UDC 621.311.1.015.4: 621.313.12: 681.5.015

論文

60-B 93

電力系統におけるパラメータ共振について

正員 餘利野 直人・准員 久保田 徹 (早稲田大)
 准員 長島 義明・正員 森 啓之 (早稲田大)
 ・正員 田村 康男 (早稲田大)

1. まえがき

電力系統に周期外乱が加わる場合、特定周波数の外乱に対しては、共振によって発電機は大きく動揺する。筆者らはこのような周期外乱に注目し、系統をパラメータ振動方程式として定式化することにより、共振周波数は固有周波数以外にも存在することを指摘した⁽¹⁾⁽²⁾。

本論文では上記の研究に基づいて、まず第一に、一機無限大母線系統において周期外乱に対する発電機動揺を吟味する。その結果、発電機の制動巻線及び制御系の制動効果は発電機リアクタンス背後電圧一定の簡略モデルを使用しても、等価な制御係数 D を与えることで、かなりの精度で模擬できることを示す。また第二に、長周期・弱制動振動の研究の一端として電力系統における内部共振問題について述べる。これは多機系統の主要モード間での共振問題であり、特定の条件下(系統運用状態)において系統故障などによる外乱が生じた場合、モード間でエネルギー授受が行なわれることを指摘したものである。解析には multiple scales 法⁽⁴⁾⁽⁷⁾(非線形解析方法で摂動法の一つ)を用い、一般の n 機系統について内部共振の存在を指摘し、特に4機放射状系統について数値例で示す。なお内部共振問題に関する他分野の研究は3体問題などがある⁽³⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

2. パラメータ共振の発生メカニズム⁽¹⁾⁽²⁾

本章では、共振発生のメカニズムを発電機リアクタンス背後電圧一定の発電機簡略モデル(後述の X_d' モデルはこれに属する)を通して簡単に述べる。ここで

On Parametric Resonance in Power Systems. By Naoto Yorino, Member, Yoshiaki Nagashima, Associate Member, Tetsu Kibota, Associate Member, Hiroyuki Mori, Member & Yasuo Tamura, Member (Department of Electrical Engineering, Waseda University).

餘利野直人：正員早稲田大学電気工学科博士課程(現在、同大学助手)
 長島義明：准員、早稲田大学電気工学科修士課程(現在、三菱電機)
 久保田 徹：准員、早稲田大学電気工学科修士課程(現在、日本IBM)
 森 啓之：正員、早稲田大学電気工学科助手(現在、明治大学助手)
 田村康男：正員、早稲田大学電気工学科教授

特に簡略モデルを用いるのはパラメータ共振現象の説明に際し第3章中の詳細モデル(二反作用理論モデル)を用いずとも簡略モデルで簡単に説明できるためである。図1は、電力系統内の1台の発電機に注目したもので、それ以外は等価な無限大母線として表わしたものである。系統内外で発生する周期外乱を、この無限大母線電圧、および位相角の正弦波状変動として模擬する。発電機リアクタンス背後電圧一定の簡略モデルを用いれば次式が成り立つ。

$$\frac{2H}{\omega_R} \frac{d^2\theta}{dt^2} + D \frac{d\theta}{dt} = P_m - \frac{V_G V_B}{X_G} \sin(\theta - \theta_B) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} V_B &= V_{B0} + V_{B1} \cos(\omega t + \phi_V) \\ \theta_B &= \theta_{B0} + \theta_{B1} \cos(\omega t + \phi_\theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 H ：単位慣性定数、 ω_R ：系統周波数、 θ ：発電機内部位相角、 D ：制動係数、 P_m ：機械入力、 V_G ：発電機リアクタンス背後電圧、 X_G ：発電機リアクタンス、 V_B ：無限大母線電圧、 θ_B ：無限大母線位相角、 V_{B1} ：無限大母線電圧変動分、 θ_{B1} ：無限大母線位相角変動分、 ω ：外乱周波数、 X_e ：線路リアクタンス、 V_T ：端子電圧(図1参照)

(2)式の外乱を考慮し、(1)式の動揺方程式を定常点の周りで展開して高次項を無視すると、右辺に強制振動項をもつマシュー方程式を得る。

$$\frac{d^2\Delta\theta}{d\tau^2} + \sigma \frac{d\Delta\theta}{d\tau} + (a + \varepsilon \cos 2\tau) \Delta\theta = \varepsilon_1 \cos(2\tau - \phi_A + \phi_B) \dots\dots\dots (3)$$

但し、 $a = (4/\omega^2)K$ 、 $\varepsilon = (4/\omega^2)KA$ 、 $\Delta\theta = \theta - \theta_0$

$$A = \sqrt{\left(\frac{V_{B1}}{V_{B0}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_{B1} \tan \delta_0}{2}\right)^2} *$$

図1 モデル系統

Fig. 1. Model system.

