UDC 621.313.13.012.6:621-526

論文

59-B27

回転軸の弾性を考慮したステップモータ系の動特性の解析

正員 小島 宏 行 (群馬大)

正員 池田 真 治 (日本サーボ)

1. ま え が き

最近の自動制御技術の発展に伴い、サーボモータやステップモータなどのアクチュエータは、小形化されるとともに、高速化されつつあり、負荷系が細い軸で駆動される場合が多くなっている⁽¹⁾。このような背景のもとに、回転軸の弾性を考慮した、直流サーボモータ系の動特性に関する研究が、いくつか行なわれている⁽²⁾⁽³⁾。他方、ステップモータの動特性に関しても多数の研究が行なわれているが⁽⁴⁾⁻⁽¹⁰⁾、これらは回転軸などの負荷部を剛体として取り扱っており、負荷部の持つ柔らかさを考慮した研究は、見当たらないようである。しかしながら負荷部の弾性は無視できない場合が多く、このために回転軸などに高振動数のねじり振動が生じ、これが騒音源となることなどが考えられる。従って、ステップモータと回転軸系との相互作用による動的挙動を解明することは、工業上十分に意義あるものと言える。

本研究は、回転軸を介して円板を駆動している、ステップモータの動特性を、モータのトルク特性と回転軸の弾性との両方を考慮して、理論的に調べるとともに実験を行なったものである。本文では、まずステップモータが一相励磁下のもとに定電流で周期的に駆動されているものと見なし、任意のパルスが印加されている期間における系の運動方程式を導く。次に、この任意の期間における系の過渡応答解をラプラス変換法により導くとともに、各パルスの印加瞬間における角変位ならびに角速度の連続条件を用いて全応答を求めている。また、数値計算を行ない、回転軸の弾性が系

の動特性に及ぼす影響を明らかにしている。更に、実験結果と数値計算結果を比較し、本解析法の妥当性を吟味している。

2. 解析モデルと解析方法

図1は、ステップモータ系の解析モデルを示したものである。ステップモータには回転軸が接続されており、回転軸の他端には円板が取付けられている。一相励磁下におけるステップモータのトルク特性は、後述の図4の実線のように非線形性を有するが、従来の研究⁽⁴⁾⁽⁷⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾と同様、同図中の破線のように直線近似を行なう。従って、定電流で駆動されているステップモータのトルク T_m は、ロータの回転角を θ_1 とすると

$$T_m = k\theta_1 \dots\dots\dots (1)$$

のように表わすことができる。なお、以下の解析においては、モータは一相励磁下のもとに定電流で周期的に駆動されているものとしている。一方、回転軸のねじりばね定数 K は、軸が丸軸であるものとして次式で与えられる。

$$K = \pi G d^4 / (32 l) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 G は軸材の横弾性係数、 d, l は回転軸の直径ならびに長さである。次に静止状態のステップモータに最初のパルスが時間 $t=0$ の瞬間に印加されたものとする。そして n 番目のパルスが時間 $t=(n-1)T$

図1 ステップモータによって駆動される回転軸系

Fig. 1. Rotating shaft system driven by a stepping motor.

Analysis of Dynamic Characteristics of Stepping Motor System in Consideration of Elasticity of Rotating Shaft.
By Hiroyuki Kojima, Member (Faculty of Engineering, Gunma University) & Shinji Ikeda, Member (Japan Servo Co. Ltd.).
小島宏行: 正員, 群馬大学工学部機械工学科
池田真治: 正員, 日本サーボ株式会社

において印加された期間の運動方程式を考える。但し T はパルスの周期である。ステップモータが安定に駆動されているものとする、回転子のある突極位置は第 n 平衡点の近くで運動している。このような場合のステップモータの運動方程式は、時間変数 $t^* \{=t-(n-1)T\}$ を用いるとともに、(1), (2) 式を考慮すると次式のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\theta}_1 + C_1 \dot{\theta}_1 + (k+K) \theta_1 - K \theta_2 &= n k \delta \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + C_2 \dot{\theta}_2 + K \theta_2 - K \theta_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 J_1, J_2 はロータおよび円板の慣性モーメント、 θ_1, θ_2 は回転角、 δ はステップ角、 C_1, C_2 はロータならびに円板における粘性減衰係数であり、ドット ($\cdot$) は時間 t^* についての微分を表わしている。時間 t^* を $\tau (= \omega_n t^*)$ に変換し、(3) 式を無次元化すると

