UDC 621.313.333.025.3: 621.3.016

論文

60-B89

一般周期的波形の電流で駆動される 二相誘導電動機の瞬時トルク

正員 古賀 国夫 (安川電機)

1. ま え が き

サイリスタインバータなどの半導体電力変換器で誘導電動機（以下、誘導機と略す）を速度制御する方式は、広く使用されている。しかし、これらの半導体電力変換器はひずみ波電源であるので、誘導機電流はひずみ波となる。その結果、誘導機はトルク脈動を発生し駆動系に悪影響を与える場合がある⁽¹⁾。そのため瞬時トルクの把握が重視されている。

筆者は、同期ワットの概念を拡張して得られた瞬時同期ワットの理論が瞬時トルクの解析理論として他の解析法に比べて有効であることを示した⁽²⁾。すなわち瞬時同期ワットの理論は、瞬時トルクの解析および物理的意味の把握が容易であること、ならびに瞬時トルクのマクロな把握が容易であることを示した⁽²⁾。

しかし、瞬時同期ワットの理論は平衡運転状態の三相誘導機に適用できるが、一般周期的波形の電流で駆動される誘導機には適用できない。そこで、筆者は瞬時同期ワットの概念を更に拡張した。その結果、瞬時同期ワットの理論は、前述した理論の特長を持ち、かつ一般周期的波形の電流で駆動される単相誘導機、二相誘導機および三相誘導機に適用できるようになった。

本論文では、まず、二相誘導機に対する瞬時同期ワットの理論を導出する。続いて理論の証明を行なう。次に、単相誘導機に対する瞬時同期ワットの理論の導出と解析例を示す。最後に、三相誘導機に対する瞬時同期ワットの理論を示す。

2. 二相誘導機の瞬時トルク

〈2.1〉 瞬時同期ワットの概念⁽³⁾ 解析に先立ち本論文の対象とする誘導機に対して次の仮定をおく。

(i) 誘導機は、対称巻線を持った対称誘導機とし、鉄損、鉄心の飽和および空間高調波は、無視する。

(ii) 直流分および零相分は含まない。

(iii) 定常状態とし、回転子の速度は一定とする。

一般周期的波形に対する瞬時同期ワットの概念を導出する場合、前論文⁽²⁾のように三相誘導機を対象として空間瞬時ベクトルを用いて解析する方法が考えられる。しかし、この方法では、後述の二相誘導機に比べて式と物理現象との対応が悪い。すなわち、空間瞬時ベクトルの実数部は直接 r 相と対応するが、虚数部は直接 s , t 相と対応しない。従って、式の物理的意味の把握が複雑になる。

本論文では、まず、二相誘導機で解析し、解析結果を単相誘導機および三相誘導機に展開する⁽⁴⁾。また、解析は、瞬時値対称座標法を理論的基礎として進める。最初に二相誘導機の電圧方程式と発生トルク T について述べる。図1に示す二相誘導機の瞬時値対称座標法から得られた正相分に対する電圧方程式は既知である⁽⁴⁾。この電圧方程式において、複素数表示された電圧、電流の $\sqrt{2}$ 倍を、ここでは空間瞬時ベクトルと呼ぶことにする。空間瞬時ベクトルには矢印をつけた記号を使用する。 α および β 相の電圧や電流の瞬時値 F_α および F_β は、次式により空間瞬時ベクトル $\vec{F}$ に変換される。但し、添字 α , β は α 相および β 相を示す。

図1 二相誘導機

Fig. 1. Two-phase induction motor.

Instantaneous Torque of Two-Phase Induction Motor Operating on General Periodic Current. By Kunio Koga, Member (Yasakawa Electric Manufacturing Co., Ltd.).
古賀国夫：正員、(株)安川電機製作所行橋工場

$$\vec{F} = F_\alpha + jF_\beta \dots\dots\dots (1)$$

二相誘導機の電圧方程式および T は、空間瞬時ベクトルを用いると(2), (3)式で示される⁽⁵⁾。

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + L_1 P & MP \\ M(P - j\omega_r) & R_2 + L_2(P - j\omega_r) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{i}_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

$$T = q M I_m [\vec{i}_1^* \vec{i}_2^*] \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 L_1, L_2 ：一次および二次の自己インダクタンス、 R_1, R_2 ：一次および二次抵抗、 M ：一次二次間相互インダクタンス、添字のない P ：微分演算子 (d/dt)、 ω_r ：回転子の電氣的角速度、 $\vec{v}_1$ ：一次電圧ベクトル、 $\vec{i}_1, \vec{i}_2$ ：一次および二次電流ベクトル、 q ：極対数、 I_m ：虚数部の記号、 $*$ ：共役の記号である。

次に瞬時同期ワットの概念を導出する。励磁電流ベクトル $\vec{i}_m$ は(4)式で示され、 $\vec{i}_m$ を用いると T は(5), (6)式で表わされる⁽²⁾。

$$\vec{i}_m = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 \dots\dots\dots (4)$$

$$T = q M I_m [\vec{i}_1^* \vec{i}_m^*] \dots\dots\dots (5)$$

$$T = q M I_m [-\vec{i}_2^* \vec{i}_m^*] \dots\dots\dots (6)$$

(4)～(6)式の $\vec{i}_m$ は、一般周期的波形の電流であるから無限級数に展開できる。更に、 $\vec{i}_m$ の第 n 次調波成分 $\vec{i}_{mn}$ は、電源の角周波数を ω とすると複素平面を角速度 $n\omega$ で反時計方向に回転する正相分 $\vec{i}_{mn}^f$ と角速度 $n\omega$ で時計方向に回転する逆相分 $\vec{i}_{mn}^b$ に分解できる(付録2参照)。従って、 $\vec{i}_m$ は次式で示される。

$$\vec{i}_m = \sum_{n=1}^{\infty} (\vec{i}_{mn}^f + \vec{i}_{mn}^b) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、肩付きの添字 f および b は正相分および逆相分を意味する。