図2 マシュー線図

Fig. 2. Matheius diagram.

$$\begin{aligned} & * + \frac{V_{B1}}{V_{B0}} \theta_{B1} \tan \delta_0 \cos(\phi_V - \phi_\theta) \\ \delta_0 &= \theta_0 - \theta_{B0} \\ K &= \frac{\omega_R V_G V_{B0} \cos \delta_0}{2H X_G} \\ \phi_A, \phi_B, \varepsilon_1 &: \text{定数}, \sqrt{K} = \text{系統固有周波数} \end{aligned} \quad (4)$$

(3)式の安定性は、 ε_1 の値によらず一般に知られた右辺=0のマシュー方程式同様、図2のマシュー線図を用いて判別されることが証明されている。(4)式に示した関係式から a と ε の関係を示すと、

$$a = (1/A)\varepsilon \quad (5)$$

となる。(4)式から A は外乱の大きさを表わし、通常は小さな値である。発電機に加わる外乱の大きさを一定に保ち (A = 一定)、外乱周波数 ω を変化させると (a, ε) の値はマシュー線図において(5)式の直線上を移動するが、制動 σ が小さければこの直線は

$$a \approx 1, 4, 9, \dots, n^2 \quad (6)$$

付近で不安定領域にかかっている。(6)は、すなわち $\omega \approx 2\sqrt{K}, \sqrt{K}, 2\sqrt{K}/3, \dots, 2\sqrt{K}/n \dots (7)$ となり、この周波数付近の外乱が加わると当該発電機は発散性の振動を起す可能性がある。

上記は一機無限大母線系統について母線電圧および位相角変動として外乱を模擬したが、負荷変動などによっても発生する可能性があり、文献(1),(2)では、これらを指摘している。

3. 発電機モデルおよび制御系効果の検討

第2章で述べた一機無限大母線系統に対して、パー

クの二反作用理論による発電機詳細モデルを用いてシミュレーションを行ない、周期外乱に対する動揺を考察する。例題として用いる発電機の定数⁽⁹⁾、運転条件および発電機に与える外乱の条件を表1に示す。また、表1の発電機定数、および運転状態から算出した詳細モデルの7個の固有値を表2の左の欄に示す。この7個の固有値の中で(1)式の簡略モデルの固有値に相当する一対の固有値は $-0.562 \pm j10.74$ であり、10.74 を発電機の優勢な固有周波数 $\sqrt{K_A}$ と考える。一方、簡略モデルについては(1)式を用い、 X_G は、

$$X_G = X_d' + X_e \dots \dots \dots (8)$$

を用いた。すなわち、これは良く知られた X_d' モデル⁽⁹⁾を採用したことにはかならない。この簡略モデルの固有値は(1)式より計算され減衰係数 ζ (△固有値実部/虚部)を用いて

$$\lambda = -\zeta \sqrt{K_B} + j\sqrt{K_B} \dots \dots \dots (9)$$

と表わせる。ここで、 $\sqrt{K_B}$ は特に簡略モデルの固有周波数を表わすが、(3)式における $\sqrt{K}$ と同一のものであることはいうまでもない。さて、シミュレーションに際し、(1)式の D の値が問題となるが、ここでは詳細モデルの減衰係数 $\zeta (=0.562/10.74=0.052)$ と簡略モデルのそれが一致するように D を決定した。すなわち、次式に基づいて $D=0.0163$ を用いた。

$$D = (4H/\omega_R) \zeta \sqrt{K_B} \dots \dots \dots (10)$$

このときの、簡略モデルにおける2個の固有値を表2の右の欄に示す。表2の左右の欄の比較において、 X_d' モデルの固有周波数は10%程度の誤差があることに注意する必要がある。上記条件下において無限大

表1 発電機定数および外乱条件

Table 1. System parameters.

発電機定数			
Rated MVA=160 Rated PF=0.85 Rated kV=15 Freq.=60Hz			
X_d''	0.185 pu	X_1	0.110 pu
X_d'	0.245 pu	X_2	0.115 pu
X_d	1.700 pu	X_0	0.100 pu
X_q''	0.185 pu	T_d''	0.025 s
X_q'	0.380 pu	T_d'	0.850 s
X_q	1.640 pu	T_q''	0.0086 s
r_s	0.016 pu	T_a	0.240 s
r_a	0.0031 pu	H	2.370 s
運転条件			
Pe	1.0 pu	θ_{B0}	0.0 rad
PF	0.85	X_e	0.4 pu
V	1.0 pu		
外乱条件			
V_{B1}	0.2 pu	ϕ_B	0.0 rad
θ_{B1}	0.2 rad	ϕ_θ	$-\pi/2$ rad

* $D=0.016$, $X_G=X_d'+X_e$ (X_d' Model)

表 2 発電機モデルの固有値比較
Table 2. Eigenvalues of the system.

