UDC 621.311.1.015.1

論 文

58-B 44

電力系統の電圧安定判別法 (その 3. 動的アプローチ)

正 員 阿 部 重 夫 (日立製作所)

正 員 磯 野 昭 (日立製作所)

正 員 近 藤 文 治 (京 都 大)

1. ま え が き

近年電力系統の長距離大容量化が進むにつれ、電圧安定度の問題が注目を集めてきている。電圧安定度とは、定常状態において負荷電圧を基準値以内に維持できる能力をいい、従来の発電機の同期安定度を規定した定態(動態)安定度、過渡安定度とは性質を大いに異にするものである。

電圧安定性に関しては、ソビエトで古くから研究がなされており、文献(1)において系統の特性方程式の最終項が正のとき安定とする判定規準が提案されている。我が国においてもその研究が大いに進められている⁽²⁾⁻⁽⁷⁾。文献(3)では、電源電圧あるいは負荷点の調相容量のステップ状の変化に対して負荷アドミッタンス変化に時間遅れがあるとして多機系における安定条件を導いている。文献(4)、(5)では、付録Iで示される M 行列の性質を用いて文献(3)の安定条件の精密化を図り、文献(1)の安定条件が必要条件であることを示している。文献(6)では、負荷がインピーダンス負荷と誘導電動機から成るとして、一次遅れ負荷モデルを導き、これより文献(4)、(5)と仮定などで多小異なるところがあるが、同上の文献と極めてよく似た安定条件が得られている。

文献(7)においては、負荷時電圧調整装置の動作よりコンダクタンスとサセプタンスの変化の時定数が等しい一次遅れ負荷アドミッタンスモデルを導き、それに基づいて安定条件を導いているが、その安定条件が通常の負荷条件のもとでは、文献(4)、(5)の安定条件と一致することが示されている。

本論文の目的は、文献(4)では、間接的にしか表現されていなかった負荷の動特性を微分方程式により表現し、固有値の観点から文献(4)で導かれた安定条件の妥当性を理論的に裏付けることにある。このため文献(7)で導かれた一次遅れ負荷モデルをコンダクタンスとサセプタンス変化の時定数の異なる場合に一般化して安定条件を導き、通常の負荷条件のもとでは、文献(4)の安定条件に一致することを示す。更に文献(4)で用いたモデル系統などを用いて、負荷アドミッタンスの時定数に係わりなく、文献(4)の安定条件で安定判別が行なえることを示す。

2. システムの方程式

電圧安定度は、負荷の電圧特性に大いに影響される。端子電圧の変化に無関係に一定の電力を消費する傾向にある誘導電動機、あるいは負荷が定電力特性を有するかのよう動作する負荷時電圧調整装置などは、電圧安定度を悪くする機器として知られている。本論文では、負荷時電圧調整装置の動作から導かれた負荷の動特性のモデル⁽⁷⁾を拡張して、次のモデルを考える。

$$dB_{Li}/dt = -(B_{Li} - f_{Bi}(V_i))/T_{Bi}$$

$$dG_{Li}/dt = -(G_{Li} - f_{Gi}(V_i))/T_{Gi}$$

$$i=1, \dots, N \dots\dots\dots(1)$$

但し、ノード $1, \dots, N$ を負荷の接続されたノードとし、 $N+1, \dots, N+M$ を発電機の接続されたノードで $G_{Li} + jB_{Li}$: ノード i における負荷アドミッタンス、 $f_{Gi}(V_i) + jf_{Bi}(V_i)$: ノード i における定常状態の負荷アドミッタンスの電圧特性、 T_{Bi} , T_{Gi} : ノード i における負荷アドミッタンス変化の時定数

である。負荷時電圧調整装置の動作からは、 $T_{Bi} = T_{Gi}$ と仮定できることから、文献(7)では、この仮定のもとに安定条件を導いている。

Determination of Power System Voltage Stability, Part 3: Dynamical Approach. By Shigeo Abe, Member, Akira Isono, Member (Hitachi Research Lab., Hitachi, Ltd.), & Bunji Kondo, Member (Faculty of Engineering, Kyoto University)

阿部重夫: 正員, 日立製作所日立研究所
磯野 昭: 正員, 日立製作所日立研究所
近藤文治: 正員, 京都大学工学部

ここで(1)式の負荷アドミッタンスは、送電線を介して送られる電力と次の関係式で結ばれている。

$$B_{Li} V_i^2 = -Q_{bi} - \sum_{l \in S_i} Q_{li}$$

$$G_{Li} V_i^2 = - \sum_{l \in S_i} P_{li} \quad i=1, \dots, N \dots (2)$$

但し、 S_i : ノード i に接続している送電線の他端のノード番号の集合、 Q_{bi} : ノード i のサセプタンス b_i により供給される無効電力、 P_{li} , Q_{li} : ノード i においてノード i からノード l に供給される有効あるいは無効電力

であり各々次式で与えられる。

$$Q_{bi} = -b_i V_i^2$$

$$Q_{li} = -B_{li} V_i^2 + B_{li} V_i V_l \cos(\theta_i - \theta_l) - G_{li} V_i V_l \sin(\theta_i - \theta_l)$$

$$P_{li} = -B_{li} V_i V_l \sin(\theta_i - \theta_l) + G_{li} (V_i^2 - V_i V_l \cos(\theta_i - \theta_l))$$