次に瞬時同期ワットの理論では、 $\vec{i}_m$ を二次電圧 $\vec{e}$ の関数として表わす必要がある⁽²⁾、一般周期的波形の場合の $\vec{e}$ について考察する。(2)式は、 $\vec{i}_m$ を用いると次式で表わされる。

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = (R_1 + l_1 P) \vec{i}_1 + M P \vec{i}_m \\ 0 = M P \vec{i}_m + (R_2 + l_2 P) \vec{i}_2 + \vec{e}_s \end{cases} \dots\dots\dots (8)$$

$$\text{ここに、} \vec{e}_s = -j\omega_r (M \vec{i}_m + l_2 \vec{i}_2)$$

$$l_1 = L_1 - M, \quad l_2 = L_2 - M$$

(8)式から視察によって図2の等価回路が得られる。図2で二次電圧は、二次回路インピーダンスの電圧降下と速度起電力 $\vec{e}_s$ の和となり、 M の発生電圧に等しい。従って、二次電圧は $\vec{i}_m$ の時間微分に M を乗じた値となるので、第 n 次調波二次電圧の正相分 $\vec{e}_n^f$ お

図2 誘導機の等価回路〔I〕

Fig. 2. Equivalent circuit (I) of induction motor.

よび逆相分 $\vec{e}_n^b$ は次式で示される⁽²⁾。

$$\begin{cases} \vec{e}_n^f = M \frac{d\vec{i}_{mn}^f}{dt} = jn\omega M \vec{i}_{mn}^f \\ \vec{e}_n^b = M \frac{d\vec{i}_{mn}^b}{dt} = -jn\omega M \vec{i}_{mn}^b \end{cases} \dots\dots\dots (9)$$

(9)式の $\vec{i}_{mn}^f, \vec{i}_{mn}^b$ を(7)式に代入し、更に(7)式の $\vec{i}_m$ を(5), (6)式に代入すると次式が得られる⁽²⁾。

$$T = \frac{q}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_n^f - P_n^b)}{n} \dots\dots\dots (10)$$

$$T = \frac{q}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_n'^f - P_n'^b)}{n} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $P_n^f \sim P_n^b$ は次式で示される⁽²⁾。

$$\begin{cases} P_n^f = e_{n\alpha}^f i_{1\alpha} + e_{n\beta}^f i_{1\beta} \\ P_n^b = e_{n\alpha}^b i_{1\alpha} + e_{n\beta}^b i_{1\beta} \\ P_n'^f = -e_{n\alpha}^f i_{2\alpha} - e_{n\beta}^f i_{2\beta} \\ P_n'^b = -e_{n\alpha}^b i_{2\alpha} - e_{n\beta}^b i_{2\beta} \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

(10), (11)式は次式のように表わされる。

$$p \equiv \frac{\omega T}{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_n^f - P_n^b)}{n} \dots\dots\dots (13)$$

$$p \equiv \frac{\omega T}{q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P_n'^f - P_n'^b)}{n} \dots\dots\dots (14)$$

(13), (14)式の p を瞬時同期ワットと定義する。 p は瞬時トルクを表現している。従来の同期ワットは、(13), (14)式において $n=1$ のみの場合の直流分について定義されている⁽⁶⁾。従って、瞬時同期ワット概念は、従来の同期ワット概念を包含する。

〈2.2〉 解析方法 瞬時トルクの解析は、一次電流が既知なら(13)式、二次電流が既知なら(14)式を用いればよい⁽²⁾。ここでは、実用面で使用頻度の高い⁽²⁾ (13)式を用いた解析方法について述べる。解析は、以下のようにして行なうことができる。

(i) α および β 相の一次電流の瞬時値 $i_{1\alpha}$ および $i_{1\beta}$ をフーリエ級数に展開する。

(ii) $i_{1\alpha}^f, i_{1\alpha}^b$ を求める(付録2参照)。

(iii) 図3は、周知の第 n 次調波に対する等価回路である⁽⁷⁾。第 n 次調波二次電圧は、 M に発生する電

図 3 誘導機の等価回路 (II)

Fig. 3. Equivalent circuit (II) of induction motor.

圧の瞬時値として求められる⁽²⁾。図3で正相分の M と二次回路との並列合成インピーダンス $Z^f(n)$ とその偏角 $\beta^f(n)$ ならびに逆相分の M と二次回路との並列合成インピーダンス $Z^b(n)$ とその偏角 $\beta^b(n)$ は、次式で示される⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} Z^f(n) &= \left[\left(\frac{x^f M}{M + l_2} \right)^2 + \left\{ \frac{(x^f)^2 l_2}{M + l_2} + 1 \right\} \right]^{1/2} \\ &\quad \times \frac{n \omega M}{\{1 + (x^f)^2\}} \\ \beta^f(n) &= \tan^{-1} \left[\frac{M + l_2 \{1 + (x^f)^2\}}{M x^f} \right] \\ Z^b(n) &= \left[\left(\frac{x^b M}{M + l_2} \right)^2 + \left\{ \frac{(x^b)^2 l_2}{M + l_2} + 1 \right\} \right]^{1/2} \\ &\quad \times \frac{n \omega M}{\{1 + (x^b)^2\}} \\ \beta^b(n) &= \tan^{-1} \left[\frac{M + l_2 \{1 + (x^b)^2\}}{M x^b} \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここで、 $x^f = n \omega S_n^f (M + l_2) / R_2$

$$x^b = n \omega S_n^b (M + l_2) / R_2$$

$$S_n^f = \frac{n \omega - \omega_r}{n \omega} = \frac{n - 1 + S}{n}$$

$$S_n^b = \frac{n \omega + \omega_r}{n \omega} = \frac{n + 1 - S}{n}$$

S : 基本波正相分に対するすべり

i_{1n}^f, i_{1n}^b および (15) 式より $e_{n\alpha}^f$ および $e_{n\alpha}^b$ が求まる⁽²⁾。 $e_{n\beta}^f$ は、 $e_{n\alpha}^f$ の位相を $\pi/2$ 遅らせ、 $e_{n\beta}^b$ は $e_{n\alpha}^b$ の位相を $\pi/2$ 進ませた電圧として求まる (付録2参照)。従って、(12)、(13) 式より p が求まる。