詳細モデル (rad/s)	簡略モデル (rad/s)
$-0.701 \pm j 377$	—
$-0.562 \pm j 10.74$	$-0.617 \pm j 11.80$
-0.256	—
-37.48	—
-45.88	—

母線を(2)式に従って運転点付近で周期変動させて発電機に対し外乱を加え、発電機動揺を調べた。

図3において、Aは詳細モデル、Bは簡略モデルによるシミュレーション結果である。それぞれのモデルにおける動揺波形をA-1~A-3、B-1~B-3に示す。また外乱周波数 ω をいろいろと変えてシミュレーションを行ない、それぞれの最大振幅をグラフにしたのが、A-4とB-4である。これらを比較すると、固有周波数が約10%ずれているため、発電機動揺がピークを示す ω の値が異なる点を除けばA、B両者の動揺の様子は非常に良く似ている。特に両者共に固有周波数の2倍と1/2倍の点で共振現象が認められ、これは筆者らが指摘するパラメータ共振である。

次に、表1に示す詳細モデルにおいて制御系を付加し、その影響をシミュレーションによって確認する。付加した直流励磁方式励磁系⁽⁵⁾、カバナ⁽⁸⁾のブロック

図 4 AVR ブロック線図

Fig. 4. Excitation system.

図 5 ガバナブロック線図

Fig. 5. Speed governor system.

線図を図4、図5に、また先と同条件の外乱に対するシミュレーション結果を図6に示す。これより共振の発生している周波数や振動の傾向は、制御系をもたない発電機に対するシミュレーション結果と非常に良く似ていることがわかる。但し、速応励磁方式の場合には、これと異なった結果を与えることも考えられる。

以上の結果をまとめれば、(7)式で示した共振周波数系列の中で実際に問題となるのは、主要固有周波数とその2倍、1/2倍と考えられる。ここでいう主要固有周波数は多機系統においては系統の弱制動モードに相当する。そして、これらの共振は制動が悪くなるほど、顕著になると考えられる。一方、このように持続的周期外乱に対し、主要固有周波数とその2倍と1/2倍の共振点が顕著であり、それ以外の点には顕著なものがないことについて一般の非線形振動論の立場からいえば、電力系統の非線形特性はTaylor展開の2乗の項が支配的であるといえることができる。更にいえば、前述の発電機簡略モデルにおいてもこの特質は保持されており、この意味で等価な制動係数 D をもつ簡略モデル(X_d' モデル)は電力系統の非線形現象を説明する上で適したモデルであるといえる。次章では、 X_d' モデルを用い、前述のTaylor展開の2乗の項までを考慮して非線形現象の一つである内部共振現象の解析を行なう。なお、数値積分は4次のRun-

図 3 周期外乱に対する発電機応答

Fig. 3. Response of generator for sinusoidal disturbance. (A: detailed model B: Simplified model)

図 6 AVR バナ付き発電機の応答

Fig. 6. Response of generator with AVR and governor.

ge Kutta 法を用い、刻み幅 1/377 秒(詳細モデル)、0.02 秒(簡略モデル)とした。

4. 多機系統における内部共振問題

一般の多機電力系統において一機に注目した場合、注目した発電機の受ける周期外乱としてはほかの発電機動揺、負荷変動などがある。第 2 章ではこれらを母線の周期変動{(2)式}として一括して扱ったが、本章では特に他の発電機の動揺にのみ注目し、 n 機電力系統の発電機の自由振動として取り扱う。従って、本章で考える外乱は地絡事故等の通常の外乱であり、このような外乱後の発電機動揺を考察する。

第 3 章で検討を行なった発電機簡略モデルを用いて n 機電力系統を表わす。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{2H_i}{\omega_R} \ddot{\theta}_i + d_i \dot{\theta}_i &= P_{mi} - P_{ei} = P_{ai} \\ P_{ei} &= \sum_{j=1}^n Y_{ij} E_i E_j \sin(\theta_i - \theta_j + \alpha_{ij}) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

$i = 1 \sim n$

但し、 P_{ai} : 発電機出力、 θ_i : 内部位相角、 H_i : 単位慣性定数、 E_i, E_j : 背後電圧、 P_{mi} : 機械入力、 d_i : 制動係数、 $Y_{ij}/(\pi/2) - \alpha_{ij}$: 発電機内部母線からみた駆動点アドミタンス、 $Y_{ij}/(2/\pi) - \alpha_{ij}$: 発電機 i, j の内部母線間の伝達アドミタンス、 ω_R : 系統周波数

