的に増加させたとしても変化することがある。これは、モードの定義を各母線に対する局所解析に基づいて決定しているためである。

本節でのモードの定義は、従来潮流多根問題においてなされていた定義⁽⁵⁾⁽⁶⁾と本質的には同一のものであると言える。この点については、従来の潮流多根問題の解法と本論文で提案する手法との関連や、潮流解と系統状態との関係に関する議論とともに、別論文としてとりまとめ発表する予定であるので、詳細はこれに譲るものとする。

4. 提案する求解アルゴリズム

前章において述べた計算法の具体的アルゴリズムとして、指定されたモードの潮流解を一つずつ求めていくアルゴリズムⅠと、全ての潮流解を求める必要がある場合に適用できるアルゴリズムⅡとを提案する。

〈4.1〉 アルゴリズムⅠの概要 図3は本手法の

図3 基本アルゴリズム

Fig. 3. Basic algorithm.

考え方にに基づき、指定されたモードの潮流解を一つずつ求めていくための基本的なアルゴリズムを示している。図3において指定されたモードに対する初期値は、前述したようにスラック母線を除く各母線に対して(12)式のいずれか一方を指定することにより、極めて簡単に得られる。また(9)式の変線形方程式を解く手法としては、高速でかつ簡便であるという利点を有する N-R 法を採用することを考える。

本アルゴリズムでは、パラメータ t の増分 Δt の与え方が極めて重要である。理論的には t を単調に連続的に増加させれば、(9)式の解の軌跡を厳密に追跡することができ、(9)式のヤコビアン行列の行列式の符号も変化しないことを保証できるのであるが、現実には、有限な増分 Δt により t を不連続に増加させざるを得ない。従って、 Δt の与え方いかんでは、解の追跡に失敗し、(9)式のヤコビアン行列の行列式の符号が変化してしまうこともあり得ることになる（以後この場合を誤収束と呼んでいる）。明らかに Δt を小さくすれば、解の追跡の厳密さが増す反面、最終解を得るまでの計算時間が長くなり逆に Δt を大きくすれば、計算時間は短縮されるとしても、解の追跡に失敗し、誤収束や発散をまねく危険性が高くなる。

そこで、解の追跡の厳密さをできるだけ損なわずに計算時間をできるだけ短縮するために、モードを決定するために用いる(13)式の小行列式の情報を有効に利用した、次節において詳述するような増分 Δt の簡略な自動決定法を採用するものとしよう。

〈4.2〉増分 Δt の自動決定法 本節では解を追跡し得るような Δt を自動的に決定するために、基本的には(13)式の符号に変化がない限り Δt を増加させる、次のようなアルゴリズムを提案する。なお、各母線に対するモードは変化することがあるので、増分 Δt がある限度以下に小さくなった場合には、そのまま計算を続行することとする。

いま、 t_i 時点から t_{i+1} 時点に t を増加するための Δt の決定について考えよう。図4はそのフローチャートであるが、 t_i 時点での各母線の小行列式の値 ($\det \mathbf{J}_{k,t=t_i}$) は既に知られているものとする。

ステップ1；増分 Δt を適当な値（初期値は通常1.0で良い）に設定し、 $t_i + \Delta t$ を $t_{\max}$ とする（但し $t_i + \Delta t > 1.0$ のときは $t_{\max} = 1.0$ ）。

ステップ2； t_i 時点で得られた解が t_{i+1} 時点の近似解と考え、 $\det \mathbf{J}_{k,t=t_{i+1}}$ を計算する。

ステップ3；(13)式の符号が t_i 時点と t_{i+1} 時点で変化しているかどうかを調べ、もし変化の生じた母線が一つでもあれば Δt を小さくしてステップ2へ、否

図4 増分 Δt の決定アルゴリズム

Fig. 4. Algorithm for calculating the increment Δt .