〈2.3〉 解析の簡単化 瞬時トルクの解析においては、一般に p を電源の一周期にわたって求めればよい。しかし、電源の一周期内に瞬時トルクが繰り返し現われる場合の解析は、その繰り返し区間だけでよく

簡単になる。

最初に奇数調波のみの不平衡運転であり、かつ各調波について正相分と逆相分が存在する場合の p の周期性を解析する。なお、 α 相と β 相の電流波形が等しく、 β 相の電流が α 相より位相が $\pi/2$ 遅れている場合を、ここでは平衡運転と呼び、それ以外の場合を不平衡運転と呼ぶことにする。

(12) 式の P_n^f において第 n 次調波二次電圧の正相分と第 a 次調波一次電流間の瞬時電力を考える。第 a 次調波一次電流が正相分と逆相分に分解できるので、この瞬時電力は、次の W_1 と W_2 に分解できる。 W_1 は、第 n 次調波二次電圧の正相分と第 a 次調波一次電流の正相分間の瞬時電力である。 W_2 は、第 n 次調波二次電圧の正相分と第 a 次調波一次電流の逆相分間の瞬時電力である。同様に (12) 式の P_n^b についても第 n 次調波二次電圧の逆相分と第 a 次調波一次電流の正相分間の瞬時電力 W_3 と第 n 次調波二次電圧の逆相分と第 a 次調波一次電流の逆相分間の瞬時電力 W_4 に分解できる。 $W_1 \sim W_4$ は、 $\theta = \omega t$ として次式で表わされる (付録3参照)。

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= 2 E_n^f I_{1a}^f \cos(b_1 \theta + \phi_{n\alpha}^f - \phi_{a\alpha}^f) \\ \text{ここで } b_1 &= n - a \\ W_2 &= -2 E_n^f I_{1a}^b \cos(b_2 \theta + \phi_{n\alpha}^f + \phi_{a\alpha}^b) \\ \text{ここで } b_2 &= n + a \\ W_3 &= -2 E_n^b I_{1a}^f \cos(b_3 \theta + \phi_{n\alpha}^b + \phi_{a\alpha}^f) \\ \text{ここで } b_3 &= n + a \\ W_4 &= 2 E_n^b I_{1a}^b \cos(b_4 \theta + \phi_{n\alpha}^b - \phi_{a\alpha}^b) \\ \text{ここで } b_4 &= n - a \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

(16) 式の n, a は、 n', a' を正の整数とすると (17) 式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} n &= 2n' - 1 \\ a &= 2a' - 1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

n, a に対して $b_1 \sim b_4$ を求めると表1のようなになる。表1から $W_1 \sim W_4$ の交流成分の次数は2の整数倍となる。また、交流成分の最低次の次数は2となる。同様な関係は、 a の任意性により P_n^f, P_n^b についても成立する。(13) 式で p の周期は、 P_n^f, P_n^b の周期に等しくなる。従って、 p は θ が π ごとに繰り返す波形

表 1 ($b_1 \sim b_4$) の値 [I]Table 1. Values [I] of ($b_1 \sim b_4$).

	b_1	b_2	b_3	b_4
n	$2a' - 1$	$2a' - 1$	$2a' - 1$	$2a' - 1$
$2n' - 1$	$2(n' - a')$	$2(n' + a' - 1)$	$2(n' + a' - 1)$	$2(n' - a')$

表 2 ($b_1 \sim b_4$) の値〔Ⅱ〕
Table 2. Values〔Ⅱ〕 of ($b_1 \sim b_4$).

n	a	b_1	b_2	b_3	b_4
		$4a'-3$	$4a'-1$	$4a'-3$	$4a'-1$
$4n'-3$		$4(n'-a')$	$4(n'+a'-1)$	—	—
$4n'-1$		—	—	$4(n'+a'-1)$	$4(n'-a')$

となる。

次に、奇数調波のみの平衡運転を考える。平衡運転の場合、 n が $(4n'-3)$ のときに正相分、 $(4n'-1)$ のときに逆相分となる⁽⁸⁾。この場合の $b_1 \sim b_4$ を求めると表 2 のようになる。表 2 より $W_1 \sim W_4$ の交流成分の次数は、4 の倍数となる。また、交流成分の最低次の次数は 4 となるので p は、 θ が $\pi/2$ ごとに繰り返す波形となる⁽⁸⁾。

次に、一相分の瞬時電力から二相分の瞬時電力を得る方法について述べる。この方法が得られれば、解析は簡単になる。奇数調波のみの平衡運転の場合、第 n 次調波二次電圧と一次電流の積から得られる瞬時電力 P_n が一相分のみの瞬時電力で表わせることを示す。 a を任意の正の奇数として、第 n 次調波二次電圧と一次電流の第 a 次調波成分間の瞬時電力 P_{na} を考える。 β 相の波形は α 相より位相が $\pi/2$ 遅れているから、 P_{na} は一般形式で次式のように表わせる。

$$P_{na} = \{ \sqrt{2} E_n \sin(n\theta + \phi_n) \} \{ \sqrt{2} I_{1a} \times \sin(a\theta + \phi_a) \} + \{ \sqrt{2} E_n \times \sin\{n(\theta - \pi/2) + \phi_n\} \} \{ \sqrt{2} I_{1a} \times \sin\{a(\theta - \pi/2) + \phi_a\} \} \dots\dots\dots (18)$$