但し、 $G_{li} + jB_{li}$: ノード i , l を結ぶ送電線のアドミッタンス、 θ_i : ノード $N+M$ を電圧の位相角の基準にしたときのノード i の位相角。

電圧不安定現象は、分から時間のオーダで発生する現象であるため、電圧安定度を解析する上からは、発電機の動特性は無視でき、発電機を一定の電圧を有し、負荷の消費電力の変化に対して時間遅れなく追従する電源としてモデル化しうる。そのため発電機の接続しているノード $N+i$ に対して送電損失および負荷の増加に対する増分が規定されているとする。すなわち

$$\Delta R_i = \Delta \left(\sum_{j \in S_{i+N}} P_{i+N,j} \right) - k_i \Delta \left(P_{\text{Loss}} + \sum_{j=1}^N G_{Lj} V_j^2 \right)$$

$$= 0 \quad i=1, \dots, M-1 \dots \dots \dots (3)$$

ここで k_i はノード $N+i$ における増分比を示しており、

$$\sum_{i=1}^M k_i = 1, \quad k_i \geq 0$$

を満たす。また P_{Loss} は、送電損失の総和で

$$P_{\text{Loss}} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N+M} P_{i,j} = \sum_{(i,j)} (P_{ij} + P_{ji})$$

$$= \sum_{(i,j)} G_{ij} \{ V_i^2 + V_j^2 - 2 V_i V_j \cos(\theta_i - \theta_j) \}$$

ここで (i, j) は全ての送電線の両端のノード番号の組合せである。

k_i を一定として(3)式を積分すると、

$$R_i = \sum_{j \in S_{i+N}} P_{i+N,j} - k_i \left(P_{\text{Loss}} + \sum_{j=1}^N G_{Lj} V_j^2 \right)$$

$$+ C_i = 0 \quad i=1, \dots, M-1 \dots \dots (4)$$

となる。ここで C_i は積分定数で

$$\sum_{i=1}^M C_i = 0$$

を満たす。

平衡点 $(B_{L1}, \dots, B_{LN}, G_{L1}, \dots, G_{LN})_{i=1}^N$ の安定判別を行なうため(1)~(3)式から、平衡点のまわりで線形化した微分方程式を求める。ここで V_i が B_{Li} , G_{Li} , R_i ($j=1, \dots, N, l=1, \dots, M-1$) の関数であることに注意すると次式が成立する。

$$\Delta V = \partial V / \partial B_L \Delta B_L + \partial V / \partial G_L \Delta G_L + \partial V / \partial R \Delta R \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{但し、} \Delta V = (\Delta V_1, \dots, \Delta V_N)^t, \quad \Delta B_L = (\Delta B_{L1}, \dots, \Delta B_{LN})^t, \quad \Delta G_L = (\Delta G_{L1}, \dots, \Delta G_{LN})^t, \quad \Delta R = (\Delta R_1, \dots, \Delta R_{M-1})^t,$$

$$\partial V / \partial B_L = \{ \partial V_i / \partial B_{Lj} \} N \times N \text{ 次行列,}$$

$$\partial V / \partial G_L = \{ \partial V_i / \partial G_{Lj} \} N \times N \text{ 次行列,}$$

$$\partial V / \partial R = \{ \partial V_i / \partial R_j \} N \times (M-1) \text{ 次行列}$$

ここで

$$X_{Bi} = \Delta B_{Li} = B_{Li}(t) - B_{Li}(\infty) \Bigg\} \dots \dots (6)$$

$$X_{Gi} = \Delta G_{Li} = G_{Li}(t) - G_{Li}(\infty)$$

において、(5)式を考慮に入れると次の平衡点のまわりの線形化方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_B \\ X_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_B^{-1} \left(X_B - \frac{\partial f_B}{\partial V} \Delta V \right) \\ -T_G^{-1} \left(X_G - \frac{\partial f_G}{\partial V} \Delta V \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -T_B^{-1} \left(E - \frac{\partial f_B}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} \right) & T_B^{-1} \frac{\partial f_B}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial G_L} \\ T_G^{-1} \frac{\partial f_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} & -T_G^{-1} \left(E - \frac{\partial f_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial G_L} \right) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} X_B \\ X_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_B^{-1} \frac{\partial f_B}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial R} \\ T_G^{-1} \frac{\partial f_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial R} \end{bmatrix} \Delta R \dots \dots \dots (7)$$

ここで E は $N \times N$ 次単位行列で、

$$X_B = (X_{B1}, \dots, X_{BN})^t$$

$$X_G = (X_{G1}, \dots, X_{GN})^t$$

$$\partial f_B / \partial V = \text{Diag}(\partial f_{B1}(V_1) / \partial V_1, \dots, \partial f_{BN}(V_N) / \partial V_N)$$

$$\partial f_G / \partial V = \text{Diag}(\partial f_{G1}(V_1) / \partial V_1, \dots, \partial f_{GN}(V_N) / \partial V_N)$$

$$T_B = \text{Diag}(T_{B1}, \dots, T_{BN})$$

$$T_G = \text{Diag}(T_{G1}, \dots, T_{GN})$$

但し, Diag は対角行列を表す。

(2), (4)式を次のようにベクトル表示する。

$$\left. \begin{aligned} B_L &= g_B(V, \theta) \\ G_L &= g_G(V, \theta) \\ R &= g_R(V, \theta, G_L) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

