UDC 621.3.088.6:51-74:[621.317.332.1+621.317.727.1]

論文

58-B55

過渡インピーダンスの測定誤差および分圧器の变わい誤差補正への時間領域相乗行列法の適用

正員 加藤 利次 (同志社大)

正員 岩本 国三 (同志社大)

1. 緒言

エレクトロニクス技術の近代の発展に伴い、計測システムの発展もまた著しい。急しゅん衝撃注入電流源と、その応答測定法の進歩、あるいは高レベルの衝撃電圧に対し、高度の立ち上がり応答を示す高性能分圧器の登場、光ファイバーによる測定法等の進歩と並進して、自動計測システムによる、デジタル化記憶が普遍化し⁽¹⁾⁽²⁾、データのオンライン計算処理も可能と見られるようになった。

このようにシステムが高度化すれば、それが伴う観測誤差の問題も見過すことはできず、この補正を如何に実施すべきかが問題である。例えば電圧電流法により、インピーダンスを測定する場合、従来よく見られた電圧・電流の瞬時値相互間の割算をもって過渡インピーダンスを定めるような方式は適切でない。これを補正し、真の過渡インピーダンスとしての意味をもつインディシャル応答を得るには如何になすべきか、また变わい特性を含んだ分圧器によるひずんだ測定電圧に対し、真の電圧を如何に求むべきかが新たな題目である。この種の修正問題は、数理的には相除問題に帰着する。これが古く我が国において最初に指摘された当時は⁽³⁾、演算に手数を要することからその実行に困難な事情もあったが、今日では電子計算機の発展により、かつての難事も実行できるものになり、そのオンライン化も不可能でないと言えることができる。

この相除に関連した問題は、近来種々海外で着目されている⁽⁵⁾⁻⁽⁹⁾。それらの手法は、变わい誤差の意義とか相除の原理を見るものとして興味深いが、実際の

観測値に対する応用に対しては、それぞれ実施にかなりの困難が起きるように思われる。

本論文では、困難な局面に適する時間領域法の解法、相乗行列法⁽¹⁰⁾について、その成果を論述するものである。被演算関数が悪条件(2・4参照)をなすとき、修正相乗行列法が特に有効であること、その実証例として、文献各種より取材した悪条件のデータに関し演算の成功例を示す。

2. 相除法における相乗行列法

2・1 相除法の原理 線形時不変回路系において、1端子対の注入電流によるその端子対の、もしくは1端子対の入力電圧による他端子対の伝達電圧を得る場合、図1のように入力波を $x(t)$ 、出力波を $y(t)$ 、系のインディシャル応答波を $g(t)$ とすると、3者の関係は次式である。

$$y(t) = g(t) \star x(t) \\ = g(+0)x(t) + \int_0^t g'(t-\tau)x(\tau)d\tau \quad (1)$$

第1行の記号 $\star$ は階段相乗記号である。

$y(t)$ および $g(t)$ が可観測かつ既知であるとき、 $x(t)$ を両者から算出できる見込みがあり、一つの演算形式が存在する。分圧器の变わい誤差の補正問題はこの形式に属している。もし、 $x(t)$ 、 $y(t)$ が既知で $g(t)$ が不明であれば、数理上は前記の表現で $x(t)$ と $g(t)$ を交換すればよく、過渡インピーダンスの補正問題はこの形式に該当する。前者と後者は数理上同一内容ゆえ、以下前者の表現に従うものとすれば、 $x(t)$ を得る

Fig. 1. A block diagram showing the relationship between input $x(t)$, output $y(t)$ and the system function $g(t)$.

Application of Convolution Matrix Method in Time-Domain for Correction of Errors in Transient Impedance Measurement and Potential Divider with Deformation. By Toshiji Kato, Member & Kunizo Iwamoto, Member (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Doshisha University).