P_{na} の第一項および第二項が α 相および β 相の瞬時電力である。第二項は、 n, a が奇数であるから次のように表わせる。

$$2E_n I_{1a} \sin\{n(\theta + \pi/2) + \phi_n\} \sin\{a(\theta + \pi/2) + \phi_a\}$$

従って、 β 相の瞬時電力波形は、 α 相の瞬時電力波形を θ に関して $\pi/2$ 平行移動した波形となることが分かる。この関係は、 a の任意性により一次電流のすべての成分について成立する。従って、 P_n は、一相の瞬時電力を $h_n(\theta)$ とすると次式で表わされる。

$$P_n = h_n(\theta) + h_n(\theta + \pi/2) \dots\dots\dots (19)$$

一相における第 n 次調波二次電圧と二次電流の積から得られる瞬時電力 $h_n'(\theta)$ についても同様な関係が成立し、次式で示される。

$$P_n' = h_n'(\theta) + h_n'(\theta + \pi/2) \dots\dots\dots (20)$$

P_n, P_n' のように、一相分の瞬時電力から二相分の瞬時電力を得る方法を表わした文献は、筆者の知る限りみあたらない。

次に、二相誘導機の特異点について考察する。これは、位相制御方式二相サボモータの励磁、制御両相に瞬時値の等しい正弦波電流を流しても、 $S=1$ ではトルクを発生しない現象である⁽⁹⁾。一般周期的波形の電流の場合について、この現象が発生するかどうかの検討はなされていないようである。もしトルクを発生しないことを明確にできれば、この点での瞬時トルクの計算が不用であること、ならびに解析解の検証にも利用できるから有用である。以下に具体的検討を行なう。 α, β 相の一次電流 $i_{1\alpha}, i_{1\beta}$ に対して k を定数として(21)式が成立すると仮定する。

$$i_{1\beta} = k i_{1\alpha} \dots\dots\dots (21)$$

$i_{1\alpha}$ の第 n 次調波成分は、一般形式で表わすと次式のようになる。

$$i_{1n\alpha} = \sqrt{2} I_{1n\alpha} \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}) \dots\dots\dots (22)$$

α 相における第 n 次調波一次電流の正相分と逆相分は、次式で表わされる (付録 2 参照)。

$$i_{1n\alpha}^f = I_{1n\alpha} \{ k \cos(n\theta + \phi_{n\alpha}) + \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}) \} / \sqrt{2} \dots\dots\dots (23)$$

$$i_{1n\alpha}^b = I_{1n\alpha} \{ \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}) - k \cos(n\theta + \phi_{n\alpha}) \} / \sqrt{2} \dots\dots\dots (24)$$

$i_{1n\alpha}^f$ と $i_{1n\alpha}^b$ および(15)式より次式が得られる。

$$e_{n\alpha}^f = I_{1n\alpha} Z^f(n) \{ k \cos\{n\theta + \phi_{n\alpha} + \beta^f(n)\} + \sin\{n\theta + \phi_{n\alpha} + \beta^f(n)\} \} / \sqrt{2}$$

$$e_{n\alpha}^b = I_{1n\alpha} Z^b(n) \{ \sin\{n\theta + \phi_{n\alpha} + \beta^b(n)\} - k \cos\{n\theta + \phi_{n\alpha} + \beta^b(n)\} \} / \sqrt{2}$$

$e_{n\beta}^f$ は $e_{n\alpha}^f$ より位相が $\pi/2$ 遅れ、 $e_{n\beta}^b$ は $e_{n\alpha}^b$ より位相が $\pi/2$ 進む。従って、(12)式より P_n^f と P_n^b を求めると次式のようになる。

$$P_n^f = i_{1\alpha} I_{1n\alpha} Z^f(n) \{ (1+k^2) \sin\{n\theta + \phi_{n\alpha} + \beta^f(n)\} \} / \sqrt{2} \dots\dots\dots (25)$$

$$P_n^b = i_{1\alpha} I_{1n\alpha} Z^b(n) \{ (1+k^2) \sin\{n\theta + \phi_{n\alpha} + \beta^b(n)\} \} / \sqrt{2} \dots\dots\dots (26)$$

図 3 において、 $S=1$ では正相分と逆相分の等価回路は等しくなるので、上式の P_n^f と P_n^b は等しくなり(13)式より p は零となりトルクは発生しない。

〈2・4〉 理論の証明 瞬時同期ワットの理論の証明を行なう。具体的には、瞬時同期ワットの理論から得られた瞬時トルクの一般式と電圧方程式を解いて得られた瞬時トルクの一般式が一致することを示す。

最初に瞬時同期ワットの理論より瞬時トルクの一般式を導出する。 α, β 相の第 n 次調波一次電流 $i_{1n\alpha}, i_{1n\beta}$ を次式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} i_{1n\alpha} &= \sqrt{2} I_{1n\alpha} \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}) \\ i_{1n\beta} &= \sqrt{2} I_{1n\beta} \sin(n\theta + \phi_{n\beta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

(27)式の電流を正相分と逆相分に分解する方法を付録2に示している。付録2は、数学的に厳密である。また、 $i_{1n\beta}^f$ は $i_{1n\alpha}^f$ より位相が $\pi/2$ 遅れ、 $i_{1n\beta}^b$ は $i_{1n\alpha}^b$ より位相が $\pi/2$ 進み、物理現象とも対応する。更に $i_{1n\alpha}^f$ と $i_{1n\alpha}^b$ の和が $i_{1n\alpha}$ となり $i_{1n\beta}^f$ と $i_{1n\beta}^b$ の和が $i_{1n\beta}$ となる。従って、付録2の妥当性は明白である。

