UDC 621.311.1: 681.5.037: 621.316.726.014: 519.23

論文

60-B3

電力系統安定度とパラメータ共振の関係について

准員 餘利野 直人 (早稲田大)

正員 森 啓之 (早稲田大)

正員 田村 康男 (早稲田大)

1. ま え が き

電力系統に周期外乱が加わる場合、共振周波数の外乱に対して、システムはいわゆる共振現象によって異常に動揺するであろう。システムの非線形性による固有周波数以外の共振点を考察するのが本論文の主旨である。

一般に電力系統の安定度を論ずる場合、種々の概念があり、定常状態を論ずるときには「定常安定度」、大外乱後の数秒間に関しては「過渡安定度」、また長時間の安定度に関しては、「Long-Term Dynamics」と言った各種の分類がなされている。しかしながら、これら従来の安定度の概念にはパラメータ共振に関連した安定度は含まれていない。

本論文では電力系統に周期外乱が加わる場合について電力系統をパラメータ振動方程式として定式化し、従来考えられていなかった共振が存在する可能性を指摘する。このような共振は系統の非線形性に起因するものであり、電力系統における持続的振動現象を考察する場合、これらの共振点の存在の可能性を考察することは有意義であると考えられる。

本論文では、先ず母線電圧が変動する一機準無限大母線系統をとりあげて、解析法及びいくつかの数値例を示し、次に Ward & Hale 6 母線系統について特に負荷変動に対し上記の共振が発生することを示し、更に一般の多機系統について考察を加えた。

2. 定 式 化

n 機系統において一つの発電機が残りの $n-1$ 機系統と準無限大母線を介して接続されている。ここで準無

限大母線とは、後述の(3)式のようにいわゆる無限大母線の電圧振幅と位相がある周期で正弦波状に変化をする母線と定義する。このとき動揺方程式は(1)式となる。

$$\frac{2H}{\omega_R} \frac{d^2\theta}{dt^2} = P_m - \frac{V_G V_B}{X_G} \sin(\theta - \theta_B) \dots\dots (1)$$

但し、 H : 単位慣性定数(s), ω_R : 定格速度(rad/s), θ : 発電機内部位相角(rad), θ_B : 準無限大母線電圧位相角(rad), V_G : 発電機リアクタンス背後電圧(p.u.), V_B : 準無限大母線電圧(p.u.), X_G : 発電機内部リアクタンス(p.u.), P_m : 機械入力(p.u.), t : 時間(s)

(1)式を $\theta_0, V_{B0}, \theta_{B0}$ のまわりで展開すると(2)式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{2H}{\omega_R} \frac{d^2\theta}{dt^2} = & P_m - \left\{ \frac{V_G V_{B0} \sin \delta_0}{X_G} + \frac{V_G V_{B0} \cos \delta_0}{X_G} \right. \\ & \times \left(-\Delta\theta_B + \frac{\tan \delta_0}{V_{B0}} \Delta V_B \right) + \dots \left. \right\} \\ & + \left\{ \frac{V_G V_{B0} \cos \delta_0}{X_G} + \frac{V_G V_{B0} \cos \delta_0}{X_G} \right. \\ & \times \left(\frac{\Delta V_B}{V_{B0}} + \frac{1}{2} \tan \delta_0 \Delta\theta_B \right) + \dots \left. \right\} \Delta\theta \\ & + \{ \dots \} \Delta\theta^2 + \dots + \{ \dots \} \Delta\theta^m + \dots \end{aligned} \dots\dots (2)$$

但し、 $\delta_0 = \theta_0 - \theta_{B0}$ である。ここで、系統の遠方で発生した外乱の影響を受けて $\Delta V_B, \Delta\theta_B$ が周波数 ω で振動するものとする。

図 1 一機準無限大母線系統図

Fig. 1. Single-machine-to-quasi-infinite bus system.

On the Relationship between Power System Stability and Parametric Resonance. By Naoto Yorino, Associate, Hiroyuki Mori, Member & Yasuo Tamura, Member (Department of Electrical Engineering, Waseda University).