加藤利次: 正員, 同志社大学工学部電気工学科
岩本国三: 正員, 同志社大学工学部電気工学科

関係は式の第1行に対応し、次式で表現できる⁽⁴⁾。

$$x(t)=y(t) \diagup g(t) \dots \dots \dots (2)$$

(2)式は相乗の逆の演算であるから、相除と呼び、使用した記号 $\diagup$ を相除記号と呼ぶ。相乗が平易な積分方程式で表現されるに対し、一般に相除を数式化することは複雑となる。相除の解析解の例は、級数展開法が普遍的で、テーラー展開による法⁽⁸⁾、相乗べき級数展開法⁽⁴⁾などがある。後者は、著者等の検討⁽¹¹⁾によればかなり有用である。なお、原時間関数を数値的に求めるものとしてFFT等を利用し周波数成分間の除算に帰着させる方法もあるが、観測関数を対象とするときは雑音的に含まれる部分波に、特に対処し難いこと⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾が経験せられる。

数値的方法の他のものとして、(1)式を行列解法に帰着させることが考えられる。更にこれを改良し、修正相乗行列法と名付けた処理に発展させることができる。この最後のものは雑音的部分波を含有していると思われる観測関数に対し、本論文の成果に見られるように、特に有用な相除法である。

〈2.2〉 相乗行列法 (1)式は時間関数の離散化によって、離散点が満足すべき条件を一次方程式群で表現できる。すなわち離散数列より形成したマトリックスを g 、ベクトルを y, x とすれば、3者の関係は

$$y=gx, g=[g_{ij}] \dots \dots \dots (3)$$

g を以後相乗行列と呼ぶ。(3)式の逆の演算は

$$x=g^{-1}y \ (|g| \neq 0) \dots \dots \dots (4)$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} x &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n]^t \\ y &= [y_1 \ y_2 \ y_3 \ \dots \ y_n]^t \\ g_{ij} &= \begin{cases} 0 & (i < j) \\ a_{i-j+1} & (i \geq j, j \neq 1) \\ \bar{a}_i & (i \geq j, j=1) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

g の各要素記号が但し書きの如く定められると、 g は下三角行列を形成する。各要素記号は、もしこれを i とすれば時間刻み h に対し、時刻 $t_i=(i-1)h$ のサンプル点を示す。また記号 t は転置記号を示す。 g は離散化形式により、内容が支配されるが、台形則を適用すると1階の時間微分記号を $'$ として、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= g_1 + h g_1'/2, \bar{a}_1 = g_1 (g_1 \neq 0) \\ a_i &= h g_i' \ (i=2, 3, \dots, n-1) \\ \bar{a}_i &= h g_i'/2 \ (i=2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

$g_1=0$ のときの $\bar{a}_1$ の与え方については、(11)式で示す。上記の $g(t)$ の微分値に与えるべき離散値 g_i' は、 $x(t)$ をステップ関数とすれば次式を見て定める。

$$y_i = \sum_{k=1}^{i-1} a_k + \bar{a}_i \ (i \geq 2) \dots \dots \dots (7)$$

台形則を適用した a_k に対応するときは次式となる。

$$y_i = g_1 + \sum_{k=2}^{i-1} h g_k' + \frac{h}{2} (g_1' + g_i') \ (i \geq 2) \ (8)$$

数値微分を用いた g_i' の系列は、一般に $y_i \neq g_i$ を招き、良好な近似が得られない。これを避ける行列 g の要素の関係は、台形則によるとき次式が望ましい。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (g_1 + g_2)/2 \\ a_i &= (g_{i+1} - g_{i-1})/2 \ (i=2, 3, \dots, n-1) \\ \bar{a}_i &= (g_i - g_{i-1})/2 \ (i=2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

この場合には、(7)式に代入したステップ関数との相乗値 y_i は原関数 g_i と合致し、ほぼ良好な変換が得られる。 $\bar{a}_1$ の与え方としては、ただ単純に $\bar{a}_1 = g_1$ と与えると $g_1=0$ のとき行列が特異となるため、 $t=+0$ における x_1 と y_1 との初期値間の関係により定める。 $x(+0)$ を得る局面は $g(+0)$ が初期値を有する場合と零の場合に分けられ、次の如くなる。

$$x(+0) = \begin{cases} y(+0)/g(+0) & (g(+0) \neq 0) \\ y'(+0)/g'(+0) & \dots (10) \\ (g(+0)=0, g'(+0) \neq 0) \end{cases}$$

$g(+0)=0$ のとき(10)式の右辺の分子は分母以上の次数で零であることが必要である。これが満足されぬときは観測可能な現象としての $x'(+0)$ の解は存在しない。 m 回微分値 $g^{(m)}(+0)=0 \ (m>1)$ の際は更に $y(t)$ と $g(t)$ の高次の微分比が要請されるが、観測関数では $g'(+0) \neq 0$ が多い。従って、(10)式による x_1, y_1 の関係式は