付録 II に示すように $\Delta R = -\partial g_R / \partial G_L \cdot \Delta G_L$ とすればよいのでこれを(7)式に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} X_B \\ X_G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -T_B^{-1} \left(E - \frac{\partial f_B}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} \right) \\ T_G^{-1} \frac{\partial f_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} T_B^{-1} \frac{\partial f_B}{\partial V} \left(\frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial g_R}{\partial G_L} \right) \\ -T_G^{-1} \left[E - \frac{\partial f_G}{\partial V} \left(\frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial g_R}{\partial G_L} \right) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_B \\ X_G \end{bmatrix} \\ &\triangleq T^{-1} \cdot H \begin{bmatrix} X_B \\ X_G \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

但し

$$H = \begin{bmatrix} -E + \frac{\partial f_B}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} & \frac{\partial f_B}{\partial V} \left(\frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial g_R}{\partial G_L} \right) \\ \frac{\partial f_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} & -E + \frac{\partial f_G}{\partial V} \left(\frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \frac{\partial g_R}{\partial G_L} \right) \end{bmatrix}$$

$$T = \text{Diag}(T_{B1}, \dots, T_{BN}, T_{G1}, \dots, T_{GN})$$

これより平衡点 $(B_{L1}, \dots, B_{LN}, G_{L1}, \dots, G_{LN})_{i=1, \dots, N}$ の安定判別を行なうには, (9)式の線形化方程式の係数行列 $T^{-1}H$ の固有値を調べればよいことになる。

3. 電圧安定条件

(9)式の行列 H の要素の符号について調べる。負荷の電圧特性は, 負荷時電圧調整装置の動作あるいは, 負荷中に含まれる誘導電動機等により, 線形特性と定電力特性との中間の特性を持っていると考えられる。これと(1)式により,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_B}{\partial V} &\leq 0 \\ \frac{\partial f_G}{\partial V} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

が成立する。但し, (10)式の不等号は, 付録 I の定義 1 の意味とする。また $\partial V / \partial B_L$ は, 付録 II (付 9)式により求まるが, 文献(4), (5), (7)で示されているように線形負荷時で G を評価したとき, $-G$ の非対角要素に正のものが生じるため, $-G \in Z$ (Z : 付録 I の定義 2 による) とはならないが, 正の要素が, 負の要素に対してその大きさが小さいため近似的に定理 1 が適用でき $G^{-1} < 0$ が成立すると考えてよい。例えば正の要素が生じてその値は, 負の要素に比較して小さい値となる。従って次式が成立すると仮定でき

る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_B}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} &\geq 0 \\ \frac{\partial f_G}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial B_L} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

一方(4), (8), (付10)式により

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial g_R}{\partial G_L} \\ = -G^{-1} A_1 A_2^{-1} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ k_1 V_1^2 & \dots & k_1 V_N^2 \\ \vdots & & \vdots \\ k_{M-1} V_1^2 & \dots & k_{M-1} V_N^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$

となる。(4)式の R_i の符号を逆にしても, (12)式の右の二つの行列の積の符号は変わらないので, 逆にすると, 付録 I 定理 1 および定義 6 により $-A_2$ は優対角 M 行列となり, $(-A_2)^{-1} > 0$ となる。また定理 8 により, $(-A_2)^{-1}$ の対角要素は, その列の最大値をとる。電圧が 1 pu 付近であれば A_2 は対称行列と仮定できるため行の最大値にもなる。(4)式の R_i の符号を逆にすると, (12)式の右辺の行列の単位行列でない部分は符号が反転するが, 要素の絶対値は電圧が 1 pu 付近でも 1 より小さく, また 1 pu より下がってくると電圧の自乗の成分によりこの部分の影響は小さくなり結局右の二つの行列の積の要素は, 全て負と仮定できる。 A_1 は, 対角要素の成分が正または 0 で, 非対角要素に負のものが生じると, その同一行にそれと同じ大きさかそれ以上の正のものがあらわれる。また $-G^{-1} > 0$ であることを考えあわせると, (12)式の行列の要素は, 負になると仮定できる。たとえ正のものがあらわれてもその値は, 負の要素の絶対値より小さい。以上より次式が成立していると仮定してよい。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_B}{\partial V} (\frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial g_R}{\partial G_L}) &\geq 0 \\ \frac{\partial f_G}{\partial V} (\frac{\partial V}{\partial G_L} - \frac{\partial V}{\partial R} \cdot \frac{\partial g_R}{\partial G_L}) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(11), (13)式より次の安定条件が得られる。

安定条件 I 行列 $-H$ が M 行列となるときの時定数の行列 T の如何に関わらず電圧は安定である。

証明: $-H$ が M 行列となると付録 I 定理 2 により, $-T^{-1}H$ も M 行列となる。従って, 定理 1 により, $T^{-1}H$ の固有値の実部は全て負となり電圧は安定となる。