ならステップ4へ進む。但し Δt がある許容限度 (C_3) よりも小さくなった場合はステップ5へ進む。

ステップ4；ステップ3で全ての母線に対して符号変化がなければ、両時点での $\det \mathbf{J}_k$ の大きさを比較し、全ての k に対して

$$C_1 \leq \frac{\det \mathbf{J}_{k,t=t_{i+1}}}{\det \mathbf{J}_{k,t=t_i}} \leq C_2 \dots \dots \dots (18)$$

が成立すれば、すなわち $e_k - f_k$ 平面での $\det \mathbf{J}_k = 0$ の直線と近似解との距離の変化が著しく大きくなったり小さくなったりしなければ、 Δt を大きくしてステップ2へ戻る。もし(18)式を満足しない母線が一つでもあれば、あるいは Δt の増加に際して $t_{i+1} = t_{\max}$ ならば、ステップ5へ進む。

ステップ5；増分 Δt が決定されたので、 $t_{i+1} (= t_i + \Delta t)$ 時点での(9)式の求解計算を行なう。

パラメータ C_1 , C_2 , C_3 の値はいずれも経験的に選定されなければならない、系統規模などにより多少異なるであろうが、

$$C_1 = 0.1, \quad C_2 = 20, \quad C_3 = 10^{-5}$$

位が適当であろう。

〈4.3〉アルゴリズムIIの概要 本アルゴリズムは、前述のとおり、全ての潮流解を得たい場合に適用できるが、(9)式の連立非線形方程式を解く際に、武田氏らにより開発された新潮流計算法⁽¹⁰⁾（その概要については付録IIを参照のこと）を応用している。

この方法の特徴は、二つの解をそれらの解の中点ベクトルと偏差ベクトルとの和と差とによって表わすことにある。すなわち、 l 個の解が存在するとしたとき相異なる二つの解 $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_j$ に対して、新たな変数を

$$x_{ij}^m = (x_i + x_j)/2 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\Delta x_{ij} = (x_i - x_j)/2\sqrt{\mu} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\mu_{ij} = \|(x_i - x_j)/2\|^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

により定義する。ここで、 $\|\cdot\|$ はベクトルのノルムである。(19)式の x_{ij}^m は中点ベクトル、また(20)式の Δx_{ij} は偏差ベクトルであるが、(付 10)式によって Δx_{ij} は正規化されている。上述の変数の組は全部で C_2 通り存在するが、図 5 には $t=0$ のときの変数 x , x^m , Δx および μ の関係を、4 母線系統を例にとりて示している。

解 x は中点ベクトル x^m と偏差ベクトル $\sqrt{\mu}\Delta x$ との和と差、すなわち $x^m \pm \sqrt{\mu}\Delta x$ で表わされる。 μ が正のとき解は存在し、 μ が負のときには解は存在しない。

アルゴリズム II は、基本的には 2^{n-1} 個の初期値の中から任意の二つを選び、その中点ベクトルと偏差ベクトルを出発点として、 $t=0$ から 1 まで(9)式を付録 II に述べた方法で解き、二つの潮流解を得る操作を全ての初期値について実行する方法であるといえる。 2^{n-1} 個の初期値から x^m および Δx を選ぶ方法は、 $2^{n-1}C_2$ 通りあるが、重複しないように二つずつ選ぶことにすれば、初期値の組合せは 2^{n-2} 通りとなる。

ところで本手法では、 $t=0$ のときには 2^{n-1} 個の全ての解が存在しており、このとき 2^{n-2} 通りの中点および偏差ベクトルに対応する μ は全て正になっている。次に t を 1 まで増加する過程を考えると、途中でいくつかの解が存在しなくなる (μ が負となる) ことは容易に想像される。つまり、最初の対となる初期値の組合せによっては途中で計算ができなくなる (収束不可能となる) 場合が存在するのである。しかし、このようなことが起らないように初期値をあらかじめ対にすることは困難であるから、ここでは、最初の組合せは任意に行なうものとして、もし t を増加する過程で収束不可能となった場合には、初期値の組合せを誤ったものと考え、組合せの変更を行なうものとする。この組合せの変更法については次節に詳述する。

〈4.4〉 組合せの変更法 説明の簡単化のため、まず 3 母線系統について考えると、この場合解は最大 4 個存在し、6 通りの中点および偏差ベクトルが考えられる。図 6 に概念図を示すが、いま t を離散化して、4 解 x_i ($i=1\sim 4$) の内 x_1 と x_4 は $t_0(=0)$ から $t_k(=1)$ まで常に存在し、 x_2 と x_3 は t_0 から t_j まで存在するが、それ以降は存在しない解とする。 x_1 と x_4 を組合せると最後まで $\mu > 0$ となり、 t_k のときに潮流解を得る。 x_2 と x_3 は、 t_0 から t_j まで、

図 5 解 x とアルゴリズム II の変数の関係 ($t=0.0$)

Fig. 5. Relationships between solutions x and variables in algorithm II.