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= g_1 x_1 \ (g_1 \neq 0) & \bar{a}_1 &= g_1 \\ y_1' &= g_1' x_1 \ (g_1=0, g_1' \neq 0) & \bar{a}_1 &= g_1' \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

すなわち、 $g_1 \neq 0$ の際は $\bar{a}_1 = g_1$ とし、 $g_1=0$ の際は $\bar{a}_1 = g_1'$ かつ y_1 に y_1' の値を置き換えて(3)式における第1行目の関係とすればよい。

このように初期値を確定させて、これを方程式中に取り入れた行列 g は下三角で、かつ対角要素に平行な要素は、第1列要素を例外として同値になる規則性を持ち、Toeplitz行列に似た行列となる。その演算処理は容易で逆行列を求めることなく高速処理を図ることも可能となる。

〈2.3〉 相除行列 (4)式で行列 g^{-1} は相除行列と呼ぶべき基礎行列となり、任意のベクトル y について相除結果の導出を可能にする。この行列は必ずしも導出の必要はないが、演算上の意義が重要であるのでその性質の概略に触れておく。

まず、最初に初期値非零の零次遅れ関数 $(1+t)H(t)$ 、 $(H(t):$ ステップ関数)について、図2(a)に相乗行列、同図(b)にToeplitz行列部分だけを取った逆

図 2 $(1+t)H(t)$ の (a) 相乗および (b) 相除行列の最下行要素

Fig. 2. Bottom row of a convolution matrix, (a), and that of inverse-convolution, (b), for $g(t)=(1+t)H(t)$.

行列の最下行要素値を示す。(a)は原関数, (b)はその相反となる関数⁽¹¹⁾ e^{-t} の各微分に比例した値を順調にあらわしている。次に初期値零の上湾曲一次遅れ関数 $(1-e^{-t})H(t)$ および下湾曲一次遅れ関数 $(1-e^{-t}\cos 2t)H(t)$ について同様に最下行要素値をとると, それぞれ図 3(a), (b) および同図(c), (d)となり, 逆行列要素値は正負に振動を生じ, 興味深い動向となる。同じ一次遅れでも上湾曲と下湾曲では全く傾向が異なり, 後者の演算に著しい困難を生じることが容易に理解できる。

〈2.4〉 相除法における悪条件 図 3(d) の如く, 一般に $g(t)$ の立ち上がりが悪く, 初期において零の付近に長く止まれば, 相除行列の最下行要素値は, 大きな t に対応するほど大きな値を持ち, 行列処理上, 1 種の悪条件を生じる。

図 3 $(1-e^{-t})H(t)$, (a) および (b), $(1-e^{-t}\cos 2t)H(t)$, (c) および (d) の相乗および相除行列の最下行要素

Fig. 3. Bottom rows of two convolution matrices and those of inverse-convolutions for $(1-e^{-t})H(t)$, (a) and (b), and $(1-e^{-t}\cos 2t)H(t)$, (c) and (d).

図 4 相乗行列の処理過程中に発生する悪条件の説明図

Fig. 4. An illustration of the ill-conditions which occur in the process of convolution matrix method.

図 4 は下三角行列処理の 1 段階を示したもので, $x(t)$ と $g(t)$ を相乗し $y(t)$ を得た局面を示す。相除の分母 $g(t)$ が下湾曲の一次遅れの場合とする。同図では相乗による初期値部分の変化が比較的ならぬ関数 $y(t)$ となっている。上記部行以外の $x(t)$ および $g(t)$ の原データに含まれた情報は相乗により混りあいその分解を行なうことは困難である。図の行列表現は y より x を下三角行列処理で算出する際, x_1 から次々に x_{i-1} まで獲得して次に x_i を得ようとしている段階である。 t_i における関係式は(4), (5)より

$$a_1 x_i + \sum_{j=2}^{i-1} a_{i+1-j} x_j + \bar{a}_i x_1 = y_i \dots \dots \dots (12)$$

$$x_i = \frac{1}{a_1} \left(y_i - \sum_{j=2}^{i-1} a_{i+1-j} x_j - \tilde{a}_i x_1 \right) \triangleq \frac{\hat{x}_i}{a_1} \quad (13)$$