餘利野直人: 准員, 早稲田大学電気工学科修士課程
森 啓之: 正員, 早稲田大学電気工学科博士課程
田村康男: 正員, 早稲田大学電気工学科

Fig. 2. Mathieu's diagram.

$$\begin{aligned} \Delta\theta_B &= f(\text{系統全体の変数}) \triangleq \theta_{B1} \cos(\omega t + \phi_\theta) \\ \Delta V_B &= g(\text{系統全体の変数}) \triangleq V_{B1} \cos(\omega t + \phi_V) \end{aligned} \quad (3)$$

但し, $\theta_{B1}, V_{B1}, \phi_\theta, \phi_V$ は定数とする。(2)式において $P_m = V_G V_{B0} \sin \delta_0 / X_G$ であることに留意し, また $\Delta\theta$ の原点付近での運動を考え, $\Delta\theta$ の二次以降の高次項を無視し, 外乱 $\Delta\theta_B, \Delta V_B$ に対しても二次以降の高次項を無視すれば(3)式を代入することによって(4)式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Delta\theta}{d\tau^2} + \{K + K \cdot A \cos(\omega t + \phi_A)\} \Delta\theta \\ = K \cdot B \cos(\omega t + \phi_B) \end{aligned} \quad (4)$$

但し,

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(\frac{V_{B1}}{V_{B0}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{B1} \tan \delta_0}{2}\right)^2} * \\ &\quad * + \frac{V_{B1}}{V_{B0}} \theta_{B1} \tan \delta_0 \cos(\phi_V - \phi_\theta) \\ B &= \sqrt{\left(\tan \delta_0 \frac{V_{B1}}{V_{B0}}\right)^2 + \theta_{B1}^2 - 2} * \\ &\quad * \times \frac{V_{B1}}{V_{B0}} \theta_{B1} \tan \delta_0 \cos(\phi_V - \phi_\theta) \\ \phi_A &= \tan^{-1} \left\{ \frac{(V_{B1}/V_{B0}) \sin \phi_V}{(V_{B1}/V_{B0}) \cos \phi_V} * \right. \\ &\quad * \left. \frac{+(1/2) \theta_{B1} \tan \delta_0 \sin \phi_\theta}{+(1/2) \theta_{B1} \tan \delta_0 \cos \phi_\theta} \right\} \\ \phi_B &= \tan^{-1} \left\{ \frac{-(V_{B1}/V_{B0}) \tan \delta_0 \sin \phi_V}{-(V_{B1}/V_{B0}) \tan \delta_0 \cos \phi_V} * \right. \\ &\quad * \left. \frac{+\theta_{B1} \sin \phi_\theta}{+\theta_{B1} \cos \phi_\theta} \right\} \\ K &= \frac{\omega_R}{2H} \frac{V_G V_{B0} \cos \delta_0}{X_G} = \frac{\omega_R}{2H} \times (\text{同期化力}) \end{aligned} \quad (5)$$

(4)式に対し(6)式の変換を行なうと, 結局(7)式を得る。

$$\tau = (\omega t + \phi_A/2) \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \Delta\theta}{d\tau^2} + (a + \varepsilon \cos 2\tau) \Delta\theta = \varepsilon_1 \cos(2\tau - \phi_A + \phi_B) \quad (7)$$

但し,

$$a = \frac{4}{\omega^2} K, \quad \varepsilon = \frac{4}{\omega^2} K \cdot A, \quad \varepsilon_1 = \frac{4}{\omega^2} K \cdot B \quad (8)$$

(7)式は, 強制振動項を持つマシュー型方程式であり, 本式の安定性は強制振動項を持たないマシュー方程式と同様にマシュー線図(図2)によって判別される(付録1参照)。なお, 定式化にあたって一般性を考え $\Delta V_B, \Delta\theta_B$ の両方の変動を考慮したが, どちらか一方だけが振動する場合にも(7)式が得られることは明らかである。

3. 周期外乱に対する電力系統の安定性

〈3・1〉 一機無限大母線系統の場合

(7)式の安定性は, ε_1 の値には関係なく (a, ε) の値のみによってマシュー線図上で判別されることは既に述べた。ここで, もし (a, ε) がマシュー線図上で安定領域内にあれば, 周期外乱に対して系統は定常状態付近で微小な持続振動状態を維持するが, 不安定領域内においてはたとえ微小な外乱に対しても振幅は最初, 時間と共に増大し非線形領域に入った後, 特有の現象(例えばビートを伴う持続振動, 図7参照)を呈する。

