UDC 621.311.1.016: 517.26: 517.5

論文
60-B62

テイラー展開とエネルギー関数による 高速過渡安定度判定法

准 員 古 谷 聡 (早稲田大)
正 員 岩 本 伸 一 (早稲田大)

1. ま え が き

現在まで、電力系統の過渡安定度判定計算法のアプローチとして、いくつかの方法が提案されてきた。負荷を定インピーダンス表現で取り扱うものに限り、次のように分類される。

(1) シミュレーション法: Runge-Kutta 法などの数値積分によって動揺方程式から、様々な故障除去時間を採用したケースごとに動揺曲線を求め、安定判別を行なう。

(2) パターン認識による方法: 予め数多くのシミュレーションによりサンプルを求めておく。それらを、何らかの方法で選択した安定度に影響の大きい幾つかの指標で構成された空間に分布させる。安定なサンプルと不安定なサンプルを分離する面を表す代数式を構成し、これを用いて安定判別を行なう⁽²⁾。

(3) リアプノフ関数法: 動揺方程式に対するリアプノフ関数 (エネルギー関数) を構成し、事故継続下の動揺曲線を何らかの方法で解きながら、関数値が安定条件を満たし得る限界を求める⁽¹⁾。

本研究では、オンライン監視に適用可能な程度に高速な過渡安定度判定法の開発を目標とする。この視点から各手法を比較すると、判定精度では最も信頼できる手法(1)は、数値積分を大量に必要とするため、計算速度の面では不利である。また、手法(2)では、判定に必要な時間は最も短いと考えられるが、その準備段階でやはり膨大な計算量が必要である。手法(3)では判定指標の決定法如何で判定精度が変わってしまう点や事故中の動揺軌跡を Runge-Kutta 法などで求め

た場合、オンライン監視に使用するには高速化が十分でない点や問題となる。これらの問題については、いくつかの研究がなされている⁽³⁾⁽⁴⁾。

本稿では、垣本・大沢・林氏による理論⁽⁴⁾や事故軌跡の時間関数近似⁽³⁾⁽⁵⁾を用いつつ、高速な判定計算法を提案する。

2. 提案法について

〈2・1〉 問題の定式化 制動項を無視した系統の動揺方程式は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\delta}_i &= \omega_i \\ \dot{\omega}_i &= \frac{1}{M_i} (P_{mi} - P_{ei}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但し、

$$P_{ei} = \sum_{j=1}^n (G_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij} + B_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij}) \dots\dots\dots (2)$$

δ_i : 発電機内部位相角

ω_i : $\dot{\delta}_i$

M_i : 慣性定数

E_i : リアクタンス背後電圧

G_{ij} : 縮小ノードアドミタンス行列実部

B_{ij} : 縮小ノードアドミタンス行列虚部

P_{mi} : 機械入力

P_{ei} : 電気出力

$\delta_{ij} = \delta_i - \delta_j$

また、以下の理論においては、特に必要がある場合、「事故中」を表すのに右肩添字 f を、「事故除去後」を表すのに右肩添字 p を、事故除去後の安定平衡点を表わすのに右肩添字 s を用いる。

〈2・2〉 エネルギー関数の構成 (1) 式の両辺に $M_i \omega_i$ をかけて、時間 t で積分し、 $i=1, \sim, n$ までを足し合わせる。

Fast Transient Stability Solution using Taylor Expansion and Energy Function. By Satoshi Furuya, Associate, Shinichi Iwamoto, Member (Department of Engineering, Waseda University)

古谷 聡: 准員, 早稲田大学電気工学科 (現在, 東京電力(株)勤務) 岩本伸一: 正員, 早稲田大学電気工学科

$$\begin{aligned}\sum_i \int M_i \dot{\omega}_i \omega_i dt &= \sum_i \int (P_{mi} - P_{ei}) \omega_i dt \\ \sum_i \int M_i \omega_i d\omega_i &= \sum_i \int (P_{mi} - P_{ei}) d\delta_i \\ I &= II \dots \dots \dots (3)\end{aligned}$$

