電力動揺の安定度解析における周波数応答法の高速化

正員 垣本 直人 (京都大)
正員 林 宗明 (京都大)

正員 大野木 幸男 (広島大)

1. はじめに

電力系統の動態安定度は系統計画および運用における重要な検討項目の一つであり、広く解析が行われている。検討の目的と系統の規模に応じて、シミュレーション法、詳細固有値法、 S 行列法などの解析手法が用いられる^{(1)~(12)}。周波数応答法もその一つであり、大規模な電力系統における電力動揺の安定性を解析するために提案されたものである⁽⁶⁾⁽⁷⁾。この方法は演算子伝達行列⁽⁸⁾と呼ばれる行列を対象とし、その行列式の周波数応答によって、系統の安定性を判定するものである。対象行列の大きさが系統内の発電機の数に等しいため、詳細固有値法のように記憶容量による制約をあまり受けず、大規模な系統への適用が可能である。また、各々の周波数における応答の計算は互いに独立に行えるため、シミュレーション法における積分誤差の蓄積という心配もなく、かつ並列処理も可能であるという利点がある。しかし、この方法は計算時間に欠点があり、系統規模が大きくなるにつれて全体の周波数応答を得るのに非常に長い計算時間が必要となる。このため、本手法の適用範囲は50機以下の系統とされている⁽⁸⁾。

計算時間における前述の欠点は次の二つの事柄に起因する。一つは各周波数における応答の計算にかなりの時間を要することである。これは対象とする演算子伝達行列が発電機数と共に大きくなり、行列および行列式の計算時間が発電機数の約3乗に比例して増すためである。もう一つは、発電機数の増加と共に応答を求める周波数の刻み幅を小さくしていく必要があり、このために計算量が発電機数に比例して増えていくこ

とである。以上のことから、本手法の計算時間は発電機数の約4乗に比例して長くなることがわかる。本論文では、この欠点を克服するために幾つかの対策を試みる。まず、前者については計算時間を短縮するために、対象行列の行列式を直接求める方法を提案する。本手法では、演算子伝達行列の代わりに三つの中間的な行列を介して目的の行列式を求めることとし、その際これらの行列のスパース性を利用することにより計算効率の向上を図る⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。後者については、走査する周波数の数を減らすために、刻み幅を一つに固定せず、複数個の刻み幅を導入する。周波数応答が急速に変化する周波数の範囲では細かい刻み幅を使用し、変化が緩やかな範囲では粗い刻み幅を使用する。このように複数の刻み幅を用いることにより、不必要な周波数応答の計算を省くことが可能となる。

本論文では、まず第2章で電力動揺に関する基本的な関係式を示し、周波数応答法について簡単な説明を行う。第3章では演算子伝達行列の行列式を求める従来の方法の欠点を明らかにし、新しい計算方法について述べる。また、第4章では周波数の刻み幅の選定方法について述べる。最後の第5章は本論文のまとめとする。

2. 基本式

本章では、まず系統を記述する方程式を示し、これらを運転点において線形化することにより、電力動揺に関する基本式を導く。次に、この式に基づいて周波数応答法の説明を行う。

〈2・1〉 系統方程式 電力系統は、 m 機の発電機、 n 個の母線、 l 本の送電線から成るとする。発電機は同期機であり、その動きは次式により記述される。

$$m_i \frac{d^2 \delta_i}{dt^2} = P_{mi} - P_{ei} \dots \dots \dots (1)$$

$$T_{d0i} \frac{dE_{qi}'}{dt} = E_{fdi} - E_{qi}' - (x_{di} - x_{di}') i_{di} \dots \dots \dots (2)$$

Fast Stability Analysis of Power Oscillations by Frequency Response Method. By Naoto Kakimoto, Member, Muneaki Hayashi, Member (Kyoto University) & Yukio Ohnogi, Member (Hiroshima University).