いま, 系統パラメータを固定し, 外乱波数 ω のみが増変する場合を考えてみる。(8)式より ω を消去すると(9)式を得る。

$$a = (1/A) \varepsilon \quad (9)$$

(9)式はマシュー線図上の直線を表わす。これは系統に周期外乱が加わる場合, その外乱周波数 ω によって (a, ε) の値はこの直線上のいずれかの点に対応することを表わしている。(9)式の A の値は(5)式に示すように, 外乱の大きさ V_{B1}, θ_{B1} で決まる定数である。通常, 外乱の大きさは小さく, 従って A の値も小さくなるので, この直線の傾きは大きくなり, ほとんど a 軸の付近に近づくことになる。このとき, 運動が不安定になる a の値は, ほぼ

$$a \approx 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots \quad (10)$$

あるいは, 系統の固有周波数 $\sqrt{K}$ を用いて

$$\omega \approx 2\sqrt{K}, \sqrt{K}, 2\sqrt{K}/3, \dots, 2\sqrt{K}/n, \dots \quad (11)$$

のときである。但し, n は自然数である。上記の危険周波数近傍の外乱が系統に加わる場合, 系統は共振現

象によって発散性の振動を起こす。この様な外乱は系統周波数の2倍周波数や低周波の異常振動であり、実系統において見られる可能性が十分にあるものと考えられる。このとき(7)式を見る限りは振幅は無限大まで増大するが、実際的には振幅の増大に伴う線形化誤差の影響、あるいはダンピングの影響などにより振幅はある程度で飽和することが予想される。しかしながら、このような状況下では、系統は微小な持続振動状態を逸脱して異常現象が観測されるであろう。また、このとき大きな外乱が加わるほど ε の値も大きくなるので、(付3)式および(付4)式を参照すれば、発散の割合 μ も大きくなる。

ここで特筆すべきことは、上記は全てパラメータ共振に関するものであるが、特に $\omega \approx \sqrt{K}$ ($a \approx 4$)のときは(7)式におけるパラメータ変動($\varepsilon \cos 2\tau$)を無視しても右辺の強制項 $\{e_1 \cos(2\tau - \phi_A + \phi_B)\}$ によって共振が起こることである。すなわち、(11)式において $\omega \approx \sqrt{K}$ は通常の線形化によって得られる共振点であると同時にパラメータ共振点でもあり、それ以外は筆者らが特に指摘するパラメータ共振点である。

さて、(7)式右辺の係数 e_1 は特に安定性には影響しないが、強制振動項の係数という性質上、振幅に対しては少なからぬ影響を及ぼすことが考えられる。そこで、式の性質を把握するために、次の量 r を導入する。

$$r \triangleq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \dots\dots\dots (12)$$

r は強制振動項に対するパラメータ振動項の比を表わし、同程度の外乱に対して r が大きくなるほどパラメ

Fig. 3. Lineson Mathieu's diagram.

表 1 シミュレーションパラメータ

Table 1. Simulation parameters.

$H=1.0$ s	$\theta_0=30$ deg	$\theta_{B0}=0.0$ deg
$X_C=1.0$ p. u.	$\omega_R=100\pi$ rad/s	$\phi_V=0.0$ deg
$V_C=1.0$ p. u.	$V_{B0}=1.0$ p. u.	$\phi_\theta=0.0$ deg
$P_m=0.5$ p. u.	$\sqrt{K}=11.66$	

(注: 状態変数の初期値は無外乱時の定常値を用いた)

図 4 外乱周波数と発電機動揺の関係
(Case 1: V_B, θ_B の変動)

Fig. 4. Relationship between disturbance frequency and generator swing (Case 1).

図 5 外乱周波数と発電機動揺の関係
(Case 2: V_B の変動)

Fig. 5. Relationship between disturbance frequency and generator swing (Case 2).

図 6 外乱周波数と発電機動揺の関係
(Case 3: θ_B の変動)

Fig. 6. Relationship between disturbance frequency and generator swing (Case 3).

ータ振動的になると考えられる。なお、ここで用いた手法は、第2節に示す様に、非線形方程式を運転点付近で展開し、高次の項を無視する手順をとっている。従って例えば不安定領域において振幅がある程度以上増大した場合、高次項の影響が無視し得なくなる。本

図7 解波形(一機準無限大母線系統の場合)

Fig. 7. Waveforms for single-machine-to-quasi-infinite bus system.