ここで、 x_i , a_i , $\hat{x}_i$ は図中においてそれぞれ斜線を施した部分である。離散化方程式を解く過程は、この図解により y_i に含まれた情報から、 $j=1$ より $j=i-1$ に至る x_j , a_j 群の過去の値の寄与を消去し、最終的に現時点のみの寄与、すなわち x_i を入力し、 a_1 との相乗による、微小な変化 $\hat{x}_i$ を抽出することにある。もし $g(t)$ の立ち上がりが悪いならば、 a_1 は非常に小さい値をとり、新しい情報としては僅かな $\hat{x}_i$ 分の寄与しか得られない。これに加えて、毎回微小な値 a_1 で割るから、誤差の累積が起り易く、誤差がまた誤差を生み、この結果逆行列の形成が悪化するに至ることが容易に理解できる。この回避になるものとして上記の特徴をよく捉えて、かえてこれを転用した形の修正行列法が有望となる。

3. 相乗行列法におけるデータの平滑化

観測関数はデータとして与えられるとき、本質的に誤差を付随しているかまたは乱れがある。これらの誤差の影響は相乗行列 g の対角要素が小さいときに顕著

となり解が不正確となる。従って g の離散化の状況あるいは y 自身が測定誤差を含む状況により、解 x が相当に影響を受けるときは、(3)式を常に拘束条件とすることに不都合がある。従って(3)式に適当な変形を与え、もし良い結果が得られればこれに変更する必要がある。

これより(3)式とほぼ同形式のもとに離散化積分誤差および測定誤差をまとめた誤差項 ε を追加し、次式を条件とすることが考えられる。

$$y = g x + \varepsilon \dots \dots \dots (14)$$

E^2 を許容を評価する誤差とすれば、新拘束条件は

$$\varepsilon^t \varepsilon = (y - g x)^t (y - g x) \leq E^2 \dots \dots \dots (15)$$

ベクトル ε は今のところ未決定であるが、相除解 x が最も滑らかであるという条件の導入をもってその決定に代えることができる。

従って、相除問題は(1)式で与えられた相乗積分方程式の関係をほぼ満足し、(15)式の許容誤差 E^2 内でできるだけ滑らかな関数を見出すことが代えられる。

このようにして、(15)式の拘束条件のもとで次式に示す曲率 S を最小にする解を見出すものとする。

図 5 相除とその真値の差(a)と(c), および分子と再相乗の差(b)と(d)を示す相乗行列法の各種相対誤差

Fig. 5. Various relative errors showing both differences between the inverse-convolutions and their true values, (a) and (c), and the numerators and the return convolutions, (b) and (d) in convolution matrix method.

$$S = \int_0^{t_{\max}} (x''(t))^2 dt \quad (t_{\max} = (n-1)h) \quad (16)$$

三次スプライン(Spline)関数を適用し、次に示す変換行列 $T = (T_{ij})$ $D = (D_{ij})$ を使用した離散化をはかる。

$$S = h \left(\frac{6}{h^2} T^{-1} D x \right)^t \left(\frac{6}{h^2} T^{-1} D x \right) \dots (17)$$

$$T_{ij} = \begin{cases} -1 & (i=j=1 \text{ または } i=j=n) \\ 1 & (|i-j|=1) \\ 4 & (i=j \text{ かつ } i \neq 1 \text{ かつ } i \neq n) \\ 0 & (|i-j| > 1) \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & (|i-j|=1 \text{ かつ } i \neq 1 \text{ かつ } i \neq n) \\ -2 & (i=j \text{ かつ } i \neq 1 \text{ かつ } i \neq n) \\ 0 & (|i-j| > 1 \text{ または } i=1 \text{ または } i=n) \end{cases}$$

制約つき最小問題は、非線形計画問題であり、ラグランジュ乗数 λ^{-1} を用いることにより、制約なし最小問題となる。すなわち、ラグランジュ関数 $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L}(x) \triangleq (T^{-1} D x)^t (T^{-1} D x) + \lambda^{-1} \{ (y - g x)^t (y - g x) - \varepsilon^t \varepsilon \} \quad (18)$$