本章では、(11)式の摂動展開の一次近似解を求める過程において内部共振を指摘する。まず(11)式を次の形に変換する(付録1(付3)、(付4)式参照)。

$$\ddot{x} + A\dot{x} = -\mu \dot{x} + g^{(2)}(x) \dots (12)$$

但し、

$$x = V^{-1} \Delta \theta \dots (13)$$

ここで、 $g^{(2)}$ は x の二次の項からなる非線形関数であり、一次近似解を求めるにあたり、寄与しない三次以降の展開項は無視されている。すなわち、(12)式は(11)式でテーラー展開の三次以降を無視したものと等価である。(12)式に対し摂動法の一つである multiple scales 法の一次近似⁽⁴⁾⁽⁷⁾を適用する。本法においてはまず時間を意味する独立変数 T_0, T_1 を導入し、解の

形を(14)式で定義する(本法の n 次近似においては独立変数は $T_0, T_1, \dots, T_n$ まで考慮し、解の形は ε^{n+1} のオーダーまで考える)。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} x_k &= \varepsilon u_{k1}(T_0, T_1) + \varepsilon^2 u_{k2}(T_0, T_1) \\ T_i &= \varepsilon^i t, \quad D_i = \partial/\partial T_i, \quad i=0, 1, \quad k=1 \sim n \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

(14)式を(12)式に代入すれば、次式を得る(付録1参照)。

$$u_{k1} = A_k(T_1) \exp(j\omega_k T_0) + CC, \quad k=1 \sim n \dots (15)$$

$$\left. \begin{aligned} D_0^2 u_{k2} + \omega_k^2 u_{k2} &= -j2\omega_k A_k' \exp(j\omega_k T_0) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \{ j\omega_i \mu_{ki} A_i \exp(j\omega_i T_0) \} \\ &\quad + \sum_{ij}^n \{ A_i A_j M_{ij}^{(k)} \exp\{j(\omega_i + \omega_j) T_0\} \\ &\quad + A_i \bar{A}_j M_{ij}^{(k)} \exp\{j(\omega_i - \omega_j) T_0\} \} \\ &\quad + CC, \quad k=1 \sim n \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

但し、 $\bar{A}_j$ は A_j の複素共役、 CC は前項までのすべての複素共役項を表わす。また

$\mu_{ij} = (1/\varepsilon) \mu_{ij}, A_i' = \partial A_i / \partial T_1, M_{ij}^{(k)}$ は定数である。

(15)式は x_k の一次近似解 u_{k1} であり、(16)式は二次近似解 u_{k2} の満たすべき微分方程式である。(16)式は左辺の固有周波数 ω_k の系が右辺の強制振動項によって励振する形になっている。従って、

$$\omega_k \approx \omega_i \pm \omega_j \quad (i, j, k=1 \sim n) \dots (17)$$

の関係が成立する場合、モード i, j, k 間に強い結合が生じる。すなわち、これが内部共振である。(17)式は異なる 3 モード i, j, k の固有周波数の関係を表わしているが、これに加え $i=j, i=k, j=k$ などの場合も含まれており((16)式の右辺第 3, 4 項の中にこれらの場合が含まれている)、これらは異なる 2 モード間の共振を意味する(例えば $i=j$ の場合、(17)式は、 $\omega_k \approx 2\omega_i$ となり、異なる 2 モード i, j の共振条件が導かれる)。以下 n 個のモード中で特定の二つのモード p, q 間での共振問題に話を限定し考察する($i, j, k=p, q$)。モード p, q 間で(17)式の関係を満たすのは、

$$\left. \begin{aligned} \omega_p &\approx \omega_q + \omega_q \quad (k=p, i=q, j=q) \\ \omega_p &\approx \omega_q - \omega_p \quad (k=p, i=q, j=p) \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

の場合であり、特に $2\omega_p \approx \omega_q$ について解析する。

$$2\omega_p = \omega_q - \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon \ll 1 \dots (19)$$