(27)式の電流は、付録2において添字 m を1に置換して得られる $i_{1n\alpha}^f \sim i_{1n\beta}^b$ の4成分に分解される。これらの電流と図3の等価回路から得られる第 n 次調波二次電圧を以下に述べるように2成分の和として表わす。 $\dot{Z}^f(n), \dot{Z}^b(n)$ の実数部には添字 R を、虚数部には添字 I を使用する。 $e_{n\alpha}^f$ の第1の成分は、 $Z_R^f(n) i_{1n\alpha}^f$ である。第2の成分は、 $Z_I^f(n)$ と $i_{1n\alpha}^f$ の位相を $\pi/2$ 進めた電流の積である。この電流は $(-i_{1n\beta}^f)$ になるから $e_{n\alpha}^f$ は、次式で示される。

$$e_{n\alpha}^f = Z_R^f(n) i_{1n\alpha}^f - Z_I^f(n) i_{1n\beta}^f \dots (28)$$

同様にして他の電圧は、 α, β 相間の位相関係を考慮すれば次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} e_{n\alpha}^b &= Z_R^b(n) i_{1n\alpha}^b + Z_I^b(n) i_{1n\beta}^b \\ e_{n\beta}^f &= Z_R^f(n) i_{1n\beta}^f + Z_I^f(n) i_{1n\alpha}^f \\ e_{n\beta}^b &= Z_R^b(n) i_{1n\beta}^b - Z_I^b(n) i_{1n\alpha}^b \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

ここに

$$\begin{aligned} Z_R^f(n) &= \frac{(n\omega M)^2 S_n^f R_2}{R_2^2 + (n\omega S_n^f L_2)^2} \\ Z_I^f(n) &= \frac{n\omega M \{R_2^2 + (n\omega S_n^f)^2 L_2 L_1\}}{R_2^2 + (n\omega S_n^f L_2)^2} \\ Z_R^b(n) &= \frac{(n\omega M)^2 S_n^b R_2}{R_2^2 + (n\omega S_n^b L_2)^2} \\ Z_I^b(n) &= \frac{n\omega M \{R_2^2 + (n\omega S_n^b)^2 L_2 L_1\}}{R_2^2 + (n\omega S_n^b L_2)^2} \end{aligned}$$

(28), (29)式を用いると(12)式の P_n^f, P_n^b は、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} P_n^f &= Z_R^f(n) (i_{1\alpha} i_{1n\alpha}^f + i_{1\beta} i_{1n\beta}^f) \\ &\quad + Z_I^f(n) (i_{1\beta} i_{1n\alpha}^f - i_{1\alpha} i_{1n\beta}^f) \\ P_n^b &= Z_R^b(n) (i_{1\alpha} i_{1n\alpha}^b + i_{1\beta} i_{1n\beta}^b) \\ &\quad + Z_I^b(n) (i_{1\alpha} i_{1n\beta}^b - i_{1\beta} i_{1n\alpha}^b) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

(13)式の第 n 番目の項を p_n とすると p_n は(30)式を用いて次式で表わされる。

$$p_n = (P_n^f - P_n^b)/n \dots\dots\dots (31)$$

次に電圧方程式から瞬時トルクの一般式を導出する。付録2により(27)式に対する $\vec{i}_{1n}^f, \vec{i}_{1n}^b$ が得られる。(2)式と $\vec{i}_{1n}^f$ より $\vec{i}_{2n}^f$ が求められる。すなわち、

第 n 次調波正相分に対しては、(2)式の二次回路に関する式で $P = jn\omega$, $\vec{i}_1$ を $\vec{i}_{1n}^f$, $\vec{i}_2$ を $\vec{i}_{2n}^f$ と置換すれば $\vec{i}_{2n}^f$ が得られる。この $\vec{i}_{2n}^f$ と $\vec{i}_{1n}^f$ の和により次式に示す $\vec{i}_{mn}^f$ が得られる。

$$\vec{i}_{mn}^f = \frac{\{R_2 + jL_2(n\omega - \omega_r)\} \vec{i}_{1n}^f}{R_2 + jL_2(n\omega - \omega_r)}$$

同様にして逆相分に対しては、(2)式で $P = -jn\omega$ において $\vec{i}_{mn}^b$ を求めると次式が得られる。

$$\vec{i}_{mn}^b = \frac{\{R_2 - jL_2(n\omega + \omega_r)\} \vec{i}_{1n}^b}{R_2 - jL_2(n\omega + \omega_r)}$$

$\vec{i}_{mn}^f, \vec{i}_{mn}^b$ は、 $Z_R^f(n) \sim Z_I^b(n)$ を用いると次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \vec{i}_{mn}^f &= \{Z_I^f(n) - jZ_R^f(n)\} \vec{i}_{1n}^f / (n\omega M) \\ \vec{i}_{mn}^b &= \{Z_I^b(n) + jZ_R^b(n)\} \vec{i}_{1n}^b / (n\omega M) \end{aligned} \dots\dots\dots (32)$$

(5)式において $\vec{i}_m$ の第 n 次調波成分 $\vec{i}_{mn}$ に対するトルクを次式で示す。

$$\begin{aligned} T_n^f &= q M I_m \{ \vec{i}_1 \vec{i}_{mn}^{f*} \} \\ T_n^b &= q M I_m \{ \vec{i}_1 \vec{i}_{mn}^{b*} \} \end{aligned} \dots\dots\dots (33)$$

(32), (33)式の一次電流ベクトルは、次式で示される。

$$\begin{aligned} \vec{i}_{1n}^f &= i_{1n\alpha}^f + j i_{1n\beta}^f, \quad \vec{i}_{1n}^b = i_{1n\alpha}^b + j i_{1n\beta}^b \\ \vec{i}_1 &= i_{1\alpha} + j i_{1\beta} \end{aligned}$$