最小条件は $\partial \mathcal{L} / \partial x = 0$ であり、(14)、(15) および (18) 式より相乗積分方程式は次式となる。

$$y = g^{-1} \{ g^t g + \lambda (T^{-1} D)^t (T^{-1} D) \} x \dots (19)$$

同種の発想は、最初 Phillips⁽¹⁵⁾ によりなされた。これは、二次微分を2階の差分で代用したものであるが、本来滑らかであるという条件はスプライン関数を用いて導出する方が妥当であるが故に、本論文ではスプライン関数によった。なお、 λ はラグランジュ乗数の逆数であるが、これを平滑化係数とみることができる。 $\lambda=0$ は平滑化なしの状態を示し、 λ を大とするとつれて平滑化が強くなる。従って状況を見て λ の値を

表 1 テストに用いた5基本関数。 $y(t)$ 分子、 $g(t)$ 分母、 $a(t)$ 真値。5つの記号で分類する。

Table. 1. Basic 5 functions used in test. $y(t)$ is the numerator, $g(t)$ the denominator, and $a(t)$ the true value. Five symbols are used to classify the cases.

記号	基本関数		
	$y(t)$	$g(t)$	$a(t)$
⊙	1	$1+t$	$\exp(-t)$
△		$\exp(0.5t)$	$1-0.5t$
+	$\sin(t)$	t	$\cos(t)$
×	$1-\exp(-0.5t)$		$0.5\exp(-0.5t)$
◇	t	$t \exp(-t)$	$1+2t+t^2/2$

図 6 相乗行列法における平滑化の効果 (対図 5(c))

Fig. 6. The data-smoothing effects of convolution matrix method for the cases in (c) of Fig. 5.

適宜決定する必要がある。

(19) 式による効果を見ることを兼ねて表 1 にある若干の基本的関数について、相除を実施した。プロット記号の分類は同表中にある。この際、誤差評価法は次の2種類とした。その1は真値 $a(t)$ と演算値 $x(t)$ の差であり、その2は与値 $y(t)$ と、再相乗検定 $x(t) \times g(t)$ の差である。ともに $a(t)$ 、 $y(t)$ の最大値でそれぞれ除し、比誤差の評価とした。これらを $e_{vr}(t)$ 、 $e_{sr}(t)$ とすれば、次式に該当する。

$$e_{vr}(t) = \{x(t) - a(t)\} / a(t)_{\max} \dots (20)$$

$$e_{sr}(t) = \{x(t) \times g(t) - y(t)\} / y(t)_{\max} \dots (21)$$

平滑化なしの前者の誤差を図 5(a)、(c) に、後者の誤差を図 5(b)、(d) に示す。この中振動を起す最大もののみのプロットの都合上 1/2 縮尺とした。非振動の e_{vr} は高々 0.2% に止まり、 e_{sr} をとるときは更に1けた程度以上精度が向上する。振動を付随するものは簡単に精度を言及できない。一般に $x(t)$ の動向は再相乗検定に対し少しルーズで、 $e_{vr}(t)$ がかなり大であっても殆んどすべての場合、 $e_{sr}(t)$ はそれよりも小さく収まる。

図 6 は $\lambda=1$ で、平滑化ありの成果が大きかったものの結果を示し、図 5(c) に対応する。振動のために大きく見えた誤差が、高々 0.6% 程度に抑えられている。一般に平滑化の効果は全体として誤差レベルを若干下降させる効果がある。

4. 修正相乗行列法

相除行列 g^{-1} の悪条件は、相乗行列 g の対角要素の絶対値が小さく、対角よりすこしずれたところで最大値を生じる状態で起きる。実際問題としては、インピーダンス測定の際の注入電流、分圧器の変わり誤差補正における分圧特性など、分母の初期値が零であり、しかも立ち上がりに遅れがある場合に起きる。この難

点の処理は本質的に平滑化条件と無関係であるため、独立したさらに一段の工夫が必要である。以下は顕著に効果を収めた一般対策法である。立ち上がりが良い場合の対処は、与えた変形を極度に縮小して既述のものに戻るから、この方法は相乗行列法の拡張である。

図7(a)に示す如く一つの分母関数 $g(t)$ を整数 L による適当な遅れ時間 $t_L = (L-1)h$ で二つに分割し、初期立ち上がりが良い部分 $a(t)$ と悪い部分 $b(t)$ に分ける。

$$g(t) = a(t) + b(t) \dots \dots \dots (22)$$

この分離において $a(t)$ による相除は、 t_L だけの時間ずれを工夫すれば常に安定して施行可能である。他方、(2)式に対応する関係を作る変形を行なうと、

$$x(t) = \frac{\{y(t) - b(t) \star x(t)\}}{\{a(t) \star \dots \star \frac{H(t-t_L) \star H(t+t_L)}{H(t+t_L)}\}} \dots \dots (23)$$