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + 2\mu_1(1+\kappa)\dot{\varphi}_1 + \{1+\kappa+\kappa\sigma^2/(1+\kappa)\}\varphi_1 \\ - \{\kappa\sigma^2/(1+\kappa)\}\varphi_2 &= n(1+\kappa) \\ \ddot{\varphi}_2 + 2\mu_2(1+1/\kappa)\dot{\varphi}_2 + \{\sigma^2/(1+\kappa)\}\varphi_2 \\ - \{\sigma^2/(1+\kappa)\}\varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \theta_1/\delta, \quad \varphi_2 = \theta_2/\delta, \quad \kappa = J_2/J_1 \\ \mu_1 &= C_1/(2\sqrt{k}(J_1+J_2)) \\ \mu_2 &= C_2/(2\sqrt{k}(J_1+J_2)) \\ \omega_n &= \sqrt{k/(J_1+J_2)} \\ \Omega_n &= \sqrt{K(J_1+J_2)/(J_1J_2)} \\ \sigma &= \Omega_n/\omega_n \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

但し、(4) 式中のドット ($\cdot$) は、時間 τ についての微分を表わしており、 μ_1, μ_2 は減衰比、 ω_n, Ω_n はステップモータのトルク特性ならびに回転軸の弾性に基づく固有振動数、 κ は慣性モーメント比、 σ は固有振動数比をそれぞれ示している。次にロータならびに円板における角変位と、角速度の初期条件を次式のように置く。

$$\left. \begin{aligned} \tau=0; \quad \varphi_1 &= \phi_{1n}, \quad \dot{\varphi}_1 = v_{1n} \\ \varphi_2 &= \phi_{2n}, \quad \dot{\varphi}_2 = v_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

上式の初期条件のもとに、運動方程式(4)をラプラス変換すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(s) &= \int_0^\infty \varphi_1(\tau) e^{-s\tau} d\tau \\ \Phi_2(s) &= \int_0^\infty \varphi_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= s^3 + A_1 s^2 + A_2 s, \quad \varepsilon_{12} = -A_3 s \\ \varepsilon_{21} &= -A_6, \quad \varepsilon_{22} = s^2 + A_5 s + A_6 \\ b_1 &= (s^2 + A_1 s) \phi_{1,n} + s v_{1,n} + A_4 \\ b_2 &= (s + A_5) \phi_{2,n} + v_{2,n} \\ A_1 &= 2\mu_1(1+\kappa), \quad A_2 = 1+\kappa+\kappa\sigma^2/(1+\kappa) \\ A_3 &= \kappa\sigma^2/(1+\kappa), \quad A_4 = n(1+\kappa) \\ A_5 &= 2\mu_2(1+1/\kappa), \quad A_6 = \sigma^2/(1+\kappa) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\dots\dots\dots (10)$$

(7) 式を留数定理を用いてラプラス逆変換すると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \phi_1 \\ \varphi_2 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{1,n} \\ v_{1,n} \\ \phi_{2,n} \\ v_{2,n} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_{1i} &= \sum_{j=1}^5 H_{ij} I_j, \quad a_{2i} = \sum_{j=1}^5 s_j H_{ij} I_j \\ a_{3i} &= \sum_{j=1}^5 \bar{H}_{ij} I_j, \quad a_{4i} = \sum_{j=1}^5 s_j \bar{H}_{ij} I_j \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} H_{1j} &= (s_j^2 + A_1 s_j)(s_j^2 + A_5 s_j + A_6) \\ H_{2j} &= s_j(s_j^2 + A_5 s_j + A_6) \\ H_{3j} &= s_j A_3(s_j + A_5) \\ H_{4j} &= s_j A_3 \\ H_{5j} &= A_4(s_j^2 + A_5 s_j + A_6) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{1j} &= A_6(s_j^2 + A_1 s_j), \quad \bar{H}_{2j} = A_6 s_j \\ \bar{H}_{3j} &= (s_j + A_5)(s_j^3 + A_1 s_j^2 + A_2 s_j) \\ \bar{H}_{4j} &= (s_j^3 + A_1 s_j^2 + A_2 s_j) \\ \bar{H}_{5j} &= A_4 A_6 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} I_j &= \{5s_j^4 + 4(A_1 + A_5)s_j^3 \\ &\quad + 3(A_2 + A_6 + A_1 A_5)s_j^2 \\ &\quad + 2(A_1 A_6 + A_2 A_5)s_j + A_6(A_2 - A_3)\} \\ &\quad \times \exp\{2\pi s_j(t^*/T)/\eta\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$\eta = T_n/T, \quad T_n = 2\pi/\omega_n \quad (16)$$

但し、 η はステップモータのトルクに基づく系の自由振動の周期 T_n と印加パルスの周期 T との比を表わしている。また、(11)~(13), (15) 式中の $s_j (j=1\sim 5)$ は、次の特性方程式の根を表わしている。

$$\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}\varepsilon_{21} = 0 \quad (17)$$