垣本直人：正員，京都大学工学部電気工学教室
林 宗明：正員，京都大学工学部電気工学教室
大野木幸男：正員，広島大学工学部

$$v_{di} = x_{qi} i_{qi} - r_i i_{di} \dots\dots\dots (3)$$

$$v_{qi} = E_{fi}' - x_{di}' i_{di} - r_i i_{qi} \dots\dots\dots (4)$$

$$P_{ei} = v_{di} i_{di} + v_{qi} i_{qi} \dots\dots\dots (5)$$

$$(i=1, \dots, m,)$$

ただし、各発電機 i について、 P_{mi} : 機械的入力、 P_{ei} : 電氣的出力、 m_i : 慣性定数、 δ_i : 回転子角、 E_{fi}' : 励磁電圧、 E_{qi}' : q 軸内部電圧、 i_{di} : d 軸電機子電流、 i_{qi} : q 軸電機子電流、 v_{di} : d 軸端子電圧、 v_{qi} : q 軸端子電圧、 x_{di} : d 軸同期リアクタンス、 x_{di}' : d 軸過渡リアクタンス、 x_{qi} : q 軸同期リアクタンス、 T_{doi}' : d 軸開路時定数、 r_i : 電機子抵抗

座標軸 d および q は各発電機の回転子に固定した座標系におけるものである。機械的入力とは調速機により、励磁電圧 E_{fi}' は自動電圧調整器 (AVR) や系統安定化装置 (PSS) によりそれぞれ制御される。

送電線と母線は回路網を構成するが、この回路網における母線の端子電圧と注入電流は次式により関係づけられる。

$$\begin{pmatrix} i_{Q1} \\ i_{D1} \\ \vdots \\ i_{Qn} \\ i_{Dn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & g_{11} & \dots & b_{1n} & g_{1n} \\ g_{11} & -b_{11} & \dots & g_{1n} & -b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & g_{n1} & \dots & b_{nn} & g_{nn} \\ g_{n1} & -b_{n1} & \dots & g_{nn} & -b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{D1} \\ v_{Q1} \\ \vdots \\ v_{Dn} \\ v_{Qn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、各母線 i について、 i_{di} : D 軸注入電流、 i_{qi} : Q 軸注入電流、 v_{di} : D 軸端子電圧、 v_{qi} : Q 軸端子電圧、 g_{ij} : 母線 i, j 間のコンダクタンス、 b_{ij} : 母線 i, j 間のサセプタンス

座標 D および Q は系統の基準座標系におけるものである。最初の m 個の母線は発電機に、残りの $(n-m)$ 個の母線は負荷に対応する。(6)式を記号的に

$$I = YV \dots\dots\dots (7)$$

と表す。ただし、 Y は $2n \times 2n$ アドミタンス行列を、 I, V はそれぞれ次元 $2n$ の電流、電圧ベクトルを示す。系統基準軸から発電機軸への電流、電圧の変換は次式により行われる。

$$\begin{pmatrix} v_{di} \\ v_{qi} \end{pmatrix} = T_i \begin{pmatrix} v_{Di} \\ v_{Qi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_{di} \\ i_{qi} \end{pmatrix} = T_i^t \begin{pmatrix} i_{Di} \\ i_{Qi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

$$(i=1, \dots, m) \dots\dots\dots$$

ただし、添字 t は行列の転置を意味する。 T_i は変換行列であり、

$$T_i = \begin{pmatrix} \sin \delta_i & -\cos \delta_i \\ \cos \delta_i & \sin \delta_i \end{pmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

により定義される。

負荷はすべて定インピーダンスとして扱い、回路アドミタンスの中に等価的に組み込むものとする。従って、負荷母線への注入電流は零になる。すなわち、

$$i_{Di} = i_{Qi} = 0 \quad (i=m+1, \dots, n) \dots\dots\dots (10)$$

が各負荷母線で成り立つ。

〈2.2〉線形化⁽⁵⁾⁽⁸⁾ 系統は(1)~(10)式により記述されているが、そのなかの幾つかは非線形である。周波数応答法によって電力動揺の解析を行うには、それらを運転点において線形化することが必要である。まず、(2)~(4)式と(8)式を線形化すると次の関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \Delta i_{Qi} \\ \Delta i_{Di} \end{pmatrix} = b_{1i}(p) \begin{pmatrix} \Delta v_{Di} \\ \Delta v_{Qi} \end{pmatrix} + b_{2i}(p) \Delta \delta_i \dots (11)$$