上式を(32), (33)式に代入し、更に(32)式の $\vec{i}_{mn}^f$ および $\vec{i}_{mn}^b$ を(33)式に代入して整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} T_n^f &= q \{ Z_R^f(n) (i_{1\alpha} i_{1n\alpha}^f + i_{1\beta} i_{1n\beta}^f) + Z_I^f(n) \\ &\quad \times (i_{1\beta} i_{1n\alpha}^f - i_{1\alpha} i_{1n\beta}^f) \} / (n\omega) \\ T_n^b &= -q \{ Z_R^b(n) (i_{1\alpha} i_{1n\alpha}^b + i_{1\beta} i_{1n\beta}^b) + Z_I^b(n) \\ &\quad \times (i_{1\alpha} i_{1n\beta}^b - i_{1\beta} i_{1n\alpha}^b) \} / (n\omega) \end{aligned}$$

(31)式と上式を比較すると次式が成立する。

$$(P_n^f - P_n^b)/n = \omega (T_n^f + T_n^b)/q$$

上式は、 n の任意性によりすべての成分について成立する。また、(13)式と(14)式は厳密に一致するので瞬時同期ワットの理論から得られた瞬時トルクと電圧方程式を解いて得られた瞬時トルクは、厳密に一致する。

3. 単相誘導機の瞬時トルク

〈3.1〉 瞬時同期ワットの理論 二相誘導機の固定子の一相を開放すれば単相誘導機となる。ここでは β 相の一次電流 $i_{1\beta}$ が零とする。この条件をつければ、第二章で述べた内容が単相誘導機に適用できる。

次に奇数調波のみの場合の p の周期性を考察する。 $i_{1\beta}$ が零であるから(23), (24)式で $k=0$ とおくと、正相分電流と逆相分電流は等しくなるので、すべての成

図 4 単相誘導機の一次電流波形

Fig. 4. Primary current waveform of single-phase induction motor.

分について正相分と逆相分が存在する。従って、(2・3)節の奇数調波のみの不平衡運転の場合に該当するので、 p は θ が π ごとに繰り返す波形となる。

なお、単相誘導機は、 $S=1$ において(2・3)節の $k=0$ に該当するからトルクを発生しない。

〈3・2〉 解析例 この節では、解析例によって瞬時同期ワットの理論が、瞬時トルクの解析理論として有効であることを示す。単相誘導機の一次電流 $i_{1\alpha}$ が図4に示す矩形波電流の場合の瞬時トルクを解析する。 $i_{1\alpha}$ は、次式で表わせる。

$$i_{1\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4I_d}{\pi n} \sin(n\theta) \dots\dots\dots (34)$$

$i_{1\alpha}$ の第 n 次調波正相分 $i_{1n\alpha}^f$ と逆相分 $i_{1n\alpha}^b$ は、次式で表わされる (付録2参照)。

$$i_{1n\alpha}^f = i_{1n\alpha}^b = \frac{2I_d}{\pi n} \sin(n\theta) \dots\dots\dots (35)$$

(35)式と(15)式より $e_{n\alpha}^f$ と $e_{n\alpha}^b$ が求まる。これらの電圧と図4の $i_{1\alpha}$ との積により P_n^f と P_n^b を求め、(13)式に代入すれば p の厳密式として次式が得られる。

$$0 \leq \theta < \pi$$

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2I_d^2}{\pi n^2} \{ Z^f(n) \sin\{n\theta + \beta^f(n)\} - Z^b(n) \sin\{n\theta + \beta^b(n)\} \} \dots\dots\dots (36)$$

図5は、供試機について(36)式を $n=1$ まで計算した値ならびに電圧方程式を解析的に解いて得られた比較のための厳密解⁽⁵⁾を示している。 n を1まで計算した値は、 S の広い範囲で近似精度がよい。これは次のように考えられる。すべり S が小さい場合、図1で R_2/S は大きく R_2/S_1^b は小さいので基本波二次電圧の正相分は逆相分に比べて大きい。一次電流の高調波成分は(34)式に示すように n の増加と共に小さくなることおよび高調波に対する R_2/S_n^f と R_2/S_n^b は、比較的小さいので高調波に対する二次電圧は比較的小さい。従って、二次電圧成分の中の基本波正相分は、基本波逆相分や高調波成分に比べ相対的に大きくなる。また、高調波に対する P_n^f 、 P_n^b は、(13)式で n が増す程 p に対する影響は小さくなる。従って、 S が小さい範囲では、 P_1^f で p の大勢が決定されるので $n=1$

図 5 p の計算値Fig. 5. Computed curves of p .

でも精度がよい。 $S=1$ では、図3の正相分等価回路と逆相分等価回路は等しくなるので(36)式の級数の各項は零となり、 n が1でも厳密解となる。その結果、 S が1近くでも n が1までの計算で精度がよい。

しかし、このような条件が成立しないときは、以下の対応が必要である。 S が1に近づくとき高調波に対する S_n^f 、 S_n^b も1に近づき、基本波成分に対して高調波成分の影響が相対的に大きくなる。このような場合 p の計算精度を上げるためには、一般に(13)式の次数 n を大きくする必要がある。

4. 三相誘導機に対する瞬時同期ワットの理論

三相誘導機の電圧方程式は、空間瞬時ベクトルを用いると(2)式で表わされる⁽⁵⁾。励磁電流ベクトルや瞬時トルクも(3)～(7)式と同様にして空間瞬時ベクトルで表わされる⁽²⁾。また、第 n 次調波成分は、付録4に示すように正相分と逆相分に分解できる。従って、下記の点に注意すれば(2・1)節の瞬時同期ワットの概念の導出過程は、三相誘導機にも適用でき、三相誘導機に対する瞬時同期ワットは(13)、(14)式で示される。