上式において、演算 $\star H(t+t_L)$ は関数を時間的に t_L だけ進めることを意味する。また同式の分子は、図7(b)の如く不確定である現象 $b(t) \star x(t)$ を取り除き、 $x(t)$ の $a(t)$ に対応する応答を求める意味になる。同式はインプリシットで、右辺の $x(t)$ が既知である必要があり、また、左辺と右辺で $x(t)$ の定義域が異っている。この打開として逐次法が適用できる。すなわち $t_{\max} = (n-1)h$ として、まず次の如く $\hat{x}(t)$ に対し $x(t)$ を定義する。

$$x(t) = \begin{cases} \hat{x}(t) & (0 < t \leq t_{\max} - t_L) \\ \hat{x}(t_{\max} - t_L) & (t_{\max} - t_L < t \leq t_{\max}) \end{cases} \dots \dots \dots (24)$$

図7 修正相乗行列法における $g(t)$ の $a(t)$ および $b(t)$ への2分割、(a)とその効果(b)の説明図

Fig. 7. An illustration of partitioning $g(t)$ into $a(t)$ and $b(t)$, (a), and its effect, (b), for the modified convolution matrix method.

この定義は本来不確定な $x(t)$ に対して、 $t_{\max} - t_L < t \leq t_{\max}$ の領域において一定値 $\hat{x}(t_{\max} - t_L)$ をおく仮定をとることにより、結果の数値的安定を図ろうとしたものに外ならない。

(23), (24)両式につき、次の予測修正を繰返す。

$$\hat{x}^{(i)}(t) = \frac{\{y(t) - b(t) \star \hat{x}^{(i-1)}(t)\}}{\{a(t) \star \dots \star \frac{H(t-t_L) \star H(t+t_L)}{H(t+t_L)}\}} \dots (25)$$

$a(t) \star H(t+t_L) = \hat{a}(t)$, $\{b(t) \star H(t-t_L)\} \star H(t+t_L) = \hat{b}(t)$, $y(t) \star H(t+t_L) = \hat{y}(t)$ とおけば、上式を行列表現に置き換えて、 $\hat{x}^{(0)}$ を次形式で与える。

$$\hat{x}^{(0)} = \hat{a}^{-1} \hat{y}, \hat{x}^{(i)} = \hat{a}^{-1} (\hat{y} - \hat{b} \hat{x}^{(i-1)}) \dots (26)$$

上の反復修正法の原理によれば、 $-\hat{a}^{-1} \hat{b}$ の固有値の最大値が、1より小なるとき収束し、次式に帰着する。

$$\hat{x} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-\hat{a}^{-1} \hat{b})^k \hat{a}^{-1} \right\} \hat{y} = (\hat{a} + \hat{b})^{-1} \hat{y} \triangleq \hat{g}^{-1} \hat{y} \dots \dots \dots (27)$$

上記を(4)式と相対的にみると、 g を $\hat{g} = (\hat{a} + \hat{b})$ に置き換えたものにほかならない*。

このように、 t_L の操作による状況を図解すれば図8(b)となる。本来の相乗行列方程式は同図(a)であるが、前記の処置を行なうと変数 x, y を $\hat{x}, \hat{y}$ に置き換え、 g を $\hat{a}$ と $\hat{b}$ とに分解し、 $\hat{a}, \hat{b}, \hat{y}$ を時間的に t_L だけ進め、更に $\hat{b}$ につき左上のはみ出た部分を省略し、右下のはみ出た部分を折り返し $\hat{b}$ を作成したことに該当する。この図8(b)は説明のため誇張してあるが、 $\hat{b}$ の部分の要素値は事実上極めて小さい。

実用上の計算対象について、この方法を実施すると

図8 通常行列法(a)と修正相乗行列法(b)に果たす各行列の役割の説明図

Fig. 8. Explanation of the roles of ordinary convolution matrix (a) and the modified one (b).