図 6 一組としての 2 解の推移

Fig. 6. Transition of two solutions as a pair.

$\mu > 0$ で図 6 のように接近してゆき、 t_{j+1} までに $\mu = 0$ すなわち重根となる t が存在し、それ以降は $\mu < 0$ である。従って、 t_j 時点の x_2 と x_3 は似かよった値になると考えられる。残りの組合せ(例えば x_1 と x_2) では、 t_j までは $\mu > 0$ となるが、 t_{j+1} 時点に進んだ段階で収束不可能となる。以上をまとめると次のとおりである。

(1) 収束不可能となる組合せの少くとも一方の解は存在しない解である。

(2) 存在しない解同志の組合せは、ある t のときに μ の符号が正から負に変化し、このとき $\mu = 0$ であるとともに、その 1 時点前の 2 解は接近した値を持っている。

(3) 収束不可能となる組合せがあれば、同じ t で収束不可能となる組合せが別に必ず存在する。

上述した考察に基づき、ある t 時点で収束不可能となれば、以下の手順で組合せの変更を行なう。

ステップ 1 ; それ以前に同じ t の値で収束不可能となった組合せが存在したかどうかを調べ、もし存在し

図 7 2解の組合せの変更アルゴリズム

Fig. 7. Algorithm for changing combinations of two solutions.

ていればステップ2へ、否ならステップ4へ進む。

ステップ2；今収束不可能となった1時点前の解 $x^m \pm \sqrt{\mu} \Delta x$ と、ステップ1で選ばれた解 $x_{bf}^m \pm \sqrt{\mu_{bf}} \Delta x_{bf}$ の合計4個の解の中に、 t 時点で存在しない解になる組合せが含まれているので、4個の解の組合せのうち、まだ組合せていない4通りについて、2解の距離を計算し最小となる組合せを見つける。

ステップ3；ステップ2で選ばれた組合せの中点および偏差ベクトルを計算し、 t 時点から計算を再開する。また残った2解の中点および偏差ベクトルは、計算後記憶し、既に作成してある組合せの計算が終了した後、やはり t 時点から計算を再開する。

ステップ4；収束不可能となった時点 t と、1時点前の収束解を記憶して、別の組合せの計算に進む。

図7に以上のアルゴリズムのフローチャートを示している。なお、アルゴリズムIIではこのようにパラメータ t に関する情報を必要とするため、〈4・2〉節で述べた増分 Δt の自動決定法を用いることは適当とはいえず、一定の Δt を使う必要がある。

5. モデル系統への適用例

提案した方法の有効性を確かめるために、潮流多根を持つ代表的な系統に本手法を適用したが、本章ではそのうちのいくつかについて述べる。なお、以下の議論において、モードとはいずれも初期値モードであるが、これは〈3・2〉節で述べたように、 t の増加過程で変化することがある。

〈5・1〉 **Klos & Kerner の3母線系統** 文献(2)記載の3母線系統にアルゴリズムIを適用した結果を

表 1 潮流多根 (3母線系統)

Table 1. Multi-solutions.

初期値 No. モード	母線 No.	収 束 解 V		ワット損 パワール損 det J
		$t=0.5$	$t=1.0$	
1 (++)	2		1.0780-j0.0184	0.019 -4.234
	3		1.0500-j0.0114	0.159×10 ⁷
2 (-+)	2		0.0047-j0.0073	2.579 23.50
	3		0.6821-j0.0084	-0.672×10 ⁸
3 (+-)	2	0.5424+j0.0394	0.5047-j0.0102	3.487 37.66
	3	-0.0239+j0.0176	0.0028-j0.0035	-0.348×10 ⁸
4 (--)	2	-0.0622+j0.0396	0.0085-j0.0125	4.385 45.04
	3	-0.0309+j0.0226	0.0035-j0.0044	0.223×10 ⁸

表 2 初期値モードと計算手順

Table 2. Initial modes and computation procedure.