文献(7)では, $T_{Bi} = T_{Gi}$ ($i=1, \dots, N$) のとき, (9)式の係数行列の固有値が, $-T_{B1}^{-1}, \dots, -T_{BN}^{-1}$ と, 行列 $-T_B^{-1} G_{LL}^{-1} G_{NL}$ の固有値に一致することが示されている。但し LL, NL は, 負荷が線形および非線形であることを示し, G_{NL} は付録(付 11)式

与えられ、 G_{LL} は、(付9)式の G を G_{NL} と区別するために添字をつけたものである。これより H の固有値は、 N 重根の -1 と、 $-G_{LL}^{-1}G_{NL}$ の固有値から成ることが分かる。文献(7)では、 $T_{Bi}=T_{Gi}$ の仮定のもとで以下の安定条件が得られている。

安定条件II 負荷電圧が安定であるための必要十分条件は、 $-T_B^{-1}G_{LL}^{-1}G_{NL}$ の固有値の実部が全て負となることである。

安定条件III $G_{LL}^{-1}G_{NL}$ が M 行列のとき電圧は安定である。

安定条件IV $-G_{LL}$ が M 行列で、 $-G_{NL}$ の非対角要素が非正で、 $G_{LL}-G_{NL} \geq 0$ のとき電圧は安定である。

安定条件V $G_{LL}-G_{NL} \leq 0$ で、 $-G_{LL}$ 、 $-G_{NL}$ が M 行列のとき電圧は安定となる。

(10)式で示される通常の負荷条件のもとでは、 $G_{LL}-G_{NL} \leq 0$ が成立するため、安定条件Vより、 $-G_{LL}$ 、 $-G_{NL}$ が M 行列となることを調べるとにより安定判別を行なうことが文献(7)で示されている。このときは、 $G_{LL}^{-1}G_{NL}$ が M 行列となるため、行列 $-H$ の固有値の実部は全て正となる。また(10)式の条件により、 $-H$ の非対角要素は非正となり、付録I定理1により $-H$ も M 行列となる。従って、このとき安定条件Iも成立していることになる。このことは、 $T_{Bi}=T_{Gi}$ として導びいた安定条件Vは、(10)式のもとでは、 $T_{Bi} \neq T_{Gi}$ の場合にもそのまま適用可能であることを意味する。すなわち文献(4)、(5)の $-G_{NL}(-G_{LL})$ が M 行列なら安定とする判定方式は、負荷の動特性を(1)式と仮定した固有値解析の観点からも確かめられたことになる。

4. 数値計算例

<4.1> 1機1負荷系統 図1の1機1負荷系統では、(3)式が不要となるため、(9)式の H は次式で与えられる。

$$H = \begin{bmatrix} -1 + \partial f_B / \partial V \cdot \partial V / \partial B_L & \partial f_B / \partial V \cdot \partial V / \partial G_L \\ \partial f_G / \partial V \cdot \partial V / \partial B_L & -1 + \partial f_G / \partial V \cdot \partial V / \partial G_L \end{bmatrix} \quad (14)$$

このとき $\partial V / \partial B_L$ 、 $\partial V / \partial G_L$ は簡単な計算により、

$$\left. \begin{aligned} \partial V / \partial G_L &= -YE \{ (G+G_L)^2 + (B_L - (B+b))^2 \}^{-3/2} (G+G_L) < 0 \\ \partial V / \partial B_L &= -YE \{ (G+G_L)^2 + (B_L - (B+b))^2 \}^{-3/2} (B_L - (B+b)) < 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

図1 1機1負荷系統

Fig. 1. Single-load, single-power-source system.

となる。但し、(2)式より、

$$B_L - (B+b) = \frac{YV}{E} \cdot \cos(\theta + \alpha) > 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta + \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad \tan^{-1} \alpha = -G/B$$

によった。

ここで(10)式、すなわち

$$\partial f_B / \partial V < 0, \quad \partial f_G / \partial V < 0 \quad (16)$$

を仮定すると、安定条件Iが成立するための条件は、付録I定理1(1)により

$$1 - \partial f_B / \partial V \cdot \partial V / \partial B_L > 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \det(-H) &= 1 - \partial f_B / \partial V \cdot \partial V / \partial B_L \\ &\quad - \partial f_G / \partial V \cdot \partial V / \partial G_L > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

となるが、(15)、(16)の条件のもとでは(17)式は、(18)式に含まれる。

ここで $G_{LL}^{-1} = \partial V / \partial B_L < 0$ であるから、(18)式の条件は

$$\det(-G_{NL}) > 0 \quad (19)$$

すなわち安定条件Vと一致する。

<4.2> 2機2負荷系統 文献(4)、(7)で用いた2機2負荷系統を用いて、負荷アドミタンス変化の時定数の値を変えても安定判別結果が、文献(4)、(7)の結果と一致することを例証する。(系統構成、パラメータなどについては文献(4)参照)