解析の目的は微小な持続振動が安定であるか不安定であるかを論ずるものであり、上記の様に振幅がある程度以上増大した場合の現象の説明は本理論の範囲外である。

〈3.2〉 一機準無限大母線系統におけるシミュレーション 図1に示す一機準無限大母線系統において動揺方程式を解き外乱周波数と系統の動揺の関係を調べてみた。シミュレーションは外乱の種類を変えて、次の3ケースを考察した。

(Case 1) $\Delta V_B, \Delta \theta_B$ が共に周波数 ω で変動する場合 (図4, 図7)

(Case 2) ΔV_B だけが周波数

ω で変動する場合 (図5)

(Case 3) $\Delta \theta_B$ だけが周波数

ω で変動する場合 (図6)

これらは、いずれも表1に示すパラメータを用い、外乱周波数 ω の各値について動揺方程式{(1), (3)式}を150秒まで解いたもので、図3に示す様にそれぞれのケースについて(9)式で定義された (a, ε) 平面の直線上の点に対するシミュレーションである。図4～図6は外乱周波数 ω とシミュレーション期間中(150秒まで)の $\Delta \theta$ の最大振幅 $\text{Max}|\Delta \theta|$ の関係をプロットしたものであり、図7はCase 1における6点{(a)～(f)}の ω について $\Delta \theta$ の解波形を示したものである。ここで解法は4次のルンゲクッタ法を用い、刻み幅 0.01 秒で倍精度計算とした。

図4～図6のいずれにおいても、系統の固有周波数 $\sqrt{K}$ の近傍以外に $\omega = 2\sqrt{K}, (1/2)\sqrt{K}$ の近傍においてパラメータ共振と思われる動揺が見られる。いずれにおいても最大振幅を与える ω の値は(11)式で示す理論値とわずかに異っているが、これは非線形性の影響であると考えられ、振幅が大きくなるほどその誤差も大きくなっている。それぞれの図を比較してみると

r の値が大きくなるほど、 $\omega = \sqrt{K}$ 近傍の振幅は小さくなり、逆に、 $\omega = 2\sqrt{K}, (1/2)\sqrt{K}$ 近傍の振幅が顕著になっている。これは前述の通り r が大きいほどパラメータ振動の性格を強めるためであろう。また、 $\omega = (2/3)\sqrt{K}, (2/n)\sqrt{K}$ ($n=5\sim 9$) の近傍において、ごくわずかの振幅増大が確認されている。

次に、図7の解波形を見ると、安定領域内{(d)}では、微小な持続振動を維持しているが、不安定領域内{(b), (c), (e), (f)} および近傍の(a)点では、いずれもうなりを伴った異常現象が発生していることがわかる。これらの振動は安定領域内{(d)}の様に微小

図 8 Ward & Hale 6 母線系統

Fig. 8. Ward & Hale 6 bus system.

図 9 外乱周波数と発電機動揺の関係 (Ward & Hale 6 母線系統の場合)

Fig. 9. Relationship between disturbance frequency and generator swing for Ward & Hale 6 bus system.

な持続振動を維持できず、振動の初期において発散傾向を示している。その後、振動は微小な状態に戻るが、やはりこの状態を持続できず再び発散傾向を示す。この様に不安定領域内においては微小振動は維持できず、場合によっては脱調に至る大振幅に成長する。

(3.3) Ward & Hale 6 母線系統におけるシミュレーション 前節では、電力系統内の周期外乱を無限大母線の変動として扱ったが、ここでは系統内のパラメータ変動が原因となって母線の電圧変動が生じる場合について考える。図 8 に示す Ward & Hale 6 母線系統⁽³⁾において第 3 母線の負荷アドミタンス Y_3 を周波数 ω で周期的に変動させ発電機の動揺を調べた。シミュレーションパラメータ、および系統の初期状態は図中に示した値を用い、 Y_3 は (13) 式に従って変動するものとした。

$$Y_3 = Y_{30} + 0.5 Y_{30} \cos \omega t \quad (13)$$

但し Y_{30} の有効電力消費は全系負荷の約 41% に当る。

図 9 は ω の各値について Y_3 を変動させながら非線形動揺方程式を 300 秒まで解き、発電機間の相差角

変位 $\Delta\theta_{21}$ の最大振幅 $\text{Max}|\Delta\theta_{21}|$ を示したものである。また図 10 は図 9 において (11) 式に従う ω とそれ以外の中間的な数か所の ω について $\Delta\theta_{21}$ の解波形を 200 秒まで示したものである。シミュレーションの際用いた発電機モデルは (1) 式で用いたものと同じであり、解法は 4 次のルンゲクッタ法を用い、刻み幅 0.01 秒で倍精度計算とした。