本稿では高速判定手法開発の第一段階として、伝達コンダクタンス $G_{ij}(i \neq j)$ を無視した系統を取り扱う。(伝達コンダクタンスの問題は4で述べる)従って

$$\begin{aligned}II &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_i^s}^{\delta_i} (P_{mi} - G_{ii} E_i^2 \\ &\quad - \sum_{j=1}^n B_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij}) d\delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [B_{ij} E_i E_j (\cos \delta_{ij} - \cos \delta_{ij}^s) \\ &\quad + (P_{mi} - G_{ii} E_i^2)(\delta_i - \delta_i^s)] \dots \dots (4)\end{aligned}$$

となり、エネルギー関数は、

$$\begin{aligned}V &= I - II \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (P_{mi} - G_{ii} E_i^2)(\delta_i^s - \delta_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n B_{ij} E_i E_j (\cos \delta_{ij}^s - \cos \delta_{ij}) \\ &= V_K + V_P \dots \dots \dots (5)\end{aligned}$$

〈2.3〉テイラー級数による近似 エネルギー関数法を用いることによりシミュレーション法においては多くのケースについて必要だった数値積分を、事故を継続させる1回分のみにおさえることができる。しかし、更に高速な計算を実現するため、事故中の動揺方程式を初期値でテイラー展開することが考えられ

る⁽⁶⁾。従って、任意の時間 t における δ_i の値は、

$$\begin{aligned}\delta_i(t) &= \delta_i^{(0)} + \frac{1}{1!} \delta_i^{(1)} t + \frac{1}{2!} \delta_i^{(2)} t^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \delta_i^{(3)} t^3 + \dots \dots \dots (6)\end{aligned}$$

但し

$$\delta_i^{(m)} = \left. \frac{d^m \delta_i}{dt^m} \right|_{t=0}$$

と表される。以下、 $\omega_i(t=0)=0$ に注意しながら各係数を計算すると、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}\delta_i^{(1)} &= 0 \\ \delta_i^{(2)} &= P_{mi} - \sum C_{ij} \\ \delta_i^{(3)} &= 0 \\ \delta_i^{(4)} &= \sum \delta_{ij}^{(2)} D_{ij} \\ \delta_i^{(5)} &= 0 \\ \delta_i^{(6)} &= \sum (\delta_{ij}^{(4)} D_{ij} + 3 \delta_{ij}^{(2)^2} C_{ij}) \\ \delta_i^{(7)} &= 0\end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

但し、

$$\begin{aligned}C_{ij} &= E_i E_j (G_{ij}^f \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij}^f \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ D_{ij} &= E_i E_j (G_{ij}^f \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij}^f \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\dots \dots \dots (8)\end{aligned}$$

$$\delta_{ij}^{(m)} = \delta_i^{(m)} - \delta_j^{(m)}$$

これらの式の詳細な導出は附録1に示す。

結果的に、奇数次の項の微係数は全て零となり、所定の近似次数の精度を得るために必要な係数の数は半分で済む。この近似式は、ある程度の時間範囲の事故中の動揺軌跡に対して、図1のごとく良い結果を与える⁽⁶⁾(文献(1)の系統での例)。更に、(6)式を微分して、非零の係数を持つ項のみを用いると、 ω_i は次の

図1 テイラー展開による近似

Fig. 1. Approximation by Taylor expansion.

図2 垣本・大沢・林法

Fig. 2. Kakimoto-Ohsawa-Hayashi method.

ようになる。

$$\omega_i = \delta_i^{(2)} t + \frac{\delta_i^{(4)}}{3!} t^3 + \frac{\delta_i^{(6)}}{5!} t^5 + \dots \quad (9)$$

今回は、伝達コンダクタンス $G_{ij} (i \neq j)$ を無視した系を取り扱っているが、この場合には、地絡母線に関する縮小 Y 行列要素のうち、対角要素の虚部以外が零となるので、この母線に接続された発電機の近似式は、高次項が零となり二次項までで完全に記述される。