電源電圧 E_2 を 1.0 pu として、 E_1 を変化させたときの軌跡を図2に再掲する。文献(4)では、 $k_1 = 0.1, 0.5, 0.9$ に対して分枝1では、 $-G_{NL}(-G_{LL})$ は、 M 行列となるが、分枝2, 3, 4では、 M 行列とならないことが確かめられている。

表1～表3に、 $k_1 = 0.1$ において、 $E_1 = 1.0$ pu (分枝1)、 $E_1 = 0.4$ pu (分枝1)、 $E_1 = 0.4$ pu (分枝2)のときの、行列 H 、 H^{-1} および、時定数を変えたときの行列 $T^{-1}H$ の固定値を示す。

表1、表2においては、行列 $-H$ は厳密に M 行列となっており、安定条件Iが成立していることが分る。また、時定数の値を変えた場合も $T^{-1}H$ の固有値は全て負となっており安定である。

図2 電源電圧に対する負荷電圧の軌跡

Fig. 2. Load voltage/source voltage loci.

これに対し表3では、行列 H の非対角要素は全て正となっているが、 H^{-1} の要素は、三つの要素を除いて正となっており、 $-H$ は M 行列となっていない。行列 $T^{-1}H$ の固有値も、一つが正となっており不安定であることがわかる。

すなわち、この例では負荷を一次遅れモデルとして導びいた安定条件と文献(4)で導かれた安定条件とが完全に一致することが示された。

表1 分枝1, $E_1=1.0$ pu における H, H^{-1} および $T^{-1} \cdot H$ の固有値Table 1. Matrices H, H^{-1} and eigenvalues of $T^{-1} \cdot H$ on branch 1 for $E_1=1.0$ pu.

(a) 行列 H				
列 行	1	2	3	4
1	-0.93913	0.03138	0.01885	0.00825
2	0.02256	-0.92249	0.01391	0.01080
3	0.45869	0.23645	-0.85792	0.06218
4	0.04784	0.16434	0.02949	-0.97711

(b) 行列 H^{-1}				
列 行	1	2	3	4
1	-1.07859	-0.04504	-0.02482	-0.01119
2	-0.03621	-1.09253	-0.01898	-0.01359
3	-0.59222	-0.33942	-1.18703	-0.08430
4	-0.07678	-0.19620	-0.04024	-1.02881

(c) 行列 $T^{-1} \cdot H$ の固有値				
時定数 T_1, T_2, T_3, T_4	1	2	3	4
1 1 1 1	-0.94242	-0.75422	-1.00000	-1.00000
10 1 1 10	-9.85751	-9.32011	-0.95553	-0.80969
10 10 1 1	-9.58802	-9.04515	-0.99034	-0.82761
1 1 10 10	-9.90931	-8.45956	-0.95713	-0.88590
1 10 10 1	-9.56247	-8.25909	-0.98500	-0.91367
10 1 10 1	-10.00190	-7.97766	-1.00014	-0.89068
1 10 1 10	-10.00162	-9.00225	-1.00021	-0.78932

表2 分枝1, $E_1=0.4$ p.u. における H, H^{-1} および $T^{-1} \cdot H$ の固有値Table 2. Matrices H, H^{-1} and eigenvalues of $T^{-1} \cdot H$ on branch 1 for $E_1=0.4$ p.u.

(a) 行列 H				
列 行	1	2	3	4
1	-0.87811	0.07763	0.07304	0.04120
2	0.01673	-0.86121	0.02232	0.02420
3	0.91851	0.58498	-0.44962	0.31048
4	0.03547	0.25188	0.04732	-0.94870

(b) 行列 H^{-1}				
列 行	1	2	3	4
1	-1.43033	-0.34795	-0.26626	-0.15813
2	-0.11603	-1.22066	-0.08621	-0.06439
3	-3.24282	-2.62204	-3.00644	-1.19161
4	-0.24603	-0.46787	-0.18280	-1.13652

(c) 行列 $T^{-1} \cdot H$ の固有値				
時定数 T_1, T_2, T_3, T_4	1	2	3	4
1 1 1 1	-0.27295	-0.88468	-1.00000	-1.00000
10 1 1 10	-9.65535	-8.72022	-0.90733	-0.31611
10 10 1 1	-9.16782	-8.53286	-0.97389	-0.31697
1 1 10 10	-9.76827	-4.45470	-0.90961	-0.61005
1 10 10 1	-9.09755	-4.45489	-0.96368	-0.61822
10 1 10 1	-9.99882	-3.39616	-1.00004	-0.71097
1 10 1 10	-10.00142	-8.33597	-1.00007	-0.28961

表3 分枝2, $E_1=0.4$ p.u. における H, H^{-1} および $T^{-1} \cdot H$ の固有値Table 3. Matrices H, H^{-1} and eigenvalues of $T^{-1} \cdot H$ on branch 2 for $E_1=0.4$ p.u.