ここで、 σ_ε は共振のずれを表わす量であり、これが小さい場合に内部共振が問題となる。また p, q 以外

の各モード k ($k=1\sim n, k\neq p, q$) においては共振条件を満たさず、モード p, q だけで共振が発生する場合に話を限定する。すなわち、次式が成り立つとする。

$$\omega_k \neq \omega_i \pm \omega_j \quad (i, j, k \neq p, q) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$k=1\sim n$ に対し、(16)式を考えると本式は線形方程式であり、右辺から固有周波数 ω_k の励振を受けた場合二次近似解 u_{k2} は発散する。従って、右辺の ω_k に関する励振項を零と置くことによって(15)式 A_k に関する条件式を導く(永年項除去)。(19)、(20)式を考慮して上記の操作を行なうと(12)式の一次近似式が得られる(付録2参照)。

$$x_k(t) \approx \varepsilon u_{k1}(t, \varepsilon t) = C_k(t) \cos(\omega_k t + \varphi_k(t)) \quad \dots\dots\dots (21)$$

但し、 C_k, φ_k は次式より求まる。

$\langle k=p, q \text{ の場合} \rangle$

$$\left. \begin{aligned} \dot{C}_p &= -\frac{1}{2} \mu_{pp} C_p \\ &\quad + \frac{C_p C_q (M_{qp}^{(p)} + M_{pq}^{(p)})}{4 \omega_p} \sin \gamma \\ \dot{C}_q &= -\frac{1}{2} \mu_{qq} C_q - \frac{C_p^2 M_{pp}^{(q)}}{4 \omega_q} \sin \gamma \\ \dot{\gamma} &= \sigma_\varepsilon + \left\{ \frac{C_q (M_{qp}^{(p)} + M_{pq}^{(p)})}{2 \omega_p} \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_p^2 M_{pp}^{(q)}}{4 C_q \omega_q} \right\} \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

但し、 $\gamma = \varphi_q - 2\varphi_p + \sigma_\varepsilon t$

$\langle k \neq p, q \text{ の場合} \rangle$

$$\left. \begin{aligned} C_k(t) &= C_{k0} \cdot \exp \left\{ -\frac{\mu_{kk}}{2} t \right\} \\ \varphi_k(t) &\equiv \varphi_{k0} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

(21)~(23)式によって、モード領域における一次近似式の性質が決定できる。まず(23)式から内部共振がない場合、モード領域における振幅 C_k は、安定限界($\mu_{kk}=0$)においては一定、安定領域($\mu_{kk}>0$)においては指数関数的に単調減小することがわかる。すなわち、この場合、通常の線形化による解析と同じである。それに反して内部共振が起る場合は、(22)式で示されるように、モード p, q 間で振幅、位相が密接な関係をもつ。(22)式の解は次節に数値例を示すが、通常は振動的である。いま、モード p, q のエネルギーとして、

$$\left. \begin{aligned} E &= C_p^2 + \nu C_q^2 \\ \nu &= \omega_q (M_{qp}^{(p)} + M_{pq}^{(p)}) / (\omega_p M_{pp}^{(q)}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

を考えれば、特に制動のない場合($\mu_{pp}=\mu_{qq}=0$)、エネルギー保存則：

$$\dot{E} = 0 \quad (E = \text{const}) \quad \dots\dots\dots (25)$$

が成り立つ。制動がある場合($\mu_{pp}, \mu_{qq}>0$)は E は指数関数的に減小すると考えられるが、その際にも、モード p, q 間でエネルギー授受が行なわれるため、 p または q のモードでは振幅が増大する。このように、系統の主要モード(弱制動モード)間で内部共振が発生した場合、例え制動があっても他モードからの励振によって振幅が増大し、場合によっては脱調に至るなどの危険な状況が予想される。次章では内部共振について数値例を示す。

5. 内部共振のシミュレーション

多機系モデルとして、同期発電機3台と同期電動機1台が共通母線で接続された図7の放射状系統を取り上げ、定常運転時に系統に外乱を加え、その後の系統の動揺を調べた。系統に与える外乱は、同期電動機である4号機の負荷 P_{m4} の値が図8のように、ステップ変動するものとした。シミュレーションには4次のRunge-Kutta法(刻み幅0.02秒)を用い(11)式を直接に数値積分することで60秒間の各発電機の出力波

Fig. 7. Radial 4-Machine system.

図8 ステップ外乱

Fig. 8. Step-shaped disturbance.

表3 発電機定数

Table 3. System parameters.

	#1	#2	#3	#4
$P_m \text{ p.u.}$	0.207	0.354	0.165	-0.725
$V \text{ p.u.}$	1.070	1.050	1.040	0.985
$X_d' + X_s \text{ p.u.}$	1.000	1.400	0.600	0.150
$\theta_0 \text{ rad}$	0.200	0.500	0.100	-0.108

表 4 慣性定数と系統固有周波数

Table 4. Inertia constants and natural frequencies.