〈2.4〉判定法について 本手法での安定判別は、垣本・大沢・林法の理論に依る。(5)式の位置エネルギー V_p の極大値を事故軌跡に沿って求め、この値を臨界エネルギー V_{cr} とする。そしてエネルギー関数値 V が、 V_{cr} の値をとる点を見つけ、この時点を通る臨界故障除去時間 t_{cr} とする。本手法では、 δ 、 ω などの変数は全て時間の関数として記述されているので、上述の手順はふたつの一変数代数方程式をそれぞれ順に解くことによって達成される。即ち、

$$\frac{dV_p(t)}{dt} = 0 \quad (10)$$

$$V(t) = V_{cr} \quad (11)$$

前述のとおり、(11)式の V_{cr} は(10)式の解に於ける V_p の値である。伝達コンダクタンスを無視した系では、 V は解析的な形が求まっているので、(10)、(11)式ともに、適当な初期値を与えれば Newton 法で解くことができる。Newton 法を適用するために必要な dV_p/dt 、 dV_p/dt および d^2V_p/dt^2 は次式によって与えられる。これらの導出は付録2に示す。

$$\begin{aligned} \frac{dV_p}{dt} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (B_{ij}^p E_i E_j \sin \delta_{ij} \\ &+ G_{ii}^p E_i^2 - P_{mi}) \omega_i \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_k}{dt} &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (B_{ij}^f E_i E_j \sin \delta_{ij} \\ &+ G_{ii}^f E_i^2 - P_{mi}) \omega_i \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2V_p}{dt^2} &= - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n B_{ij}^p E_i E_j \sin \delta_{ij} + G_{ii}^p E_i^2 - P_{mi} \right)^2 \\ &\times \frac{1}{M_i} \\ &+ \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\sum_{j=1}^n \omega_{ij} B_{ij}^p E_i E_j \sin \delta_{ij} \right) \dots \dots (14) \end{aligned}$$

但し、

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j$$

特に、(13)式は、(12)式と逆符号で同形の式に見えるが、ここでの ω_i は事故中の軌跡に沿っての変化に着目する必要がある、事故中のノードアドミタンス値を使用していることに注意する必要がある。(付(11)式参照) 位置エネルギー V_p は、事故を除去した瞬間の δ 、 ω を事故除去後のシステムに与えて計算されるが(即ち、アドミタンスは事故除去後の値を用いる)、運動エネルギー V_k では事故除去瞬間の加速力を考慮して微係数を計算しなければならない(即ち、事故中のアドミタンスを用いる)。事故の進展に沿った各エネルギーの変化(図3)からもその必要性が解る。(5)式第1項で与えられる V_k は、事故の継続中単調に増加する関数であり、その導関数である(13)式は、(12)式の単なる逆符号とはならない。以上の点は、提案法に於て Newton 法を使用する際、 dV_k/dt の導出で用いる加速電力の計算式には事故中の Y 行列を用いる必要がある(近似的には(9)式の微分でも与えられる)ことを示している。

以上をまとめると、 t_{cr} を求める手順は図4のようになる。(10)式への Newton 法の適用は、先に述べたとおり、何らかの方法で適切な初期値を与えねばならない。今回の例題では、経験的に知った t^* に近い値(10%程度離れた値)を用いた。本手法はオンライン監視を目的としているので、実際の場合でも、そ

図3 エネルギーの変化
Fig. 3. Change of energy.

図 4 計算手順

Fig. 4. Algorithm.

の系統によって予めある程度の見積りが可能と思われる。(11)式への適用については t^* を初期値として与えれば問題ない。

3. 例 題

例題として、El-Abiad-Nagappan の 4 機系⁽¹⁾ (図 5)、New-England 10 機系 (図 6) および、IEEE 118 母線 20 機系⁽⁷⁾を用いた。

図 5 El-Abiad & Nagappan 4 機系

Fig. 5. El-Abiad & Nagappan 4 machine system.

図 6 New England 10 機系

Fig. 6. New England 10 machine system.

図 7 計算時間の比較

Fig. 7. Comparison of execution time.