初期値モード		計 算 手 順		
No.	モード	手順	組 合 せ	結 果
1	(+++)	1	1-2	解あり ($\mu > 0$)
2	(-++)	2	3-4	$t=0.90$
3	(+--)	3	5-6	$t=0.42$
4	(--+)	4	7-8	$t=0.42$
5	(+-+)	5	6-8	解なし ($\mu < 0$)
6	(-+-)	6	5-7	$t=0.90$
7	(+-+)	7	3-7	解なし ($\mu < 0$)
8	(---)	8	4-5	解あり ($\mu > 0$)

表1に示す。初期値 No.1, 2の場合は、 Δt の自動決定法により、直ちに $t=1.0$ として計算を行ない、それぞれ解を得ている。また、No.3, 4の場合は、自動決定法により $t=0.5$ および 1.0 で計算を行っている。以上のように計4個の解を得たが、結果は文献(2)の結果と一致している。

次に4個の初期値の全ての組合せに対してアルゴリズムIIを適用してみたところ、6通りのどの組合せからも解を得ることができた。

〈5・2〉 **4母線系統** 文献(12)記載の4母線系統にアルゴリズムIIを適用して多根計算を行なったが、表2に初期値モードと計算手順を示す。なお、表中の t の値は収束不可能となった時点を表している。組合せの変更は手順4および6のあとで行なわれ、それぞれ、6-8, 5-7 および 3-7, 4-5 の新しい組合せを得ている。1-2, 4-5 の組合せから得られた潮流多根を表3に示している。

〈5・3〉 **Klos & Kerner の11母線系統** 文献(2)記載の11母線系統の軽負荷状態では、 2^{11-1} ($=1,024$)個の初期値から、増分 Δt を一定とするな

どにより 58 個の潮流解を得たが、そのうち Δt の自動決定法により得られた解は 41 個であった。潮流解の一部を表 4 に示す。なお、この系統での計算ではいくつかの誤収束が認められた。重負荷状態では表 5 に示すように初期値 No. 1 と 3 の 2 個の近接解が得られた。

以上のほか文献 (13) 記載の 6 母線系統でも 2 個の解が得られ、また文献 (7) 記載の同系統重負荷状態に対しても、同文献と同じ 2 解が得られている。

6. む す び

本論文では Garcia & Zangwill 法を潮流計算に修正適用することにより、新しい潮流多根計算法を提案し、その有効性をモデル系統への適用により明らかにした。本手法の特徴は次の通りである。

(1) 初期値と収束解との対応関係が明確であり、従来のフラットスタートによる潮流解を多根の一つとして求め得る。収束解を得る過程でモードが変化する場合においても、初期値と収束解の 1 対 1 の対応関係は保たれており、この場合には一般には収束解のモードとしては、同一のモードに異った初期値に対応する複数個の解が存在している。

(2) アルゴリズム I では、指定されたモードの解を効率良く求めることができ、また多根を求める場合でも増分 Δt の自動決定法により、計算に要する時間は比較的短くてすむ。

(3) 全ての解を求めたいときに適用できるアルゴリズム II では、文献 (10) の原計算法の利点を保存して解の物理的存在性を明確にできるため、指定値の変更も容易であると思われる。

(4) 全ての系統に対して、既知解を持つ方程式系は全く同じ形でよく、またその解すなわち初期値が極めて容易に指定できる。

なお、11 母線系統での計算では、本論文で述べた Δt の自動決定法では、まだ全ての解を求め得るまでには至っておらず、また誤収束となった場合もあるが、この理由は解を実数領域に限定して求めていること、および増分 Δt を極端には小さくしないルールを採用したため解の追跡に失敗する場合のあったこと、にあると予想される。従って、この点を解決すべくアルゴリズムを改良することが残された課題の一つである。また潮流多根と電力系統の統一的安定理論との関係についても今後の課題として検討する必要がある。

最後に、日頃多大なご指導とご支援をいただいている。北見工業大学 小池東一郎学長、ならびに本論文作成の面でご協力いただいた北海道大学 阿部理生君

表 3 潮流多根 (4 母線系統)

Table 3. Multi-solutions.