図 9、図 10 はいずれも一機準無限大母線系統の場合と非常に似通っており、やはり系統の固有周波数 ω_0 ($\omega_0 = 4.97$ rad/s) の近傍以外に $\omega = 2\omega_0$, $(1/2)\omega_0$ の近傍でパラメータ共振とみられる現象が確認された。これらのことより、Ward & Hale 6 母線系統においても一機準無限に母線系統の場合と同形のパラメータ振動方程式が形成されていることが考えられる。上記は負荷アドミタンスの周期変動を考慮したものであるが、この様に負荷変動によっても本共振が発生する可能性があることは重要な意味がある。次節ではこのような負荷変動も含め、系統内パラメータが変動する一般の場合について考察する。

(3.4) 多機系統に対するパラメータ共振の可能性

前述の一機準無限大母線系統における論議で、動揺方程式の非線形構造は、系統の固有周波数以外の特定周波数を持つ周波数外乱に対してもパラメータ共振を惹き起こすことが示された。また、前節の Ward & Hale 6 母線系統におけるシミュレーションでも同様な現象が認められ、これは動揺方程式に共通した非線形構造によるものと思われる。そこで本節では、これらの問題を一般の多機系統に対し考察する。多機系統における方程式を (14) 式で表わす。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, c) - f(x_0, c_0) \quad (14)$$

ここで、 x は n 次元状態変数ベクトル、 f は n 次元非線形関数、 c は系統内における任意のスカラー係数 {例えば (13) 式の Y_3 } であり、 x_0, c_0 は定常点である。(14) 式を定常点のまわりで展開し、変位のみに着目すれば (15) 式を得る。

$$\frac{d\Delta x}{dt} = F^0(\Delta c) + F^1(\Delta c)\Delta x + (\Delta x \text{ の二次の項}) \dots + \dots (15)$$

ここで、 F^i の各要素は Δc の多項式となり、特に F^0 の要素は、定数項を含まない。また、 F^1 を定数項と Δc を含む項に分けて

$$F^1(\Delta c) = A + g^1(\Delta c) \quad (16)$$

として表現し、(15) 式の第 3 項以降を $g^2(\Delta x, \Delta c)$ として一括して表わす。更に $F^0(\Delta c)$ を改めて $g^0(\Delta c)$ と書けば (15) 式は (17) 式で表現される。

図 10 解波形 (Ward & Hale 6 母線系統の場合)
Fig. 10. Waveforms for Ward & Hale 6 bus system.

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \mathbf{g}^0(\Delta c) + \{\mathbf{A} + \mathbf{g}^1(\Delta c)\} \Delta x + \mathbf{g}^2(\Delta x, \Delta c) \quad (17)$$

但し、 $\mathbf{A} = [\partial f / \partial \mathbf{x}]_{c=c_0, \mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$ 、 $\mathbf{g}^0(\Delta c)$ 、 $\mathbf{g}^1(\Delta c)$ 共にその要素は定数項を含まない Δc の多項式であり、 $\mathbf{g}^2(\Delta x, \Delta c)$ の各要素は Δx の要素 Δx_i に関して定数項および一次項を含まない多項式である。(17)式に対して変換行列 $\mathbf{T}_1$ を用い、 $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{T}_1^{-1} \Delta \mathbf{y}$ を代入して変換を行なうと(18)式を得る。

$$\frac{d\Delta \mathbf{y}}{dt} = \mathbf{h}^0(\Delta c) + \{\mathbf{A} + \mathbf{h}^1(\Delta c)\} \Delta \mathbf{y}$$

$$+ \mathbf{h}^2(\Delta \mathbf{y}, \Delta c) \dots (18)$$

但し、 $\mathbf{A} = \mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}_1^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 、 $\mathbf{h}^0(\Delta c)$ 、 $\mathbf{h}^1(\Delta c)$ の各要素は定数項を含まない Δc の多項式、また $\mathbf{h}^2(\Delta \mathbf{y}, \Delta c)$ の各要素は $\Delta \mathbf{y}$ の要素 Δy_i に関して定数項および一次項を含まない多項式となる。さて、(18)式において $\mathbf{A}$ の一つの固有値 λ_k が虚部を持てば、必ずこれと共役な λ_m が存在し、このとき変換行列 $\mathbf{T}_1$ を構成する固有ベクトルも共役となる。いま、(18)式における1対の共役なモード k, m を抜き出して考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} h_k^0(\Delta c) \\ h_m^0(\Delta c) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \lambda_k + h_{kk}^1(\Delta c) & h_{km}^1(\Delta c) \\ h_{mk}^1(\Delta c) & \lambda_m + h_{mm}^1(\Delta c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_m \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \sum_{i=1, i \neq k, m}^n h_{ki}^1(\Delta c) \Delta y_i \\ \sum_{i=1, i \neq k, m}^n h_{mi}^1(\Delta c) \Delta y_i \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} h_k^2(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta c) \\ h_m^2(\Delta y_1, \dots, \Delta y_n, \Delta c) \end{bmatrix} \dots (19) \end{aligned}$$