CASE	慣性定数 (s)				系統固有周波数 (rad/s)		
	H1	H2	H3	H4	ω_1	ω_2	ω_3
1	1.00	0.91	0.72	1.12	11.26	15.06	22.53
2	1.00	2.00	0.41	0.32	9.26	18.53	37.05
3	1.00	1.01	0.72	1.12	10.85	15.03	22.55

図 9 ΔP_i の波形Fig. 9. Wave forms of ΔP_i .

形を調べた。シミュレーションは発電機慣性定数を変化させて共振の発生する場合 (Case 1, Case 2) と共振の発生しない場合 (Case 3) の計 3 ケースを設定し

た。発電機定数および各ケースにおける系統固有周波数を表 3, 表 4 に示す。なお、制動は零とした。

シミュレーション結果を図 9 に示す。図 9 は発電機出力の定常点からの変位 ΔP_i であるが、図からも明らかに複数の周波数成分を含んでおり、このままではわかりにくい。そこで、数値積分より求めた解 $\theta(t)$ の定常点からの変位 $\Delta\theta(t)$ に対し次の一次変換

$$x(t) = V^{-1} \Delta\theta(t) \\ = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_{zero}]^T \dots (26)$$

によって解をモード 1~3, および x_{zero} に変換する。上式で x_{zero} は零固有値に相当するモード, $x_1 \sim x_3$ はそれぞれ固有周波数 $\omega_1 \sim \omega_3$ の周波数成分だけから成るモードであり、(26)式によって $\Delta\theta(t)$ は $\omega_1 \sim \omega_3$ の各周波数成分に分解できる。すなわち、図 10 は上記操作によって得られた $\Delta\theta(t)$ のモード領域における

図 10 モード領域における波形

Fig. 10. Wave forms in mode space.

表 5 (22)式の係数の値
Table 5. Parameters for Eqn. (22)

$\omega_1=11.26, \omega_2=22.52, \sigma_3=0.0, \mu_{11}=0.0, \mu_{33}=0.0$
$M_{11}^{(1)}=M_{11}^{(2)}=11.79, M_{11}^{(3)}=19.92, c_{12}=2.812 \times 10^{-3}$
$c_{13}=7.403 \times 10^{-3}, r_{12}=1.571$

図 11 (11)式, (22)式のシミュレーションの比較
Fig. 11. Comparison between Eqn. (11) and Eqn. (22).

波形である。図 10 Case 1 は $2\omega_1 \approx \omega_3$ で共振条件が成立し、モード 1 とモード 3 の間で内部共振が発生し振幅変化が現われているが、共振条件の成立しないモード 2 では振幅変化はない。また Case 2 ($2\omega_1 \approx \omega_2, 2\omega_2 \approx \omega_3$) は 3 モード間で共振がみられるが、どのモード間も共振条件を満たさない Case 3 では振幅変化は全くみられない。

前章では、特に二つのモード p, q 間での共振を詳細に検討したが、これは上記 Case 1 に相当する ($p=1, q=3$)。以下 Case 1 についてのみ考察する。さて図 10 の Case 1 について振幅だけに注目し示したものが図 11 の実線である。一方、図 11 の破線は(22)式において $p=1, q=3$ として(22)式を数値積分することによって求めたものである。付録 3 に従って求めた(22)式の係数は表 5 に示す。図 11 の実線と破線を比較すると、一次近似による誤差を多少含んでいるが全体的には良く一致している。このように(22)式は内部共振時におけるモード間の性質を良く表わしていることが理解できる。

さて、図 9 に示す P_{ei} は内部位相角 θ の関数であり、 $P_{ei}=P_{ei}(\theta_1, \theta_4), i=1 \sim 4$ (27) である。特に今問題としている Case 1 の場合について(27)式を線形化し(26)式を考慮して値を代入する。

$$\begin{pmatrix} \Delta P_{e1} \\ \Delta P_{e2} \\ \Delta P_{e3} \\ \Delta P_{e4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.40 & -0.96 & 0.32 & * \\ 0.63 & -0.32 & 0.16 & * \\ -0.10 & 0.70 & 1.39 & * \\ -0.13 & 0.59 & -1.87 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_{zero} \end{pmatrix}$$

..... (28)