ただし、

$$b_{1i}(p) = T_i^0 X_i^{-1} \left\{ T_i^0 + G_i \text{AVR}_i \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{Di}^0/v_{ti}^0 & v_{Qi}^0/v_{ti}^0 \end{pmatrix} \right\} \\ b_{2i}(p) = T_i^0 X_i^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} v_{qi}^0 \\ -v_{di}^0 \end{pmatrix} - X_i \begin{pmatrix} -i_{di}^0 \\ i_{qi}^0 \end{pmatrix} \right. \\ \left. - G_i \text{AVR}_i \text{PSS}_i p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$X_i = \begin{pmatrix} x_{qi}(p) & -r_i \\ -r_i & -x_{di}(p) \end{pmatrix}$$

ただし、 p : 微分演算子 $= d/dt$, Δ : 微小変動分、 0 : 運転点、 $G_i(p)$: 界磁巻線の伝達関数、 $x_{di}(p)$: d 軸演算子リアクタンス、 $x_{qi}(p)$: q 軸演算子リアクタンス、 $\text{AVR}_i(p)$: AVR の伝達関数、 $\text{PSS}_i(p)$: PSS の伝達関数

なお、式中 PSS への入力信号を $p\delta$ としているが、発電機出力、周波数を入力とすることも容易である。(1)、(5)式を線形化すると、次式が得られる。

$$(m_i p^2 + b_{4i}(p)) \Delta \delta_i = -b_{3i}(p) \begin{pmatrix} \Delta v_{Di} \\ \Delta v_{Qi} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$b_{3i}(p) = [v_{Qi}^0 \ v_{Di}^0] b_{1i}(p) + [i_{Di}^0 \ i_{Qi}^0] \\ b_{4i}(p) = [v_{Qi}^0 \ v_{Di}^0] b_{2i}(p) + \text{GOV}_i(p) p$$

ただし、 $\text{GOV}_i(p)$: 調速機の伝達関数

(7)式を線形化すれば、明らかに

$$\Delta I = Y \Delta V \dots\dots\dots (13)$$

となる。(11)式を(13)式に代入し、電流 ΔI を消去すると、 ΔV と $\Delta \delta$ との関係が得られる。すなわち、

$$(Y - B_1) \Delta V = B_2 \Delta \delta \dots\dots\dots (14)$$

ただし、

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

一方、(12)式を行列表現すると

$$(Mp^2 + B_4)\Delta\delta = -B_3\Delta V \quad (15)$$

となる。ただし、

$$B_3 = \begin{bmatrix} b_{31} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} b_{41} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

最後に(14)、(15)式から電圧 ΔV を消去すると、回転子角に関する式が得られる。すなわち、

$$F(p)\Delta\delta = 0 \quad (16)$$

ただし、

$$F(p) = (Mp^2 + B_4) + B_3(Y - B_1)^{-1}B_2 \quad (17)$$

この式は系統の電力動揺に関する安定性を記述する基本式となる。 $F(p)$ は $m \times m$ 行列であり、その各要素は演算子 p の関数となっている。この行列を演算子伝達行列と呼ぶ。

〈2・3〉 周波数応答法⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽¹⁵⁾ 周波数応答法について簡単に説明を行う。詳しくは文献(6)、(7)、(15)を参照されたい。系統は m 機の発電機から成っているので、 m 個の電力動揺モードが存在する。これらのモードは(16)式の固有値に対応する。各固有値は次式

$$|F(p)| = 0 \quad (18)$$

を満たすような p の値である。ただし、 $|\cdot|$ は行列式を意味する。もし、(18)式を解くことにより、すべての固有値がみつければ、系統の安定性は明らかとなる。しかし、行列 F の各要素が p の関数となっているため、すべての固有値を求めることは容易ではない⁽⁵⁾⁽⁸⁾。この困難を避けるために周波数応答法が提案された⁽⁶⁾⁽⁷⁾。この方法においては、演算子 p を次のように虚数で置き換える。すなわち、

$$p = j\omega \quad (19)$$

ただし、 ω : 周波数 (rad/s)

この ω を

$$\omega = 0 \rightarrow \infty \quad (20)$$

と変化させると、行列式 $|F(j\omega)|$ は図1に示すように複素平面上を移動する。ただし、上式の ∞ は実際の計算では有限の値、例えば 20 rad/s で置き換えられる。系統の安定性は、このときの行列式の動きから判別される。行列式は複素平面の原点の回りを回転するが、もし回転数が反時計方向に $m/2$ であれば、系統は安定である。ただし、 m は発電機数である。ここでい

図1 周波数応答の回転

Fig. 1. Rotation of the frequency response.