(19)式において Δy_k 、あるいは Δy_m に関する一次項は右辺の第2項以外に第4項にも $\Delta y_i (i \neq k \text{ あるいは } m)$ との積の形で含まれている。いま、 $\Delta y_k, \Delta y_m$ の定常点付近の運動のみを考え、 $\Delta y_k, \Delta y_m$ に関する二次以上の項を無視すると、(19)式は $\Delta y_k, \Delta y_m$ に関する一次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_k + P_{kk}^1 & P_{k, m}^1 \\ P_{m, k}^1 & \lambda_m + P_{mm}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_m \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} P_k^2 \\ P_m^2 \end{bmatrix} \dots (20) \end{aligned}$$

但し、右辺第1項は(19)式中の $\Delta y_k, \Delta y_m$ の一次項を集めたものであり、第2項は $\Delta y_k, \Delta y_m$ を含まぬ項を集めたものである。また(20)式の要素 $P_{kk}^1, P_{k, m}^1, P_{m, k}^1, P_{mm}^1, P_k^2, P_m^2$ は Δc と $\Delta y_i (i \neq k, \text{ あるいは } m)$ の多

項式となり定数項は含まない。従って、原方程式(14)式における非線形性を無視し、かつ Δc が零であれば $P_{kk}^1, P_{km}^1, P_{mk}^1, P_{mm}^1, P_k^2, P_m^2$ は全て零となる。

まず、 c は変動しないものとして系統に過渡的動揺が起こった場合、あるいは運用中の微小外乱によって定常点付近で微小な動揺が続く場合を考えると、(20)式の $P_{kk}^1, P_{km}^1, P_{mk}^1, P_{mm}^1, P_k^2, P_m^2$ は他モードの固有周波数を基本波とする周期関数となる。すなわち、注目している共役なモード k, m では定常点付近でパラメータ振動方程式が形成され、持続的に他モードの固有周波数を基本波とする、周期外乱を受けることになる。この様な状況を想定したものが実は一機準無限大母線系統であった。

次に、系統のパラメータ c が周期的に変動する場合を考えると、やはり上述と同様に(20)式の $P_{kk}^1, P_{km}^1, P_{mk}^1, P_{mm}^1, P_k^2, P_m^2$ は Δc の変動周期を基本波とする周期関数となる。前節の Ward & Hale 6 母線系統で確認された異常現象はモード領域において、このようなパラメータ振動方程式が形成されていることを物語っている。

このように多様系統においても、それぞれのモード領域でパラメータ振動方程式が形成されると考えられるが、(20)式は一般的には付録1に示すような強制振動項を持つマシュー型の方程式になるとは限らない。しかしながら、(20)式はある条件下では強制振動項を持つマシュー型方程式となることを付録2に示す。

4. む す び

本論文では電力系統をパラメータ振動方程式として定式化し、電力系統におけるパラメータ共振の可能性について論じた。本論文を要約すると以下の様になる。

(1) 本現象は母線電圧、母線位相角が単独に、あるいは同時に周期変動する場合に発生する可能性がある。

(2) (1)は、負荷変動などの系統パラメータ変動や他の発電機の動揺などの外乱によって発生する可能性がある。

(3) 系統ダンピングがある場合にも外乱が大きければ本現象は発生し得る。また、多機系において多数の制御系が分散配置されていても、なお、poor dampingな運転状態にあれば、微小外乱に対しても本現象の発生が考えられる。

本論文では、運転点付近における微小な振動の安定性を問題にした。ここでの解析は発電機を簡略表現することによって、実系統に存在する様々な非線形特性を無視し、どうしても無視し得ない動揺方程式の非線