母線 No.	初期値モード			
	1 (+ + +)		2 (- + +)	
2	0.9586-j0.1084		0.0745-j0.1214	
3	0.9847-j0.0086		0.7138-j0.0759	
4	1.0924+j0.1289		1.0975-j0.0742	
ワット損・バール損 det J	0.017	0.481	0.760	3.867
	-0.3675 $\times 10^4$		0.1080 $\times 10^4$	
母線 No.	4 (- - +)		5 (+ + -)	
2	0.2836-j0.1682		0.3165-j0.1670	
3	0.0983+j0.0757		0.0991+j0.0744	
4	-0.6400+j0.8946		-0.6499+j0.8875	
ワット損・バール損 det J	0.765	7.448	0.747	7.371
	-0.4216 $\times 10^4$		0.4335 $\times 10^4$	

表 4 潮流多根の一部 (11 母線, 軽負荷)

Table 4. Two examples of multi-solutions.

母線 No.	初期値 No., モード	
	1 (+++++)	33 (+++++)
2	1.1087-j0.0105	1.0008-j0.0528
3	1.1293-j0.0133	0.9562-j0.0743
4	1.1237-j0.0113	0.9625-j0.1119
5	1.0500+j0.0008	1.0343-j0.1807
6	1.1500-j0.0144	0.7739-j0.0778
7	1.0992-j0.0064	0.0015-j0.0020
8	1.0765-j0.0025	0.4090-j0.0625
9	1.0375+j0.0048	1.0263-j0.1522
10	1.0682-j0.0018	1.0316-j0.1161
11	1.1210-j0.0096	0.9965-j0.1084
ワット損	0.088	6.481
バール損	-15.27	53.74
det J	0.1597 $\times 10^{17}$	-0.1427 $\times 10^{15}$

表 5 潮流多根 (11 母線, 重負荷)

Table 5. Multi-solutions.

母線 No.	初期値 No., モード	
	1 (+++++)	3 (-++++)
2	0.5922-j0.4338	0.5719-j0.4321
3	0.3966-j0.6067	0.3676-j0.6029
4	0.4687-j0.6789	0.4424-j0.6800
5	0.8104-j0.6677	0.7952-j0.6857
6	0.4915-j0.6635	0.4657-j0.6643
7	0.6454-j0.6390	0.6291-j0.6468
8	0.7656-j0.5159	0.7542-j0.6857
9	1.0017-j0.2704	0.9986-j0.2816
10	0.9075-j0.3354	0.9005-j0.3427
11	0.7006-j0.5580	0.6813-j0.5620
ワット損	6.391	6.666
バール損	42.50	44.98
det J	0.3816 $\times 10^{11}$	-0.3028 $\times 10^{11}$

に深謝申し上げます。また、本研究に対し電力技術研究会で貴重なお討議をいただいた⁽¹⁴⁾皆様にも深く感謝の意を表します。なお、本論文の計算には北海道大

学大型計算機センターの HITAC M-200 H を使用したことを付記します。

(昭和 57 年 9 月 20 日受付, 同 58 年 3 月 11 日再受付)

文 献

- (1) V.I. Idelchik & V.I. Tarasov: "Experimental Investigations of Existence, Non-Uniqueness and Convergence of Solution of Power Flow Equations in Power Systems." *Proc. 4th PSCC*, P. 1, 3/8, (1972)
- (2) A. Klos & A. Kerner: "The Non-Uniqueness of Load-Flow Solution." *Proc. 5th PSCC*, P. 3, 1/8, (1975)
- (3) 阿部・磯野: 「電圧安定限界付近の電力潮流計算における初期値選定法」電学論 B 97, 23 (昭 52-1)
- (4) A. Klos, S. Mikolajczyk & A. Kaminski: "Nonuniqueness and Stability of Load Flows." *Proc. 6th PSCC*, 704 (1978)
- (5) 朴・関根: 「潮流多根解の一解法について」電学論 B 99, 245 (昭 54-4)
- (6) 伊庭・岩本・田村: 「実規模系統に対する潮流多根計算法」電学論 B 100, 257 (昭 55-5)
- (7) 中西, 他: 「電力潮流の多根問題における解の構造, 特異点, 存在条件について」電学論 B 100, 337 (昭 55-6)
- (8) 横山・関根: 「電力系統の潮流多根問題と安定判別」電学論 B 100, 509 (昭 55-9)
- (9) C.B. Garcia & W.I. Zangwill: "Finding All Solutions to Polynomial Systems and Other Systems of Equations." *Mathematical Programming*, 16, 159 (1979)
- (10) 武田・土井: 「限界潮流付近で効果的な新潮流計算法」電学論 B 100, 565 (昭 55-9)
- (11) V.A. Venikov, et al.: "Estimation of Electrical Power System Steady State Stability." *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-94, 3, 1034 (1975)
- (12) 関根: 「電力系統解析理論」例題 3.1 (昭 46) 電気書院
- (13) J.B. Ward & H.W. Hale: "Digital Computer Solution of Power-Flow Problems." *AIEE Trans. (Power Apparatus Syst.)* 75, 398 (1956)
- (14) 石丸, 他: 「電力系統における潮流多根問題の一解法」電気学会電力技術研究会資料 PE-81-46 (昭 56-7)