(28)式を用いて Δp_{ei} が各モードから、どの程度の依存を受けているかを知ることができる。(28)式において、 x_{zero} に相当する要素は本議論では対象外となるので*印で示してある。(28)式を用いて図 9 の Case 1 をみると Δp_{e1} に関しては x_2 の影響が -0.96 と大で、 x_1, x_3 の影響はそれぞれ $-0.40, 0.32$ と同程度に小さいので、内部共振によってモード 1 とモード 3 の間でエネルギー授受が行なわれても Δp_{e1} にはあまり影響しないことが理解できる。また、 Δp_{e2} に関しては x_1 の影響が大で、そのため内部共振による x_1 の振幅増大に伴って Δp_{e2} の振幅も増大している。 $\Delta p_{e3}, \Delta p_{e4}$ に関しては x_3 の影響が大で、そのため振幅は減少している。上記に示すように、内部共振発生時においては、モード間エネルギー授受により、その影響が系統内の特定部分に現われることが予想される。従って、例えば系統故障の影響が内部共振によって、系統の遠方に伝わったり、また特定発電機が励振を受けるなど、様々な状況が予想される。また文献(1), (2)に示すような負荷変動などにより定常的に特定モードが励振を受ける場合なども考えられ、これに内部共振が重なった場合、特定モードにエネルギーが蓄積されるようなことも考えられる。

6. ま と め

(1) 一機無限大系統において、発電機は固有周波数以外に、その 2 倍および 1/2 倍で共振する可能性があり、本現象は制御系を考慮した 2 反作用理論による詳細モデルでシミュレーションを行なった結果、確認された。

(2) 背後電圧一定の簡略モデルは制動係数 D を適切に選ぶことによって、周期外乱に対し詳細モデルと同様の振舞いをすることが確認された。

(3) 多機系統の複数の主要固有周波数間に特定の関係がある場合、系統故障などの通常外乱に対し内部共振が発生する可能性がある。共振の発生条件は三つの主要固有周波数 $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ が次の関係を満たすときである。

$$\omega_i \approx \omega_j \pm \omega_k$$

(4) 上記関係中、特に $2\omega_p \approx \omega_q$ について共振状態を表わす一次近似式を導出するとともに、4 機放射状系統でシミュレーションを行ない、共振の存在を指摘した。この内部共振は系統の主要モード間でのエネルギー授受であり、本共振によって系統内の部分的な故障が系統遠方に波及することも考えられる。

(5) 本論文で指摘した現象は、系統方程式の非線

形性に起因して起る現象であり、従って変圧器飽和や制御系飽和などの多くの非線形性が混在する場合、このような現象は強められる場合や多頻度になる場合も考えられ、今後更に研究が必要である。

(昭和59年9月13日受付)

文 献

- (1) 餘利野・森・田村:「電力系統安定度とパラメータ共振の關係について」電学論B 105, p. 15 (昭60-1)
- (2) Y. Tamura, N. Yorino, H. Mori & S. Iwamoto: "On the Possibility of Parametric Resonance in Power Systems-A New Concept of Power System Stability" *Proc. PSCC VIII* p. 939 (1984)
- (3) R. A. Struble & J. H. Heinbockel: "Resonant Oscillations of a Beam-Pendulum System" *J. Appl. Mechanics* 30 p. 181 (1963)
- (4) A. H. Nayfeh: "A Perturbation Method for Treating Nonlinear Oscillation Problems" *Journal of Mathematics & Physics* 44, 368 (1965)
- (5) IEEE Committee Report: "Computer Representation of Excitation Systems" *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-87, 1460 (1968)
- (6) A. D. S. Barr & D. C. McWhannell: "Parametric Instability in Structures under Support Motion" *J. Sound and Vibration* 14, 491 (1971)
- (7) A. H. Nayfeh: "Two-to-One Resonances near the Equilateral Libration Points" *AIAA Journal* 9, 23 (1971)
- (8) IEEE Committee Report: "Dynamic Models for Steam and Hydro Turbines" *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-92, p. 1904 (1973)
- (9) P. M. Anderson & A. A. Fouad: "Power System Control and Stability" (1977) The Iowa State Univ. Press

付 録

1. (12)~(16)式の導出 一次近似解を求めるために(11)式の2次の展開項までを考慮する。すなわち

$$\Delta\ddot{\theta} + d\Delta\dot{\theta} + A\Delta\theta = f^{(2)}(\Delta\theta) \quad \dots\dots(付1)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \left[\frac{\partial P_a}{\partial \theta} \right]_{\theta=\theta_0} = [A_{ij}] \\ d &= \text{diag}[\omega_R d_1/2H_1, \dots, \omega_R d_n/2H_n] \\ f^{(2)} &= [f_1^{(2)}, \dots, f_n^{(2)}]^T \\ f_i^{(2)}(\Delta\theta) &= \Delta\theta^T H^{(i)} \Delta\theta \\ H^{(i)} &= \frac{\omega_R}{4H_i} \left[\frac{\partial^2 P_{ai}}{\partial \theta^2} \right]_{\theta=\theta_0} = [H_{im}^{(i)}] \\ \Delta\theta &= [\Delta\theta_1, \dots, \Delta\theta_n]^T \\ P_a &= [P_{a1}, \dots, P_{an}]^T \end{aligned} \right\} \quad (付2)$$