(a) 行列 H				
列 行	1	2	3	4
1	-0.84450	0.10766	0.15573	0.11650
2	0.00505	-0.85263	0.02331	0.03465
3	1.17176	0.81129	0.17350	0.87792
4	0.01071	0.31248	0.04943	-0.92652

(b) 行列 H^{-1}				
列 行	1	2	3	4
1	-0.61631	0.42491	0.40446	0.32164
2	0.08251	-1.09059	0.06389	0.03012
3	2.89135	3.20196	2.04789	2.42379
4	0.17495	-0.19208	0.13547	-0.93613

(c) 行列 $T^{-1} \cdot H$ の固有値				
時定数 T_1, T_2, T_3, T_4	1	2	3	4
1 1 1 1	-0.834253	-1.00000	-1.00000	0.38409
10 1 1 10	-9.38566	-8.59678	-0.86569	0.45875
10 10 1 1	-8.74807	-8.46878	-0.95868	0.45117
1 1 10 10	-9.65169	2.70653	-1.41831	-0.86478
1 10 10 1	-8.71298	2.59570	-1.50465	-0.94113
10 1 10 1	-9.99921	3.44246	-1.00108	-0.93003
1 10 1 10	-10.00136	-7.86879	-0.99999	0.40715

5. 考 察

数値計算は、2機系統の例しか示していないが、系統規模が大きくなったときに異なる点は、行列 $-H$ が安定側でも非対角要素に正の要素が生じるため完全には M 行列とはならない点である。しかしそれらの正の値そのものは他の負の要素に比べて小さく固有値の実部が全て正等の M 行列の性質は、そのまま保存されていると考えることができる⁽⁸⁾⁽⁷⁾。

文献(4)、(5)で安定条件を導びいた際は、微分方程式の固有値解析の方法によらなかったため理論的明解さに欠ける点があった。これに対し本論文では負荷の動特性を一次遅れでモデル化することにより、文献(9)と合わせて固有値の観点から文献(4)、(5)の安定条件の妥当性をほぼ完全に裏付けることができたと言える。

電圧安定度を解析するには行列 $-H$ 、あるいはそれを縮約した行列 $-G_{NL}$ 、 $-G_{LL}$ の M 行列性を調べることになるが、(10)式の条件下では、 $-G_{NL}$ が M 行列でなくなることにより不安定となる。しかも M 行列を規定する定理1(1)の主座小行列が全て正という条件のうち、定理6により行列式が正という条件が最も崩れやすい条件であるため、運転点が大幅に変わらない場合は、

$$\det(-G_{NL}) > 0 \dots\dots\dots (20)$$

により安定判別が行ない得る。この条件は、(3)式の $k_i=0$, $i=1, \dots, M-1$ の条件のもとでは文献(1)の特性方程式の最終項が正という安定条件に一致するが⁽⁴⁾、安定側では、 k_i の値を変えても安定度にそれほど影響を及ぼさないことが知られている。

(20)式の安定条件は、安定か不安定かを示すだけであり、安定のときどの程度安定かの指標とはなり得ない。これは、系統規模が大きくなると、安定限界付近でも(20)式の値が極めて大きくなるためである。安定度余裕の指標としては、(20)式を線形負荷時の行列式の値で規格化した

$$r = \det(G_{LL}^{-1}G_{NL}) \dots\dots\dots (21)$$

が有効である⁽⁴⁾⁽⁸⁾。

また、電圧安定度が問題となるような系統に対しては、 $-G_{NL}$ の行和(あるいは列和)のうちで負となるもの特に最も小さいノードに対して安定度向上対策を行えば、効果的な対策が行ない得る。これは行列 $-G_{NL}$ が M 行列でなくなるのが、付録定理7より行和(あるいは列和)のうちで負になるものが生じるためであることによる。

最近潮流多根問題の研究が進められているが、電圧安定度の観点からすれば、複数個存在する解のうち最も電圧値の高い解を求めればよい。それはこの解が、 $P-Q$ 指定したノードに定電力特性を有する負荷が接続し、 $P-V$ 指定したノードに電源が接続した条件下での安定解、すなわち $-G_{NL}$ が M 行列となる解となっているためである。潮流方程式を極座標表示、あるいは直角座標表示して Newton-Raphson 法を用いて、この潮流計算上の安定解を求めるためには、初期値を $-G_{NL}$ が M 行列となるように選べばよいことが知られている⁽⁸⁾⁽⁹⁾。 $-G_{NL}$ を M 行列となるようにするには、電圧値を高く選べばよいが、フラットスタートの場合は、この条件は満足され则认为てよい。

潮流計算上の安定解が、実系統においても安定運用可能かどうかについては検討を要する。負荷しか接続していないノードを $P-V$ 指定して潮流計算した場合、潮流計算上の安定解が実際にも安定運用できるか否かは、本論文で述べた安定判定を行なわなければわからない。しかしながら $P-V$ 指定したノードが全て発電機の接続しているノードに対応しているときは、安定運用が可能である。それは、実際の負荷特性が、線形と定電力特性の中間の特性を持つため、実系統の負荷特性に従って $-G_{NL}$ を評価した場合も、 $-G_{NL}$ が M 行列となるためである。以上の議論から、単に安定か不安定かの判定なら潮流計算でも十分であることがわかる。