提案法の近似次数は 6 次とし、比較対象として 0.01 秒刻みの Runge-Kutta 4 次法を用いた恒本・大沢・林法⁽⁴⁾を使用した (以下、対照法と呼ぶ)。

計算は全て倍精度、計算機種は HITAC M 280-H である。

事故は、事故発生母線につながる、ある二回線送電線路のうち一回線を遮断することによって除去されるものとし、表 1 のようなケースについて計算を行なった。(表 1 中で、一回線遮断線路の数字のうち、左側が地絡母線を表す)。

代表的な判定精度の比較を表 2 に示す。

計算時間のメリットは、 t_{cr} や t^* に影響される。提案法では、エネルギー関数の算出が最も複雑な計算であり、対照法に於てはこれに加えて Runge-Kutta 法による数値積分の占める比率が大きい。対照法は t^* までの各ステップでこれらの計算を繰り返す。一方、提案法にはそのような制約が無いいため、 t^* が長ければ、提案法の時間的メリットは、より大きくなる。

そこで、そのメリットの見通しをつけ易くするため、以下のように、標準的なシミュレーション時間を算出

表 1 事故設定

Table 1. Fault specifications.

系 統	1 回線遮断線路
El-Abiad & Nagappan	3—4 4—3
New England	33—19 37—25 32—10
IEEE 118 bus	25—27 80—96

表 2 t_{cr} の比較Table 2. Comparison of t_{cr} .

系 統	t_{cr} (sec)		
	対 照 法	提 案 法	シミュレーション法
El-Abiad & Nagappan	0.37	0.3787	0.39
New England	0.32	0.3270	0.32

表 3 計算時間の比較

Table 3. Comparison of execution time.

機数 (機)	対 照 法 (sec)	提 案 法 (sec)
4	0.024756	0.002813
10	0.091889	0.009554
20	0.299735	0.031292

した。

対照法については、 $t^*=0.3s$ (30 step)としたときの計算時間を、提案法については、 t^* を求める Newton 法の反復を 4 回、 t_{cr} を求める Newton 法の反復を 3 回としたときの計算時間を用いた。その結果を表 3 および図 7 に比較する。

4. ま と め

以上より、得られた結論は次の通りである。

(1) テイラー展開による事故軌跡の近似とエネルギー関数の概念を用いることによって、数値積分を排した高速過渡安定度計算法を提案した。

(2) シミュレーションの結果、より大きな系統で提案法のメリットは大きく、比率にして対照法の約 10 倍、判定精度は対照法とほぼ同等であることが解った。

また、提案法に必要な計算時間の中では、エネルギー関数値の計算が大きなものである点には改良の余地があると思われる⁽⁸⁾。

今後、伝達コンダクタンスを含んだ場合などについて研究を進める予定である。伝達コンダクタンスを考慮する場合には、 V_p は次の形となる。

$$\begin{aligned}
 V_p &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i^s}}^{\delta_i} (P_{ei} - P_{mi}) d\delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \int_{\delta_{i^s}}^{\delta_i} \left(-P_{mi} + \sum_{j=1}^n B_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^n G_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij} \right) d\delta_i \\
 &= \sum_{i=1}^n (P_{mi} - G_{ii} E_i^2) (\delta_i^s - \delta_i)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n B_{ij} E_i E_j (\cos \delta_{ij}^s - \cos \delta_{ij}) \\
 &+ \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \int_{\delta_{ij}^s}^{\delta_i + \delta_j} G_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij} \\
 &\quad d(\delta_i + \delta_j) \dots \dots \dots (15)
 \end{aligned}$$

二段目右辺第二項は積分可能だが、第三項は上に示す通り解析積分が求まらない。今回の提案法では δ を t の関数として表すことで V_p を t の代数方程式として簡単に解くものだが、第三項は積分記号を取って t の代数方程式として、この解法を適用することができないことが問題となる⁽¹¹⁾。

最後に、本研究に協力いただいた中野公明 (現、大学院生) 福沢雅彦 (現、山武ハネウェル勤務) 両君に深謝致します。また、本研究の一部に、河上記念財団助成金を使用したことを付記致します。

(昭和 59 年 9 月 28 日)