う「安定」とは、すべての固有値が負の実部をもち、すべての電力動揺モードが時間の経過と共に減衰していくことを意味する。回転数は正の実部をもつ固有値1個につき、一つずつ少なくなっていく。従って、回転数から不安定な動揺の数を知ることができる。この方法の特徴の一つは、 p を(19)式のような形だけでなく、任意の複素数にとりうるということである。例えば、演算子 p を

$$p = \sigma + j\omega \quad (21)$$

と選び、 ω を(20)式に従って動かせば(ただし、 σ : 定数)、 σ に対する固有値実部の大小関係を知ることが可能である。また文献(11)のように、複素平面上の任意の領域を囲むように p を動かせば、その領域内に固有値が存在するかどうかを判断することも可能である。

3. 周波数応答の計算

周波数応答法では、演算子伝達行列 F の行列式を各々の周波数において計算することが必要となる。従って、この計算を迅速に行うことが重要な課題となる。本章では、この点について検討を行う。

〈3・1〉 従来法 各周波数における応答を求める場合、まず伝達行列 F を計算した後、その行列式を計算するのが通常の方法である。しかし、これは非常に時間のかかる計算方法となる。以下にその理由を述べる。

伝達行列 F は(17)式により表現される。この式によれば、 F は $2n \times m$ の行列

$$(Y - B_1)^{-1}B_2 \quad (22)$$

を含む。ただし、 $Y - B_1$ および B_2 はそれぞれ $2n \times 2n$, $2n \times m$ の行列である。この行列を得るには幾つかの方法があるが、一つの方法は連立一次方程式

$$Dx = b \quad (23)$$

を解くことである。ただし、 $D = Y - B_1$ であり、 x, b は $2n$ 次元ベクトルである。行列 B_2 の各列を b に代入し、この b に対して(23)式を解くと、その解 x は

目的の行列の対応する列となる。(23)式は次のように二段階に分けて解くことができる。まず、 D を二つの三角行列 L と U に分解する。すなわち、

$$D = LU \quad \dots\dots\dots (24)$$

ただし、

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & \vdots & \ddots \\ l_{N1} & \dots\dots\dots & l_{NN} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \dots\dots\dots u_{1N} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & u \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

であり、かつ $N=2n$ 。 L と U はそれぞれ下三角行列、上三角行列である。次に、これらの三角行列を使って(23)式を次の等価な二つの式に置きかえる。

$$Ly=b, \quad Ux=y \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし、 $y: 2n$ 次元の中間ベクトル

L と U の形から、これらの式はそれぞれ前進および後退代入によって容易に解けることがわかる。さて、係数行列 D は定義から明らかなように、アドミタンス行列 Y と同じ構造をもつ。周知のように、 Y は一般に非常にスパースな行列であり、この性質は潮流計算、その他において計算の効率化に広く利用されている。すなわち、計算を行列の零でない要素にだけ行い、記憶領域もそれらの要素に対してのみ割りあて⁽¹³⁾。この計算手法を上記の二段階において適用すれば、計算時間のある程度短くすることが可能である。しかしながら、発電機の数が増えると、行列 F の計算はそれでも大きな負担となる。なぜならば、第二段階における(25)式を m 回、すなわち発電機の数だけ繰返して解かなければならないからである。更に、このようにして得られた行列 F は密な行列であり、従ってその行列式を求めるのにまた相当の時間が必要となる。

このように、演算子伝達行列の行列式を求める従来の方法には、計算時間を長びかせる幾つかの要因があり、これらの要因は周波数応答法を大規模系統に適用する際の大きな障害となる。

〈3・2〉 提案法 計算時間が長くなるのは演算子伝達行列を計算することに起因している。しかし、必要なのは行列自体ではなく、その行列式である。もし、この行列を介さずに直接、行列式を求めることができれば、上述の問題を避けることが可能である。