6. む す び

電力系統の電圧安定度の解析を行なうために、負荷の動特性を一次遅れでモデル化し、平衡点のまわりの線形化微分方程式を導出した。この微分方程式の係数行列の固有値が全て負となれば、負荷電圧は安定となる。負荷特性は、誘導電動機負荷、あるいは負荷端に設置された負荷時電圧調整装置の動作などにより、線形特性と定電力特性の中間にあると考えられる。この条件のもとでは、上記係数行列に負の符号をつけたものは、安定時 M 行列となり負荷のアドミッタンスの変化の時定数の値にかかわらず安定となることが明らかとなった。

更にこの係数行列に負の符号をつけたものが M 行列となるという安定条件により、文献(7)において同一ノードにおける負荷のサセプタンスとコンダクタンスの変化の時定数が同じとの仮定で導びいた安定条件が、時定数の異なる場合でも適用可能であることを明らかにした。これにより従来別の観点から導いていた文献(4)、(5)の安定条件の妥当性が、微分方程

式の固有値の観点からも裏付けられることとなった。

上記結論の妥当性は、一機系統および2機系統における固有値計算によっても確かめられた。

最後に、本研究の遂行にあたり御助言頂いた日立研究所第8部 西原部長、同所82研究室 平沢室長に感謝の意を表する。

(昭和57年6月11日受付、同57年11月8日再受付)

文 献

- (1) V.A. Venikov, et al., "Estimation of Electrical Power System Steady-State Stability in Load Flow Calculations", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-94, 3, pp. 1034 (1975)
- (2) 長崎, 他: 電力技術研究会資料 ET-75-5~ET-75-16 (昭50-5)
- (3) S. Abe et al., "Criteria for Power System Voltage Stability by Steady State Analysis", *IEEE Summer Meeting A* 75, 435-8 (1975)
- (4) 阿部・磯野: 「電力系統の電圧安定判別法(その1・理論)」電学論B 96, 9 (昭51-4)
- (5) 同上: (その2・計算機シミュレーション) 17
- (6) 武田・上村: 「系統の受電電圧の安定条件と負荷特性との関係」電学論B 97, 557 (昭52-9)
- (7) S. Abe et al., "Power System Voltage Stability, *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-101, 10, pp. 3830 (1982)
- (8) 阿部・磯野: 「電圧安定限界付近の電力潮流計算における初期値選定法」電学論B 97, 23 (昭52-1)
- (9) S. Abe, et al., "Load Flow Convergence in the Vicinity of a Voltage Stability Limit", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-97, 6, p. 1983 (1978)
- (10) R.S. パーガ: 「計算機による大型行列の反復解法」(昭47)サイエンス社
- (11) M. Fiedler & V. Pták: "On Matrices with Non-Positive Off-Diagonal Elements and Positive Principal Minors", *Czech. Math. J.*, 12, No. 3, pp. 382 (1962)
- (12) 荒木: 「M行列とその応用-I」システムと制御 20, 12, 675 (昭51)

付 録

I. 本論文に関連したM行列の定理について述べるが、証明は文献(10)~(12)を参照して頂きたい。なお文献(12)には、M行列の詳しい解説がある。

定義1 ベクトル x において、 $x \geq 0$ ($x > 0$) とは x の全ての要素が正または0 (正) になることをいう。また n 次正方行列 $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ において $A \geq B$ ($A > B$) とは、 $a_{ij} \geq b_{ij}$ ($a_{ij} > b_{ij}$), $1 \leq i, j \leq n$ なることを言う。

定義2 集合 Z を非対角要素が負または0の正方行列の集合とする。

定理1 n 次正方行列 $A=(a_{ij}) \in Z$ において次の五つの条件は互いに等価である。

(1) A の左上隅主座小行列式が全て正である。すなわち、

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} > 0 \quad k=1, \dots, n \quad \dots\dots (付1)$$

(2) $Ax > 0$ となる $x > 0$ が存在する。

(3) $A'y > 0$ となる $y > 0$ が存在する。

(4) A は正則行列で $A^{-1} \geq 0$ となる。

(5) A の固有値の実部は全て正である。

定義3 正方行列 $A \in Z$ において、定理1の5つの条件のどれかを満たすとき、行列 A を M 行列と呼ぶ。

定理2 T を対角要素が正の n 次対角行列とし、 A を n 次の M 行列とする。このとき $T \cdot A$, $A \cdot T$ とも M 行列となる。

定理3 n 次正方行列 $A, B \in Z$ において、 A は M 行列で $A \leq B$ とすると

(1) A, B は正則行列で $A^{-1} \geq B^{-1} \geq 0$

(2) $\det B \geq \det A > 0$

定義4 n 次正方行列 $A(n \geq 2)$ が、ある n 次の置換行列 P によって

$$PA P^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (付2)$$

$A_{11}: r \times r$ 小行列, $A_{22}: (n-r) \times (n-r)$ 小行列, $1 \leq r \leq n$ と表わせるならば行列 A は可約であるという。もしもこのような置換行列 P が存在しなければ、行列 A は既約であるという。