文 献

- (1) A. El-Abiad & K. Nagappan: "Transient Stability Regions of Multi-machine Power System" *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-85, No. 2, 169 (1966-2)
- (2) 齊藤・小泉・有働・佐藤: 「パターン認識法による高速過渡安定度判定法」電学論 B 505 (昭 51-10)
- (3) T. Athay, R. Podmore & S. Virmani: "A Practical Method for the Direct Analysis of Transient Stability" *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-98, No. 2 573 (1979, 3, 4)
- (4) N. Kakimoto, Y. Ohsawa & M. Hayashi: "Transient Stability Analysis of Electric Power System via Lur'e Type Lyapunov Function", *Trans. IEE of Japan* 98, 63 (1978, 5, 6)
- (5) M. Ribbens-Pavella, B. Lema & W. Pirard: "On-line Operation of Liapunov Criterion for Transient Stability Studies", *IFAC Symposium* (1977)
- (6) 岩本・古谷・福沢・田村: 「エネルギー関数とテイラー展開を用いた高速過渡安定度計算法」昭 59 電気学会全大
- (7) North American Rockwell Information System Company, On-line Stability Analysis Study, RP 90-1 (1970-10)
- (8) 垣本・山崎・大野木・松田: 「近似式導入による電力系統過渡安定度解析用リアプノフ法の高速化」電気学会研究会資料 PE-84-28, 11 (昭 59-7)
- (9) 岩本・古谷・田村: 「リアプノフ型の高速過渡安定度計算法」昭 58 電気学会全大 No. 881
- (10) 岩本・古谷・森・田村: 「リアプノフ型の高速過渡安定度計算法」電気学会研究会資料 PE-83-8, 73 (昭 58-7)
- (11) M. A. Pai: *Power System Stability* (1981)

附 録

1. 本文(1), (2), (8)式などを用いて、近似式の各係数を算出する。

但し,

$$\delta_i^{(m)} = \frac{d^m \delta_i}{dt^m} \Big|_{t=0} \dots \dots \dots (\text{付 1})$$

$$\omega_{ij} = \omega_i - \omega_j \dots \dots \dots (\text{付 2})$$

また、右肩添字 0 は $t=0$ における値を表す。

$$\delta_i^{(1)} = \omega_i^0 = 0$$

$$\begin{aligned}\delta_i^{(2)} = \dot{\omega}_i^0 &= \{P_{mi} - \sum_{j=1}^n E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0)\} / M_i \\ &= P_{mi} / M_i - \sum C_{ij} \dots\dots\dots (\text{付 3})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i^{(3)} &= \left. \frac{d\delta_i^{(2)}}{dt} \right|_{t=0} = \sum \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &= 0 \dots\dots\dots (\text{付 4})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i^{(4)} &= \left. \frac{d\delta_i^{(3)}}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum \dot{\omega}_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum \omega_{ij}^{0^2} E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i^2 \\ &= \sum \delta_{ij}^{(2)} E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &= \sum \delta_{ij}^{(2)} D_{ij} \dots\dots\dots (\text{付 5})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i^{(5)} &= \left. \frac{d\delta_i^{(4)}}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum \omega_{ij}^{0^3} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &= 0 \dots\dots\dots (\text{付 6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i^{(6)} &= \left. \frac{d\delta_i^{(5)}}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \sum (\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{0^2} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^2 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^2 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{0^2} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 3(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{0^2} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum \omega_{ij}^{0^4} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &= \sum (\delta_{ij}^{(4)} D_{ij} + 3 \delta_{ij}^{(2)^2} C_{ij}) \dots\dots\dots (\text{付 7})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_i^{(7)} &= \sum (\delta_i^{(5)} - \delta_j^{(5)}) E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum (\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{0^2} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 6(\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{0^2} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 6(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{0^3} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 12(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^2 \omega_{ij}^0 E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 6(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 3(\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^2 \omega_{ij}^0 E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\ &\quad + \sum 2(\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) \omega_{ij}^0 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum 2 (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{02} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
& + \sum 2 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
& + \sum \omega_{ij}^{03} E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
& + \sum 4 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{03} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
& = 0 \dots\dots\dots (\text{付 } 8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_i^{(8)} &= \frac{d\delta_i^{(7)}}{dt} \Big|_{t=0} \\
&= \sum (\delta_i^{(6)} - \delta_j^{(6)}) E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum (\delta_i^{(5)} - \delta_j^{(5)}) \omega_{ij}^{01} E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 5 (\delta_i^{(5)} - \delta_j^{(5)}) \omega_{ij}^{01} E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 5 (\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) \omega_{ij}^{02} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 5 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) \omega_{ij}^{02} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{03} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 20 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{01} E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{03} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{04} E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 30 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^2 \omega_{ij}^{02} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 30 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) \omega_{ij}^{01} E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 15 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^2 \omega_{ij}^{03} E_i E_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 - B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 15 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)})^3 E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)})^2 E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(4)} - \delta_j^{(4)}) E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 10 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) (\delta_i^{(3)} - \delta_j^{(3)}) E_i E_j (-G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 + B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum \omega_{ij}^{06} E_i E_j (G_{ij} \cos \delta_{ij}^0 + B_{ij} \sin \delta_{ij}^0) / M_i \\
&+ \sum 5 (\delta_i^{(2)} - \delta_j^{(2)}) \omega_{ij}^{04} E_i E_j (G_{ij} \sin \delta_{ij}^0 - B_{ij} \cos \delta_{ij}^0) / M_i \\
&= \sum \delta_{ij}^{(6)} D_{ij} + 15 \sum \delta_{ij}^{(2)} \delta_{ij}^{(4)} C_{ij} - 15 \sum \delta_{ij}^{(2)3} D_{ij} \dots\dots\dots (\text{付 } 9)
\end{aligned}$$