形特性だけを考慮した。従って実系統において本現象が発生する場合、振動に非線形性が増し、発散の程度、発散の様子は本論文の結果とは多少異なることが予想される。実系統では変圧器飽和、発電機飽和、制御装置の非線形特性など、様々なものが考えられるが、これらによって、更に共振が強められる場合や共振の現れる頻度が増す場合も考えられ、今後、更に研究が必要である。

(昭和59年3月6日受付、同59年7月12日再受付)

文 献

- (1) 例えば、清水：「非線形振動論」(昭43)培風館
- (2) 例えば、亘理 厚：「機械振動」(昭55)丸善
- (3) J.B. Ward & H.W. Hale: "Digital Computer Solution of Power Flow Problems", AIEE Trans. Power Apparatus Syst. PAS-75, pp. 398 (1956)

付 録

1. 強制振動項を持つマシュー型方程式の安定解析
いま、問題とする方程式は(付1)式である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Delta \theta}{d\tau^2} + (a + \varepsilon \cos 2\tau) \Delta \theta &= F(\tau) \\ F(\tau) &= \varepsilon_1 \cos(2\tau - \phi_A + \phi_B) \end{aligned} \right\} \dots (付1)$$

< $F(\tau) \equiv 0$ の場合 >

(付1)式において、強制振動項 $F(\tau) \equiv 0$ とおけば良く知られたマシュー方程式となる。マシュー方程式の二つの独立解を(付2)式、(付3)式に示す⁽¹⁾⁽²⁾。

まず、安定領域内では

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta_1(\tau) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_m \cos(m + \beta)\tau \\ \Delta \theta_2(\tau) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_m \sin(m + \beta)\tau \end{aligned} \right\} \dots (付2)$$

となる。但し、 C_m は、 (a, ε) に従属して決まる定数であり $0 < \beta < 1$ 、また

$m = 2r$; (a, ε) が a_{2n}, b_{2n+1} の間にあるとき

$m = 2r + 1$; (a, ε) が a_{2n+1}, b_{2n+2} の間にあるときとなる。但し、 n は自然数である。

次に、不安定領域内では

$$\left. \begin{aligned} \Delta \theta_1(\tau) &= e^{\mu\tau} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_m \cos(m\tau + \phi_m) \\ \Delta \theta_2(\tau) &= e^{-\mu\tau} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_m \cos(m\tau - \phi_m) \end{aligned} \right\} \dots (付3)$$

となる。但し、 ρ_m, ϕ_m は (a, ε) に従属して決まる実定数で、 $\phi_0 = 0$ 、また

$m = 2r$; (a, ε) が b_{2n}, a_{2n} の間にあるとき

$m = 2r + 1$; (a, ε) が b_{2n+1}, a_{2n+1} の間にあるとき
但し n は自然数である。また(付3)式における μ は、

$$0 < \mu \approx \sqrt{(a_k - a)(a - \beta_k)} \dots (付4)$$

但し, α_k, β_k はマッシュー線図上で点 (a, ε) を通る a 軸と平行な直線と概当領域を囲む境界線 a_k, b_k との交点の a 座標の値である。

$\langle F(\tau) \neq 0$ の場合

さて線形方程式の一般論として(付5)式を考える。

$$\frac{dx}{d\tau} = A(\tau)x + u(\tau) \quad \dots\dots\dots (付5)$$

(付5)式の一般解は, $u(\tau) \equiv 0$ の場合の解行列 $\Phi(\tau)$ を用いて(付6)式で表わされる。

$$x(\tau) = \Phi(\tau)C + \Phi(\tau) \int_0^\tau \Phi^{-1}(s)u(s)ds \quad \dots\dots\dots (付6)$$

いま, (付5)式が(付1)と同一のものであるとして, その一般解である(付6)式を吟味する。解行列 $\Phi(\tau)$ を(付2)式あるいは(付3)式で示される二つの基本解を用いて定義する。

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &\triangleq \begin{bmatrix} \Psi_1(\tau) & \Psi_2(\tau) \\ \frac{d\Psi_1(\tau)}{d\tau} & \frac{d\Psi_2(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix} \\ &= k \begin{bmatrix} \Delta\theta_1(\tau) & \Delta\theta_2(\tau) \\ \frac{d\Delta\theta_1(\tau)}{d\tau} & \frac{d\Delta\theta_2(\tau)}{d\tau} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (付7) \end{aligned}$$