行列 F は次のように書き換えることができる。すなわち、

$$F = A - BD^{-1}C \quad \dots\dots\dots (26)$$

ただし、

$$A = Mp^2 + B_4 \quad (m \times m)$$

$$B = -B_3 \quad (m \times 2n)$$

$$C = B_2 \quad (2n \times m)$$

$$D = Y - B_1 \quad (2n \times 2n)$$

である。これらの行列 $A \sim D$ を(26)式のように組合せると F となる。しかし、ほかにも幾つかの組合せ方がある。次の行列はその一例である。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

この行列は $A \sim D$ を部分行列として含む大きな行列であり、その行列式は F の行列式と密接に関連している。つまり、この行列式には次のような二通りの表し方がある⁽¹⁴⁾。

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| |D - CA^{-1}B| \\ = |A - BD^{-1}C| |D| \quad \dots\dots\dots (28)$$

簡単な変形により、

$$|A - BD^{-1}C| = |A| |D - CA^{-1}B| / |D| \quad \dots\dots\dots (29)$$

が得られる。この式の左辺は明らかに行列 F の行列式である。(29)式は目的の行列式が右辺の三つの行列式を通して得られることを示している。一つの行列式のために三つの行列式を計算するのは一見、非効率に見えるが、この場合にはあてはまらない。

それには、二つの理由がある。一つは、三つの行列 A, D および $D' (\equiv D - CA^{-1}B)$ が容易に得られることである。 A は対角行列であり、 D と D' はアドミタンス行列 Y に小さな変更を加えることにより得られる行列である。従って、それらに要する計算時間は短くてすむ。もう一つの理由は、これらの行列の行列式もまた容易に計算できることである。まず、 A は対角行列であるから、行列式は対角要素の積となる。すなわち、

$$|A| = \prod_{i=1}^m (m_i p^2 + b_{4i}) \quad \dots\dots\dots (30)$$

次に、 D はスパースな行列であり、三角行列への分解により行列式を効率良く求めることができる⁽¹⁴⁾。ここでは D を(24)式のように分解する。 D は行列 L と U の積であるから、行列式は

$$|D| = |L| |U| \quad \dots\dots\dots (31)$$

となる。 L と U の行列式はそれぞれ対角要素の積になる。また U の対角要素はすべて1であるから、その行列式もまた1である。以上より、 D の行列式は

$$|D| = \prod_{i=1}^N l_{ii} \quad \dots\dots\dots (32)$$

で与えられる。この式は、 D の LU 分解が必要であ

るという点を除けば、形式的に(30)式と同じである。また D の分解はスパース性を利用すれば容易に行うことができる⁽¹³⁾。最後に D' の行列式であるが、この行列は行列 A, B, C の形を調べることにより D と同じ構造をもつことがわかる。よって、その行列式は D の場合と同じ方法で得られる。必要なのは D' を(24)式のように三角行列に分解することだけである。以上の検討から、(29)式右辺の行列式はすべて効率良く計算でき、それらの組合せにより目的の行列式が効率的に求められることがわかる。なお、行列式の計算にスパース性を利用することの有効性は既に知られているが⁽¹¹⁾⁽¹⁴⁾、具体的な形で周波数応答法への適用を検討した例はまだ報告されていない。

〈3・3〉 適用例 表1は三つの例題系統について、一つの周波数における応答を従来法と提案法とにより求めたときの計算時間を示す。例題系統は、それぞれ9, 33, 107 台の発電機から成る。従来法の場合についてみると、計算時間は6.5, 115.6, 1178.8 ms となっており、系統規模と共に急速に増していく。これを発電機数 m 、母線数 n の関数として近似すると

$$T_0 = 0.0775n + 0.0209nm + 0.00027m^3 \text{ (ms)} \dots\dots\dots (33)$$

と表すことができる。第2項、第3項が主要な部分を占める。一方、提案法の場合、計算時間は3.1, 20.0, 53.3 ms となり、ほぼ系統規模に比例して増えていく。同様に近似式で表すと、

$$T_p = 0.145n \text{ (ms)} \dots\dots\dots (34)$$

となり、母線の数に比例する。両方法の計算時間の比をとると、9 機系統の場合では2.1となり、あまり大きな差異は見られないが、33 機系統では5.8, 107 機系統では22.1となり、差が大きくなっていく。系統規模が大きくなると、この差異は更に広がる。試みに $m=200, 300$ の場合についてみると、

$$\begin{aligned} T_0/T_p &= 5,566/116 = 48.0 \quad (m=200) \\ &= 14,907/174 = 85.7 \quad (m=300) \end{aligned}$$

となり(ただし、 $n=4m$)、大きな比率となる。ところで、周波数応答法は一つの周波数における応答のみで

表1 一応答あたりの計算時間

Table 1. Computation time for one frequency response (ms).