瞬時トルクの解析は、二相誘導機と同様に図3の等価回路を用いて行なうことができる。また、三相誘導機に対する理論の証明は、二相誘導機と同様に行なうことができる。

(i) 三相誘導機では、零相分が存在しないと仮定するので r, s, t 相の電流の瞬時値の和は零となる。

(ii) 三相誘導機と二相誘導機では、空間瞬時ベクトルの定義が異なる⁽²⁾。

(iii) (12)式の $P_n^f \sim P_n^b$ は、三相誘導機の場合、添字 r, s, t を r, s, t 相を示すものとする次式で表わされる⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} P_n^f &= e_{nr}^f i_{1r} + e_{ns}^f i_{1s} + e_{nt}^f i_{1t} \\ P_n^b &= e_{nr}^b i_{1r} + e_{ns}^b i_{1s} + e_{nt}^b i_{1t} \\ P_n'^f &= -e_{nr}^f i_{2r} - e_{ns}^f i_{2s} - e_{nt}^f i_{2t} \\ P_n'^b &= -e_{nr}^b i_{2r} - e_{ns}^b i_{2s} - e_{nt}^b i_{2t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

5. む す び

一般周期的波形の電流で駆動される実用上重要な単相誘導機、二相誘導機および三相誘導機の瞬時トルクは、瞬時同期ワットで表現できることを明らかにした。また、瞬時同期ワットの理論は、一次電流あるいは二次電流が既知なら瞬時トルクの解析理論として有効であり、次の特長を持つ。

(i) フーリエ級数展開、交流理論および等価回路を使用する解析であるので瞬時トルクの解析が容易であり、かつ瞬時トルクの物理的意味が明確になる。

(ii) 瞬時トルクは無限級数形式となるので、瞬時トルクの解析とマクロな把握が容易である。

(iii) 瞬時トルクの周期性の解析が可能である。

終わりに、電気機械理論について、ご教授賜った福岡工業大学（元九州工業大学）高田茂夫教授ならびに、ご支援賜わる九州工業大学上田隆三助教授に深く感謝の意を表します。

（昭和59年11月26日受付，同60年4月24日再受付）

付 録

1. 供試機の定数 付表1は、供試二相誘導機の定数である。

2. 二相誘導機の正相分と逆相分 第 n 次調波励磁電流の α, β 相成分は、一般形式で表わすと次式のようなになる。

$$i_{mn\alpha} = \sqrt{2} I_{mn\alpha} \sin(n\theta + \phi_{n\alpha})$$

$$i_{mn\beta} = \sqrt{2} I_{mn\beta} \sin(n\theta + \phi_{n\beta})$$

上式を用いて $\vec{i}_{mn}$ を示すと次式のようなになる。

付表 1 供試機の定数

appl. Table 1. Parameters of the tested motor.

定格出力	3.7 kW	$l_1 = l_2$	3.8 mH
定格周波数	60 Hz	M	121 mH
定格電圧	220 V	R_1	0.621 Ω
定格電流	10.6 A	R_2	0.712 Ω
定格すべり	3.2%		

$$\begin{aligned} \vec{i}_{mn} &= i_{mn\alpha} + j i_{mn\beta} = \sqrt{2} \{ I_{mn\alpha} \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}) \\ &\quad + j I_{mn\beta} \sin(n\theta + \phi_{n\beta}) \} \end{aligned}$$

上式で三角関数を指数関数に変換して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \vec{i}_{mn} &= \vec{i}_{mn}^f + \vec{i}_{mn}^b \\ \vec{i}_{mn}^f &= \{ \{ I_{mn\beta} \exp(j\phi_{n\beta}) - j I_{mn\alpha} \exp(j\phi_{n\alpha}) \} / \sqrt{2} \} \exp(jn\theta) \\ \vec{i}_{mn}^b &= \{ \{ j I_{mn\alpha} \exp(-j\phi_{n\alpha}) - I_{mn\beta} \exp(-j\phi_{n\beta}) \} / \sqrt{2} \} \exp(-jn\theta) \end{aligned} \dots\dots\dots (付 1)$$

$\vec{i}_{mn}^f$ の α 相成分 $i_{mn\alpha}^f$ と β 相成分 $i_{mn\beta}^f$ ならびに $\vec{i}_{mn}^b$ の α 相成分 $i_{mn\alpha}^b$ と β 相成分 $i_{mn\beta}^b$ は、次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} i_{mn\alpha}^f &= B_1 + B_2 \\ i_{mn\beta}^f &= B_3 - B_4 \\ i_{mn\alpha}^b &= B_2 - B_1 \\ i_{mn\beta}^b &= B_3 + B_4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (付 2)$$

ここで

$$B_1 = \{ I_{mn\beta} \cos(n\theta + \phi_{n\beta}) \} / \sqrt{2}$$

$$B_2 = \{ I_{mn\alpha} \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}) \} / \sqrt{2}$$

$$B_3 = \{ I_{mn\beta} \sin(n\theta + \phi_{n\beta}) \} / \sqrt{2}$$

$$B_4 = \{ I_{mn\alpha} \cos(n\theta + \phi_{n\alpha}) \} / \sqrt{2}$$

(付2)式より正相分の場合、 β 相成分は α 相成分より位相が $\pi/2$ 遅れ、逆相分の場合 β 相成分は α 相成分より位相が $\pi/2$ 進むことが分かる。以上の関係式および関係は、他の第 n 次調波電圧や電流についても成り立つ。