付 録

I. Garcia & Zangwill 法⁽⁹⁾の概要

いま, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ を n 次元の複素ベクトルとして, 解くべき方程式を

$$f_i(z) = 0 \quad (i=1 \sim n) \quad \text{..... (付 1)}$$

とし, 解は全て有界であるものとする。また次の 2 条件を満足する関数 $h_i(z)$ を定義できるとする。

(1) 次式の解が全て有界である。

$$h_i(z) = 0 \quad (i=1 \sim n) \quad \text{..... (付 2)}$$

(2) $h_i(z) \neq 0$ という条件を満足させながら z のノルムを無限大に近づけたとき, 次式を満足するような l が存在する。

$$\lim_{\|z\| \rightarrow \infty} \frac{f_i(z)}{h_i(z)} < 0 \quad \text{..... (付 3)}$$

ここで, 記号 < 0 は非負の実数とはならないことを意味し, $\|\cdot\|$ はノルムを意味している。

更に, 次の関数を導入する。

$$g_i(z, t) = (1-t)h_i(z) + t f_i(z) \quad (i=1 \sim n) \quad \text{..... (付 4)}$$

明らかに,

$$g_i(z, t) = 0 \quad (i=1 \sim n) \quad \text{..... (付 5)}$$

の解は, $t=0$ のとき(付 2)式の解と一致し, $t=1$ のとき(付 1)式の解と対応している。

文献 (9) によれば証明は省略するが, 次のことが言える。

(1) (付 5)式の解は $0 < t < 1$ を満足する全ての t

に対し全て有界である。

(2) t を単調に連続的に変化させる限りにおいて

$$\begin{aligned} G &= [Re(g_1), Im(g_1), \dots]^T \\ u &= [Re(z_1), Im(z_1), \dots]^T \end{aligned} \quad \text{..... (付 6)}$$

としたとき, 関数 G の u に対するヤコビアン行列の行列式の符号は変化しない。

(3) (付 2)式の全ての解が既知であるような関数 $h_i(z)$ を選択すれば, t を 0 から 1 まで単調に増加させながら(付 5)式を解き, その解を追跡すれば, それは $t=1$ において(付 1)式の解と一致するか, あるいは発散する。

(4) (付 1)式の解は全て, (付 5)式の $t \rightarrow 1$ の解のいずれかと, 1 対 1 の対応関係をもっている。

II. 新潮流計算法⁽¹⁰⁾の概要

t を任意の値に固定し, (9)式を x^m のまわりで Taylor 展開すると, 切り取り誤差を含まず, 次の関係式を得ることができる。

$$\begin{aligned} g(x^m + \Delta x) &= g(x^m) + J(x^m)\Delta x + H(\Delta x) \\ &= 0 \quad \text{..... (付 7)} \end{aligned}$$

ここで $J(x^m)$ はヤコビアン行列, $H(\Delta x)$ は二次の項だけの Δx の関数である。次に(付 7)式を 2 式に分解し, またスカラー変数 μ を導入して

$$g(x^m) + \mu H(\Delta x) = 0 \quad \text{..... (付 8)}$$

$$J(x^m)\Delta x = 0 \quad \text{..... (付 9)}$$

を考えることとする。もし変数 $x^m, \Delta x, \mu$ が上の 2 式を同時に満足し, $\mu \geq 0$ ならば, $x^m \pm \sqrt{\mu} \Delta x$ は(9)式の解であり, また $\mu < 0$ ならば x^m の近くに解は存在しない。結局(付 8), (付 9)式を解けば良いことになるが, 変数の数が式の数より 1 つ多いので, 次の条件を加えて一意解を得るものとする。

$$\|\Delta x\| = 1 \quad \text{..... (付 10)}$$