定義5 有向グラフにおいて任意のあるノードから任意の他のノードへの経路が存在すれば、この有向グラフを強連結と呼ぶ。

定理4 行列 A が既約であるための必要十分条件は、その有向グラフが強連結となることである。

通常の接続状態では、付録IIで定義される G_{LL} , G_{NL} は、既約行列と考えてよい⁽⁴⁾。

定理5 A を M 行列とする。このとき $A^{-1} > 0$ となるための必要十分条件は、 A が既約となることである。

定理6 n 次正方行列 $A \in Z$ は既約行列で $\epsilon > 0$ に対して $A + \epsilon E$ は M 行列になるとする。このとき n 次を除いた A の主座小行列式は全て正である。

定義6 n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ において

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad 1 \leq i \leq n \quad \dots\dots\dots (付3)$$

が全ての i に対して成立するとき、 A を優対角行列と呼ぶ。また A が既約行列で(付3)式で少くとも一つの i に対して狭義の不等式が成立するとすれば、 A を既約優対角行列と呼ぶ。

定理 7 n 次正方形行列 $A=(a_{ij}) \in Z$ において対角要素は正とする。このとき A が既約優対角行列であれば $A^{-1} > 0$, (付3)式の等式が全て成立すれば行列 A は特異で, (付3)式が全て成立しなければ, A は M 行列ではない。 A^T に対しても同様な関係が成立する。

定理 8 n 次行列 $A \in Z$ を既約優対角行列とし, $A^{-1} = B = \{b_{ij}\}$ とする。このとき次の不等式が成立する。

$$b_{ii} \geq b_{ji} > 0 \quad i, j=1, \dots, n \quad \dots\dots\dots(\text{付4})$$

II. (9)式の H の要素の評価方法について示す。

(8)式的全微分をとると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \Delta B_L \\ \Delta G_L \\ \Delta R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial g_B / \partial V & \partial g_B / \partial \theta \\ \partial g_G / \partial V & \partial g_G / \partial \theta \\ \partial g_R / \partial V & \partial g_R / \partial \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial g_R / \partial G_L \end{bmatrix} \Delta G_L \quad \dots\dots\dots(\text{付5})$$

(3)式において $\Delta R = 0$ が仮定されているから, (付5)は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \Delta B_L \\ \Delta G_L \\ -\partial g_R / \partial G_L \cdot \Delta G_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial g_B / \partial V & \partial g_B / \partial \theta \\ \partial g_G / \partial V & \partial g_G / \partial \theta \\ \partial g_R / \partial V & \partial g_R / \partial \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(\text{付6})$$

従って, (7)式の第1式目の ΔV は次式により求まる。

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial g_B / \partial V & \partial g_B / \partial \theta \\ \partial g_G / \partial V & \partial g_G / \partial \theta \\ \partial g_R / \partial V & \partial g_R / \partial \theta \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \Delta B_L \\ \Delta G_L \\ -\partial g_R / \partial G_L \cdot \Delta G_L \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(\text{付7})$$

ここで次の偏微分の逆変換の関係が成立するから,

$$\begin{bmatrix} \partial g_B / \partial V & \partial g_B / \partial \theta \\ \partial g_G / \partial V & \partial g_G / \partial \theta \\ \partial g_R / \partial V & \partial g_R / \partial \theta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \partial V / \partial B_L & \partial V / \partial G_L & \partial V / \partial R \\ \partial \theta / \partial B_L & \partial \theta / \partial G_L & \partial \theta / \partial R \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(\text{付8})$$

(9)式の $\partial V / \partial B_L$, $\partial V / \partial G_L$, $\partial V / \partial R$ は, q_R を V と θ のみの関数として(付8)式を解けば求まり, $\Delta R = -\partial g_R / \partial G_L \Delta G_L$ とすればよい。

ここで

$$\begin{bmatrix} \partial g_B / \partial V \\ \partial g_G / \partial V \\ \partial g_R / \partial V \end{bmatrix} = F_1, \quad \begin{bmatrix} \partial g_B / \partial \theta \\ \partial g_G / \partial \theta \\ \partial g_R / \partial \theta \end{bmatrix} = F_2, \quad \begin{bmatrix} \partial g_G / \partial \theta \\ \partial g_R / \partial \theta \end{bmatrix} = A_2$$

とすると, (付8)式より,

$$\partial V / \partial B_L = (F_1 - A_1 A_2^{-1} F_2)^{-1} \triangleq G^{-1} \quad \dots\dots\dots(\text{付9})$$

$$[\partial V / \partial G_L \quad \partial V / \partial R] = -G^{-1} A_1 A_2^{-1} \quad \dots\dots\dots(\text{付10})$$

となる。 G は, 縮小ヤコビアン行列と呼ばれ, G_L , B_L を一定すなわち線形負荷として評価している⁷⁾。このときの G を G_{LL} と表わし, 負荷特性が非線形としたときの G を G_{NL} で表わす。すなわち

$$G_{NL} = G_{LL} - \partial f_B / \partial V + A_1 A_2^{-1} \begin{bmatrix} \partial f_G / \partial V \\ -\partial g_R / \partial G_L \cdot \partial f_G / \partial V \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(\text{付11})$$

文献(4), (5)で与えられた G を G' で示すと, 上記 G と G' との関係は次式で与えられる⁷⁾。

$$G' = -\text{Diag}(V_1^2, \dots, V_N^2) G \quad \dots\dots\dots(\text{付12})$$