3. (16)式の誘導 付録2で述べた α, β 相に対する位相関係を考慮して第 n 次調波二次電圧と第 a 次調波一次電流は、一般形式で次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} e_{n\alpha}^f &= \sqrt{2} E_n^f \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}^f) \\ e_{n\beta}^f &= -\sqrt{2} E_n^f \cos(n\theta + \phi_{n\alpha}^f) \\ e_{n\alpha}^b &= \sqrt{2} E_n^b \sin(n\theta + \phi_{n\alpha}^b) \\ e_{n\beta}^b &= \sqrt{2} E_n^b \cos(n\theta + \phi_{n\alpha}^b) \\ i_{1a\alpha}^f &= \sqrt{2} I_{1a}^f \sin(a\theta + \phi_{a\alpha}^f) \\ i_{1a\beta}^f &= -\sqrt{2} I_{1a}^f \cos(a\theta + \phi_{a\alpha}^f) \\ i_{1a\alpha}^b &= \sqrt{2} I_{1a}^b \sin(a\theta + \phi_{a\alpha}^b) \\ i_{1a\beta}^b &= \sqrt{2} I_{1a}^b \cos(a\theta + \phi_{a\alpha}^b) \end{aligned} \right\}$$

.....(付3)

次に、 $W_1 \sim W_4$ は次式で表わされる。

$$W_1 = e_{n\alpha}^f i_{1\alpha\alpha}^f + e_{n\beta}^f i_{1\alpha\beta}^f$$

$$W_2 = e_{n\alpha}^f i_{1\alpha\alpha}^b + e_{n\beta}^f i_{1\alpha\beta}^b$$

$$W_3 = e_{n\alpha}^b i_{1\alpha\alpha}^f + e_{n\beta}^b i_{1\alpha\beta}^f$$

$$W_4 = e_{n\alpha}^b i_{1\alpha\alpha}^b + e_{n\beta}^b i_{1\alpha\beta}^b$$

(付3)式を $W_1 \sim W_4$ の式に代入して整理すると(16)式が得られる。

4. 三相誘導機の正相分と逆相分 r, s, t 相の第 n 次調波励磁電流は、一般形式で表わすと次式のようなになる。

$$\left. \begin{aligned} i_{mnr} &= \sqrt{2} I_{mnr} \sin(n\theta + \phi_{nr}) \\ i_{mns} &= \sqrt{2} I_{mns} \sin(n\theta + \phi_{ns}) \\ i_{mnt} &= \sqrt{2} I_{mnt} \sin(n\theta + \phi_{nt}) \end{aligned} \right\} \dots(\text{付4})$$

$\vec{i}_{mn}$ は、次式で示される⁽²⁾。

$$\begin{aligned} \vec{i}_{mn} &= 2(i_{mnr} + D i_{mns} + D^2 i_{mnt})/3 \\ &= \vec{i}_{mn}^f + \vec{i}_{mn}^b \dots\dots\dots(\text{付5}) \end{aligned}$$

ここで、 $D = \exp(j2\pi/3)$

(付5)式に(付4)式を代入し、三角関数を指数関数に変換して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \vec{i}_{mn}^f &= \{\sqrt{2}/(3j)\} \{I_{mnr} \exp(j\phi_{nr}) + I_{mns} \exp\{j(\phi_{ns} + 2\pi/3)\} + I_{mnt} \exp\{j(\phi_{nt} - 2\pi/3)\}\} \exp(jn\theta) \\ \vec{i}_{mn}^b &= \{-\sqrt{2}/(3j)\} \{I_{mnr} \exp(-j\phi_{nr}) + I_{mns} \exp\{-j(\phi_{ns} - 2\pi/3)\} + I_{mnt} \exp\{-j(\phi_{nt} + 2\pi/3)\}\} \exp(-jn\theta) \end{aligned}$$

$\vec{i}_{mn}^f$ の各相成分は、 $\vec{i}_{mn}^f$ が正相分であるので相回転の方向である r, s, t の順に位相が順次 $2\pi/3$ 遅れた波形となる。 $\vec{i}_{mn}^b$ の各相成分は、逆に位相が順次 $2\pi/3$ 進む波形となる。このことは、次式を具体的に計算⁽²⁾することでも確認できる。

$$\begin{aligned} i_{mnr}^f &= R_e(\vec{i}_{mn}^f), \quad i_{mns}^f = R_e[D^2 \vec{i}_{mn}^f] \\ i_{mnt}^f &= R_e(D \vec{i}_{mn}^f), \quad i_{mnr}^b = R_e(\vec{i}_{mn}^b) \\ i_{mns}^b &= R_e[D^2 \vec{i}_{mn}^b], \quad i_{mnt}^b = R_e(D \vec{i}_{mn}^b) \end{aligned}$$

以上の関係式および関係は、他の第 n 次調波の電圧や電流についても成立する。

文 献

- (1) 河野・古賀：「ポンプ・ブロワの省電力駆動」安川電機，43，165，125（昭54）
- (2) 古賀：「ひずみ波電源で駆動される誘導電動機の瞬時トルク」電学論B，103，52（昭58-1）
- (3) 古賀：「不平衡運転誘導電動機の瞬時トルク」昭58電気学会全大 No. 753
- (4) 原島・内田：「状態推移法によるインバータ誘導電動機系の解析」電学誌，89，2369（昭44-12）
- (5) D.W. Novotony: "Steady State Performance of Inverter Fed Induction Machines by Means of Time Domain Complex Variables" IEEE Trans. Power Apparatus Syst. PAS-95, 3, 927 (1976-5/6)
- (6) 「誘導機」：電気学会編，136（昭38）
- (7) 森下・岩橋・奥田：「高速フーリエ変換法を用いたインバータ駆動誘導電動機特性の解析」電学論B，100，533（昭55-9）
- (8) 岡田・篠宮・畔上：「2相方形波インバータで駆動される2相誘導電動機の発生トルク特性の解析とその検討（2相サーボモータの場合）」電学論B，98，251（昭53-3）
- (9) 須藤・戸恒・篠宮：「2相サーボモータの位相制御時における振動トルクの解析」計測自動制御学会論文集，8，1，96（昭47-2）