*: 但し、 $\hat{x} = [x_1, x_2, \dots, x_{n-L}]^t$, $\hat{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^t$, また $\hat{a}, \hat{b}$ は個々に求める必要はなく、その和である $\hat{g} = [\hat{g}_{ij}]$ を $g = [g_{ij}]$ より求めればよい。

$$\hat{g}_{ij} = \begin{cases} g_{i+L, j} & (j \neq n-L) \\ \sum_{k=n-L}^n g_{i+L, k} & (j = n-L) \end{cases} \quad (1 \leq i, j \leq n-L)$$

驚ろくべき良好な成績を示し、平滑化を適用するのみでは不満のあった計算を更に安定させ、かつ精度を向上させることができた。この操作は $g(t)$ の初期部分の値が小さい場合のみの対象としているので、解への影響が必然として小さいことが非常に幸いしている。実測データは常に初期の立ち上がりが貧弱不明確で情報性に乏しいから、このような変形は実測上の実情に非常に適しているようである。

5. 相除法のインピーダンスおよびインパルス電圧測定への応用

〈5.1〉 過渡インピーダンスの補正計算 過渡インピーダンスの測定には、電圧電流法が広く用いられる。注入電流はステップ関数が理想であるが、実用上の理由で完全なステップを形成できず、初期部分にわい曲を生じるのが常である。

算出の実例として送電鉄塔の接地インピーダンスの測定に関するデータを3例とりあげる。図9(a)は、文献(17)を参照した測定電流 $i(t)$ 、測定電圧 $v(t)$ とこれらにサンプル数 $n=76$ をもって実施した演算 $v(t)/i(t)$ を実線で示し、なおその再相乗検定 $i(t) \otimes z(t)$ を破線で示す。この場合の t_L は零にとり得て、図に見るようなよい成果を得る。再相乗検定の結果は、 $t=1.25 \mu s$ 近傍に生じたかすかな偏倚を除き非常によい合致を得る。得た $z(t)$ は単なる割算値 $v(t)/i(t)$ を用いたインピーダンス評価よりもより確かな評価を与えることは明らかである。

図9(b)は文献(18)を参照したもので、 $i(t)$ 、 $v(t)$ 両波形ともに立ち上がりがゆるく、特に $i(t)$ に関しては若干の寄生振動と下湾曲立ち上りに不明確性がある。同図は本修正行列法発展のため最も役立つことになった悪い波形である。使用サンプル数81個、 $t_L=0.06 \mu s$ 付近でよい成果が得られた。相除結果 $z(t)=v(t)/i(t)$ を実線で示し、その再相乗検定 $z(t) \otimes i(t)$ を破線で示す。原波形が悪いにもかかわらず両者に比較的良好な合致を得たことが判る。初期部分と $t=0.8 \mu s$ 付近以降の両者に若干のへだたりがあるが、多くとも0.5%以下の偏倚に止まる。

図10(c)はアメリカ BPA 局による鉄塔インピーダンスの測定データ⁽¹⁹⁾を参照したもので、 $i(t)$ は早い立ち上がりをもつが、 $v(t)$ はゆるい下湾曲の上昇をなす。サンプル数101点、 $t_L=0.03 \mu s$ で得た $v(t)/i(t)$ は算術的 $v(t)/i(t)$ をもって評価する値とは差違がある。その再相乗検定の結果は $t=0.05 \mu s$ と $0.1 \mu s$ において若干の偏倚を生じるが、他は概ね良く原波形

$v(t)$ に合致している。

なお、計算のプロットはプリンタプロッタによっており、サンプル点の不足により屈曲の見えたものもあるがすべて原図のままである。

〈5.2〉 分圧器による変位誤差補正 まず、は

図9 オシログラムよりとられた注入電流 $i(t)$ および応答電圧 $v(t)$ 。補正インピーダンス $z(t)=v(t)/i(t)$ および $i(t) \otimes z(t)$ による再相乗 Fig. 9. Injection current $i(t)$ and response voltage $v(t)$ taken from the oscillogram. The corrected impedance is shown as $z(t)=v(t)/i(t)$, and the return convolution as $z(t) \otimes i(t)$ by dotted line.

図 10 分圧特性 $\xi(t)$ 、測定電圧 $f(t)$ 、補正入力波 $e(t) = f(t)/\xi(t)$ および再相乗検定 $e(t) \times \xi(t)$

Fig. 10. Deformation characteristic $\xi(t)$ and measured voltage $f(t)$. The corrected input wave $f(t)/\xi(t)$ and the return convolution $e(t) \times \xi(t)$.