ここで k は非零の定数で $\det \Phi(0) = 1$ となるように選ばば, Abel の公式を用いて(付8)式が成り立つ。

$$\det \Phi(\tau) \equiv \det \Phi(0) \exp \left\{ \int_0^\tau \text{tr} A(s) ds \right\} = 1 \quad \dots\dots\dots (付8)$$

但し,

$$A(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a - \varepsilon \cos 2\tau & 0 \end{bmatrix}$$

従って解行列の逆行列は簡単に計算され次式となる。

$$\Phi^{-1}(\tau) = \begin{bmatrix} d\Psi_2(\tau)/d\tau & -\Psi_2(\tau) \\ -d\Psi_1(\tau)/d\tau & \Psi_1(\tau) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (付9)$$

これらより(付6)式を具体的に計算すると(付1)式の一般解が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta\theta(\tau) &= C_1 \Psi_1(\tau) + C_2 \Psi_2(\tau) \\ &+ \Psi_1(\tau) \int_0^\tau \Psi_2(s) F(s) ds \\ &- \Psi_2(\tau) \int_0^\tau \Psi_1(s) F(s) ds \quad \dots\dots\dots (付10) \end{aligned}$$

ここで C_1, C_2 は初期値によって決まる定数である。

(付6)式において, マッシュー方程式の不安定領域内では右辺第1項が無限大に発散するので強制振動項を持つマッシュー方程式も不安定になることがわかる。

一方, 安定領域内においては, $\phi_1(\tau), \phi_2(\tau)$ がともて有界になるので, 本式の安定性は右辺の積分項にかかってくる。いま, 具体的にこれらの積分項を計算し

てみる。

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \Psi_2(s) F(s) ds &= k \int_0^\tau \Delta\theta_2(s) F(s) ds \\ &= \int_0^\tau \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_1 k c_m}{2} [\sin \{(m+\beta+2)s \\ &\quad - \phi_A + \phi_B\} + \sin \{(m+\beta-2)s \\ &\quad + \phi_A - \phi_B\}] ds \\ \int_0^\tau \Psi_1(s) F(s) ds &= \int_0^\tau \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_1 k c_m}{2} [\cos \{(m+\beta+2)s \\ &\quad - \phi_A + \phi_B\} + \cos \{(m+\beta-2)s \\ &\quad + \phi_A - \phi_B\}] ds \quad \dots\dots\dots (付11) \end{aligned}$$

(付2)式で説明したように $0 < \beta < 1$ であるから(付11)式は明らかに有界であり, 従って(付10)式も有界となる。以上より境界線上での議論は省略したが, 強制振動項を持つマッシュー方程式の安定性は (a, ε) の値のみで決まり, マッシュー線図によって判別できることがわかる。また, (付1)式右辺の ε_1 は式の安定性には関係しないが, $\Delta\theta$ の振幅には影響を与えることを付記しておく。

なお, 系統にダンピングを有する場合についても上記と同様な手法を用いて解析でき, 図2のマッシュー線図の $D > 0$ に対する安定限界曲線を用いて安定判別が可能である。

2. 強制振動項を持つマッシュー形方程式の導出

(20)式に対し変換行列 T_2 によって変換を行なうと(付12)式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 1+l_2 \\ -|\lambda|^2 l_3 & (\lambda+\bar{\lambda})+l_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_5 \\ l_6 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (付12)$$

$$\text{但し, } \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} \Delta y_k \\ \Delta y_m \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

また, $\lambda = \lambda_k, \bar{\lambda} = \lambda_m$ であり, $l_i (i=1 \dots 6)$ は定数項を含み Δc と Δy_i の多項式で, 系統の動揺に対して l_i は周期関数となる。 l_i は一般的に非線形構造に依存しており, l_1, l_2, l_4, l_5 の影響が無視できるという条件があれば, l_3, l_6 の基本波成分にのみ着目し, (付10)式は強制振動項を持つマッシュー型方程式となる。すなわち, (付13)式とおけば(付14)式を得る。

$$\begin{aligned} l_3 &\triangleq k_3 \cos(\omega t + \phi_3) \\ l_6 &\triangleq k_6 \cos(\omega t + \phi_6) \quad \dots\dots\dots (付13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z_1}{dt^2} - (\lambda + \bar{\lambda}) \frac{dz_1}{dt} + (|\lambda|^2 + k_3 \cos(\omega t + \phi_3)) z_1 \\ = k_6 \cos(\omega t + \phi_6) \quad \dots\dots\dots (付14) \end{aligned}$$