以上は n 番目のパルスが印加されている期間の応答である。(11) 式を用いると $(n+1)$ 番目のパルスが印加されている期間の初期値は、 n 番目のパルス印加期間の終期値に一致しなければならないことから、次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,n+1} &= (\phi_1)_{t^*=T}, \quad v_{1,n+1} = (\dot{\phi}_1)_{t^*=T} \\ \phi_{2,n+1} &= (\phi_2)_{t^*=T}, \quad v_{2,n+1} = (\dot{\phi}_2)_{t^*=T} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

上式は、 $(n+1)$ 番目のパルスが印加された瞬間における角変位と角速度の連続条件を表わしており、この式と (11) 式を用いて連続ステップ応答が得られる。このような手順によって系の全応答を求めることができる。但し、ステップモータは、 $t=0$ の瞬間において静止しているので、最初のパルスの印加期間の初期条件は、

$$\phi_{1,1}=0, \quad v_{1,1}=0, \quad \phi_{2,1}=0, \quad v_{2,1}=0$$

のとおりとなる。

3. 回転軸のねじり剛性が連続ステップ応答に及ぼす影響

回転軸のねじり剛性の変化は、無次元量においては固有振動数比 σ の変化に対応する。図 2 (a), (b), (c) に σ を変化させた場合の連続ステップ応答の数値計算例を示す。但し横軸は、時間 t の無次元量 $\bar{t}(=t/T)$ である。まず、軸のねじり剛性が比較的小さい場合の応答を示したものが図 2 (a) で、ロータの振動角変位はかなり大きく、高振動数成分が顕著に生起している。これに対し、円板においては慣性抵抗のため高振動成分がほとんど見られず、低振動数成分だけとな

っている。

低振動数成分は、主にステップモータのトルク特性によって生起し、高振動数成分は回転軸の弾性に基づくものと考えられる。また、回転軸のねじり角変位は $\phi_1 - \phi_2$ であるから、回転軸のねじり振動が顕著に生起していることがわかる。図 2 (b), (c) は、回転軸のねじり剛性を段階的に強くした場合である。図より、回転軸のねじり剛性が大きくなるほど、高振動数成分は小さくなり、低振動数成分が大きくなることがわかる。また軸のねじり振動もより小となる。更に円板の慣性モーメントが比較的小さい場合の例を示したものが図 2 (d) であり、慣性抵抗の減少のため円板においても高振動数成分がわずかに生起していることが見受けられる。

4. 理論値と実験値

〈4・2〉 実験装置の概要 図 3 は実験装置の概略を示したものである。点線内はステップモータ $S \cdot M$ を表わしており、 S はステータ、 R はロータである。ステップモータには、軸継手 C を介してポテンションメータ P が接続されている。更にポテンションメータの他端には、斜線部の回転軸を介して円板 D

図 2 連続ステップ応答(計算値)

Fig. 2. Continuous steps response (calculation).

が接続されている。なお、 B は軸受を表わしている。
本実験で用いたステップモータは、日本サーボ製のハ

図 3 実験装置の概略図

Fig. 3. Schematic model of experimental apparatus.

図 4 ステップモータのトルク特性

Fig. 4. Torque character of step motor.

理論値

実験値

(a) $J_1=167 \text{ g-cm}^2$, $J_2=1,541 \text{ g-cm}^2$, $K=2,063 \text{ N·m/rad}$
 $\mu_1=0.03$, $\mu_2=0.0046$

イブリッド形 4 相ステップモータ (KP 6 M 2) で、ステップ角は $\delta=1.8^\circ$ 、ロータの慣性モーメントは 160 g-cm^2 、巻線抵抗 $20 \Omega/\text{phase}$ 、インダクタンス $35 \text{ mH}/\text{phase}$ である。モータには外部抵抗 213Ω を接続するとともに 35 V の電圧を印加することにより、電機子電流が 0.15 A 一定となるように配慮した。図 4 はモータの静トルク特性を示したもので、実線が実測値である。

トルク特性は非線形性を有しているが、これまでの研究⁽⁴⁾⁽⁷⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾と同様、破線のように線形近似した。その線形化ばね定数は $k=7.56 \text{ N·m/rad}$ となった。また図 3 中の斜線で示された軸 (長さ 135 mm) の材質は、黄銅 (直径 3.2 mm) と鋼 (直径 5 mm) の 2 種類である。回転軸のねじりばね定数は (2) 式からも得られるが、本実験の場合は図 3 のように何種類かの軸が接続されているため、ロータと円板との間の回転軸のねじりばね定数を実験的に求めた。この結果、黄銅を用いた場合のねじりばね定数は $K=2,063 \text{ N·m/rad}$ 、鋼の場合は 19.0 N·m/rad となった。なお、図 3 中の軸継手 C とポテンションメータ P の慣性モーメントは、ロータのそれと比較するとかなり小さな値であるが、斜線部の軸の左右に分離して、それぞれロータおよび円板の慣性モーメントに含めて数値計算を行なった。

理論値

実験値

(b) $J_1=174 \text{ g-cm}^2$, $J_2=1,541 \text{ g-cm}^2$, $K=19.0 \text{ N·m/rad}$
 $\mu_1=0.07$, $\mu_2=0.0044$

図 5 単ステップ応答

Fig. 5. Single step response.