(付1)式を線形変換すると(12)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} + \Lambda x &= -\mu \dot{x} + g^{(2)}(x) \quad \dots\dots(付3) \quad (12) \\ x &= W^T \Delta\theta = [x_1, \dots, x_n]^T \\ \Lambda &= W^T A V = \text{diag}[\omega_1^2, \dots, \omega_n^2] \\ \mu &= W^T D V = [\mu_{ij}], \quad W^T = V^{-1} \\ \omega &: \text{系統固有周波数} \\ g^{(2)} &= [g_1^{(2)}, \dots, g_n^{(2)}]^T = W^T f^{(2)}(Vx) \\ g_k^{(2)} &= x^T M^{(k)} x, \quad M^{(k)} = [M_{ij}^{(k)}] \end{aligned} \right\} \quad (付4)$$

$$\begin{aligned} &= V^T \left\{ \sum_{i=1}^n (W^T)_{ki} H^{(i)} \right\} V \\ &= [M^{(k)}]^T \end{aligned}$$

$(W^T)_{ki}$ は W^T の (k, i) 要素

V : A の固有ベクトルより成る行列

(付2)式において $\mu_{ij} \ll 1$ を仮定し

$$\mu_{ij} = \varepsilon \hat{\mu}_{ij} \quad \dots\dots\dots(付5)$$

として ε オーダの量で表わす。(付5), (14)式を(付3)式に代入し ε のべき乗を等置すると次式を得る。

$$\varepsilon: D_0^2 u_{k1} + \omega_k^2 u_{k1} = 0 \quad \dots\dots\dots(付6)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^2: D_0^2 u_{k2} + \omega_k^2 u_{k2} &= -2D_0 D_1 u_{k1} \\ &- \sum_{i=1}^n \hat{\mu}_{ki} D_0 u_{i1} + \sum_{i,j=1}^n u_{i1} M_{ij}^{(k)} u_{j1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(付7)$$

ここで、(付6)式の解は(14)式で表わすことができるので、(15)式(付7)式に代入すると本文(16)式を得る。

2. (21)~(23)式の導出

(19), (20)式を考慮して(16)式で $k=1 \sim n$ のそれぞれの方程式右辺において固有周波数成分を含む項を抜き出し、零と置くと次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} k=p: & -j\omega_p (2A_p' + \hat{\mu}_{pp} A_p) \\ & + A_q \bar{A}_p (M_{qp}^{(p)} + M_{pq}^{(p)} \exp(j\hat{\sigma} T_1)) \\ & = 0 \\ k=q: & -j\omega_q (2A_q' + \hat{\mu}_{qq} A_q) \\ & + A_p^2 M_{pp}^{(q)} \exp(-j\hat{\sigma} T_1) = 0 \end{aligned} \right\}$$

但し、 $\sigma_\varepsilon \ll 1$ から $\hat{\sigma} \triangleq \sigma_\varepsilon / \varepsilon$

$$\dots\dots\dots(付8)$$

$$k \neq p, q: 2A_k' + \hat{\mu}_{kk} A_k = 0 \quad \dots\dots\dots(付9)$$

(付8), (付9)式に対し、更に

$$2\varepsilon A_k(T_1) = C_k(T_1) \exp(j\varphi_k(T_1)) \dots\dots(付10)$$

と置いて(付8), (付9)式に代入し、実部と虚部に分けて実数領域で式を表現し、更に全微分・と T_1 に関する偏微分'の間には

$$\dot{a}_k = \varepsilon a_k', \quad \dot{\varphi}_k = \varepsilon \varphi_k', \quad k=1 \sim n \quad \dots\dots(付14)$$

の關係があるのでこれを考慮すると、本文(22)式を得る。また、 $k \neq p, q$ の場合は(付9)式より同様の操作によって本文(23)式を得る。一方、(付10)式を本文(15)式に代入すると本文(21)式を得る。

3. (22)式の定数計算式(初期値の計算)

$$x_{k0} = C_{k0} \cos \varphi_{k0}, \quad \dot{x}_{k0} = -\omega_k C_{k0} \sin \varphi_{k0} \quad (付12)$$

$$\left. \begin{aligned} \therefore C_{k0} &= \frac{1}{\omega_k} \sqrt{\{\omega_k x_{k0}\}^2 + \{\dot{x}_{k0}\}^2} \\ \varphi_{k0} &= -\frac{1}{\omega_k} \frac{\dot{x}_{k0}}{x_{k0}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(付13)$$

上記以外の定数は(付2), (付4)式を参照。