じめに図 10 の測定波 $f(t)$ および分圧器の構造から理論的に算出された分圧特性 $\xi(t)$ をとる⁽¹²⁾⁽¹³⁾。分圧特性の初期立ち上がりが悪い場合、サンプル数 101 点、 $t_L = 0.03 \mu s$ の修正行列法を用いて入力波形 $e(t)$ を算出した。その再相乗検定 $e(t) \times \xi(t)$ は図中の破線となり、初期および終端の微小振動を除き $v(t)$ と殆んど一致した。この演算例の測定電圧 $f(t)$ は他の分圧特性を参照し空想的に画かれたものである。

図 10(b) は、文献(20)を参照した結果の分圧特性

で、さい断試験の落込み波形より摂取したものである。この $\xi(t)$ の立ち上がりは、測定電圧 $f(t)$ と共に下湾曲立ち上がりであり、修正行列法の技巧を必要とする。サンプル数 101 点において $t_L = 0.24 \mu s$ として得られた最良と思われる演算結果を $e(t)$ で示した。その再相乗検定は $e(t) \times \xi(t)$ で示された原電圧 $f(t)$ と処々で微差を生じるが、これは $\xi(t)$ の波形が複雑であるために、その雑音の部分波が災いしているためと思われる。特色として、 $e(t)$ のピークが $f(t)$ よりも約 10% 多く出たことが注目される。

図 10(c) は文献(21)を参照した特性 $\xi(t)$ で、前例同様さい断波より摂取したものである。101 点サンプリングで、 t_L を用いず得た $e(t)$ は同図に見る如くなる。特色として $f(t)$ のピークは前例と逆に $e(t)$ より約 10% 低く出ることが注目される。この再相乗検定 $e(t) \times \xi(t)$ の結果は破線となり、処々 $f(t)$ と微差があるが、大体演算の正確さを示している。

6. 結 言

本論文では測定システムにおける変位誤差補正手段として、相乗の逆となる相除演算について述べた。本論文の手法は修正相乗行列法と呼ぶべきもので、離散化誤差・測定誤差その他雑音を含みうるデータに関しても比較的安定な計算を可能にするものである。

各種実測データを文献として公表に運ばれた先達の方々に感謝申し上げる。(昭和 57 年 7 月 30 日受付)

文 献

- (1) 宮本、他：三菱電機技報 48, 6, 718 (昭 49)
- (2) R. Malewski & A. Dechamplain: *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-99, 2, 636 (1980)
- (3) 林・岩本：電気評論 40, 3, 12 (昭 27-3)
- (4) 林・岩本：電気評論 39, 12, 10 (昭 26-12)
- (5) M. Ouyang: *Proc. Inst. Elect. Engr.* 327 (1961-8)
- (6) F. C. Creed & M. M. C. Collins: *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-89, 7, 1387 (1970)
- (7) N. R. Hyllén-Cavallius & R. L. Vaughan: *ibid.* 80, 7, 1393 (1970)
- (8) S. E. Kierszyn: *ibid.* 99, 5, 1984 (1980)
- (9) W. Gitt & K. Schon: *Archiv für Electrotechnik.* 63, 317 (1981)
- (10) 岩本・加藤：昭 56 電気学会大会 No. 1026
- (11) 岩本・加藤：同志社大学理工学研究報告 21, 3, 9 (1980)
- (12) 岩本・内藤：昭 51 電気学会大会 No. 946
- (13) 岩本・藤原：昭 55 電気学会関西支大 G3-70
- (14) 井上：昭 57 電気学会大会 No. 6
- (15) D. L. Phillips: *J. Ass. Comput. Mach.* 9, 84 (1962)
- (16) 市田・吉本：「スプライン関数とその応用」教育出版, 43, (1979)
- (17) 河村、他：昭 54 電気学会関西支大 G4-21
- (18) 関西電力総合技術研究所：電力工学研究会資料 3-3 (昭 54-8)
- (19) E. J. Rogers: *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-100, 1, 66 (1981)
- (20) 広兼、他：昭 56 電気学会関西支大 G3-48
- (21) 三井、他：昭 57 電気学会大会 No. 1142