図 6 連続ステップ応答

Fig. 6. Continuous steps response.

〈4.2〉 理論値と実験値の比較 図5に、ステップモータの単ステップ応答の例を示す。まず図5(a)は、回転軸のねじり剛性が比較的小さい場合で、回転軸のねじり振動が顕著に生起している。理論値と実験値を比較すると、両者は定性的に良く一致しているが定量的には高振動数成分に多少の不一致が見られる。このことは、図4のように実際のステップモータのトルク特性が、かなりの非線形性を有することに起因するものと考えられる。なお、減衰比 μ_1, μ_2 については推定値であるが、実験時の粘性減衰抵抗がおよそこの程度の値であったことを示しているものと言えよう。また図5(b)は、ねじり剛性の値を大きくした場合で回転軸のねじり振動がほとんど消失している場合である。次に周期的なパルスでステップモータを駆動した場合の応答例を図6に示す。まず、図6(a)は、パルスの周波数 $f(=1/T)$ および回転軸のねじり剛性 K がともに小さい場合で、顕著な回転軸のねじり振動が生起している。一方、印加パルスの周波数とねじり剛性とをともに大きくした場合の応答例が図6(b)であり回転軸のねじり振動はほとんど生じていない。なお、図6(a), (b)の両図とも、前述の単ステップ応答の場合と同様、理論値と実験値とは定性的に良く一

致しているが、定量的には高振動数成分において若干の差異が見られる。

5. む す び

本報告は、ステップモータ系の動特性を、モータのトルク特性と回転軸の両方を考慮して理論的に解析するとともに、数値計算結果と実験結果を比較し、本解析法の妥当性を吟味したものである。ステップモータは、一相励磁下のもとに定電流で周期的に運転されており、回転軸を介して円板を駆動している。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) ステップモータ系の運動方程式を、モータのトルク特性と回転軸の弾性の両方を考慮して導くとともに、ラプラス変換法を用いてロータならびに円板の角変位を与える理論式を導いた。

(2) 回転軸のねじり剛性の値が小さくなるほど、高振動数の回転軸のねじり振動が顕著に生起し、ステップモータのトルク特性に基づく低振動数成分は小となる。また、円板の慣性モーメントがロータのそれよりも大きくなるに従い、円板においては高振動数の振動成分が生じにくくなる。

(3) 理論で予期されたとおり、回転軸のねじり剛

性が小さい場合には、顕著な回転軸のねじり振動が実測された。実験結果と数値計算結果は定性的に良く一致しているが、定量的には高振動数成分において若干の差異が見られた。このことは、ステップモータのトルクの非線形性に起因するものと考えられる。

終りに、懇切な御指導と御べんたつを賜りました東北大学 斉藤秀雄名誉教授、群馬大学 山川出雲名誉教授、ならびに群馬大学工学部 長屋幸助教授に厚く感謝の意を表します。 (昭和58年7月11日受付)

文 献

- (1) 神谷・高野:「間欠運動の高速化に関する研究 一動吸振器による残留振動の減衰」精密機械 43, 9, 1075 (昭 52-9)
- (2) 西村・金子:「機械的共振を考慮した位置決め制御の設計法」精密機械 45, 12, 1467 (昭 54-12)
- (3) 山田・中川:「機械的な振動特性を考慮したサーボモータ系の位置決め制御」計測自動制御学会論文集 18, 1, 84 (昭 57-1)
- (4) 西田・水野・藤沢:「ステップモータの動特性」電学誌 84, 1392 (昭 39)
- (5) 大石・島・山崎:「パルスモータの定常特性」制御工学 14, 10, 609 (昭 45-10)
- (6) 大石・島・浅原:「パルスモータの始動時の挙動」システムと制御 15, 10, 885 (昭 46-10)
- (7) P. J. Lawrenson, et al: "Viscously coupled inertial damping of stepping motors", *Proc. Instn Elect Engrs.* 122, 10, 1137 (1975-10)
- (8) Pickup M. Sc, et al: "Prediction of pull-in rate and setting-time characteristics of a variable-reluctance stepping motor and effect of stator-damping coils on these characteristics" *ibid.* 123, 3, 213 (1976-3)
- (9) P. J. Lawrenson, et al: "Resonance effects in stepping motors. *ibid.* 124, 5, 445 (1977-5)
- (10) 中松・増井・佐々木:「ステッピングモータの特性解析(Ⅱ)」自動制御連合講演会前刷 287 (昭 57-11)