以下、同様に計算される。

2. (3)式より、エネルギー関数の各微係数を計算する。

$$\begin{aligned}
\frac{dV_p}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \int (P_{ei}^p - P_{mi}) d\delta_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \int (P_{ei}^p - P_{mi}) \frac{d\delta_i}{dt} dt \\
&= \sum_{i=1}^n (P_{ei}^p - P_{mi}) \omega_i \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (G_{ij}^p E_i E_j \cos \delta_{ij} + B_{ij}^p E_i E_j \sin \delta_{ij}) - P_{mi} \right) \omega_i \dots\dots\dots (\text{付 } 10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} M_i \omega_i^2 \\
&= \sum_{i=1}^n M_i \omega_i \dot{\omega}_i \\
&= \sum_{i=1}^n M_i \omega_i \frac{P_{mi} - P_{ei}^f}{M_i} \\
&= - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (G_{ij}^f E_i E_j \cos \delta_{ij} + B_{ij}^f E_i E_j \sin \delta_{ij}) - P_{mi} \right) \omega_i \dots\dots\dots (\text{付 } 11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 V_p}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dV_p}{dt} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left(\frac{dV_p}{dt} \right) \frac{d\delta_i}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\frac{dV_p}{dt} \right) \frac{d\omega_i}{dt} \\ &= \quad I \quad + \quad II \quad \dots\dots\dots (付12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \delta_i} \left\{ \sum_{k=1}^n \omega_k \left(\sum_{j=1}^n G_{kj} E_k E_j \cos \delta_{kj} + B_{kj} E_k E_j \sin \delta_{kj} - P_{mk} \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_i (-G_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} + B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_j (G_{ji} E_i E_j \sin \delta_{ji} - B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ji}) \right\} \omega_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \{ (-G_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} + B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij}) \omega_i^2 + (G_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} - B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij}) \omega_i \omega_j \} \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-\omega_i G_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} + \omega_i B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij} + \omega_j G_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} - \omega_j B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij}) \\ &= - \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_{ij} (G_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} - B_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij}) \quad \dots\dots\dots (付13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}II &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n G_{kj} E_k E_j \cos \delta_{kj} + B_{kj} E_k E_j \sin \delta_{kj} - P_{mk} \right) \omega_k \right\} \dot{\omega}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (G_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij} + B_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} - P_{mi}) \dot{\omega}_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{(G_{ij} E_i E_j \cos \delta_{ij} + B_{ij} E_i E_j \sin \delta_{ij} - P_{mi})^2}{M_i} \quad \dots\dots\dots (付14)\end{aligned}$$

以上から伝達コンダクタンスを無視すると、(12)～(14)式を得る。