(単位: ms)					
No.	発電機数	母線数	従来法	提案法	比
1	9	24	6.5	3.1	2.1
2	33	138	115.6	20.0	5.8
3	107	365	1,178.8	53.3	22.1

計算機: FACOM M 382

表2 計算時間の内訳

Table 2. Breakdown of computation time (ms).

(単位: ms)		
	従来法	提案法
行列の作成	14.1 (D)	7.9 (A)
分解	14.2	8.6 (D, D')
代入	816.9	14.1 $\times 2$
行列式	330.8	—
その他	2.8	8.6
計	1,178.8	53.3

なく、多くの周波数に対する応答を必要とする。仮に0~20 rad/s の周波数域を刻み幅 0.02 rad/s で走査するとすれば、1,000 個の応答が必要となる。107 機の場合についてこの走査を行うと、提案法では53.3秒で終了するが、従来法では19.6分要することになる。更に系統規模が大きくなると、従来法では実質的に解析ができなくなる。

表2は一つの周波数応答を求めるのに要する時間の内訳を107 機系統について示したものである。従来法の場合でも、行列 D を作成し、分解するのにはあまり時間がかからない。しかし、前進および後退代入により F を作成するのに816.9 ms と、その行列式を計算するのに330.8 ms を要している。これらは、それぞれ(33)式の第2項、第3項に対応しており、その和は全計算時間の97%を占める。一方、提案法においては二つの行列 D と D' を作成し、分解する必要があるが、それに要する時間はわずかである。逆に、この方法では F の作成およびその行列式の計算が不要であることから、多くの計算時間の節約が可能となる。提案法では、そのほかに(30)式や(32)式中の対角要素の積をとるために8.6 ms 費やしている。周波数応答法では応答の位相が重要であり、大きさはあまり重要でないで、実際の計算では各対角要素をその絶対値で割っている。その結果、応答は複素平面の原点を中心とする半径1の円周上に常に動き、位相の追跡が容易となる。

4. 刻み幅の選択

図2は、107 機の系統における周波数応答の回転数を1 rad/s ごとに示したものである。大部分の回転が $\omega=5\sim 10$ rad/s で生じており、その他ではわずかである。これは応答の回転が一様でなく、周波数により異なることを意味する。回転を追跡するには周波数を次々に変えて応答を調べる必要があるが、1回転あたりの応答は一定数で十分である。従来は同じ刻み幅で周波数を走査してきたが、本章では刻み幅を応答の変化速

図 2 周波数応答の 1 rad/s あたり回転数 (107 機系)

Fig. 2. The number of rotations of the frequency response per 1 rad/s (107-machine system).

度に応じて変えることにより、計算量の削減を図る。

〈4・1〉 回転速度の変化 周波数応答の回転速度は周波数により異なるが、これを固有値との関連により考察する。まず、各固有値 $\lambda_i (i=1 \sim m)$ は (18) 式の解であり、周波数応答は

$$|F(j\omega)| = c(j\omega) \prod_{i=1}^m (j\omega - \lambda_i) \dots \dots \dots (35)$$

のように $(j\omega - \lambda_i)$ の積で表せる。ただし、 $c(j\omega)$ は共役固有値その他による特性を示す⁽¹⁵⁾。各固有値により応答の位相 θ が変化する速度は

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{\alpha_i}{\alpha_i^2 + (\omega - \omega_i)^2} \equiv f(\omega, \omega_i, \alpha_i) \dots \dots \dots (36)$$

である。ただし、 $\lambda_i = -\alpha_i + j\omega_i$ 。図 3 に $d\theta/d\omega$ と ω の関係を示す。 $d\theta/d\omega$ の大きさは ω が ω_i のときに最大となり、 ω_i から離れるにつれて小さくなる。この傾向は α_i が小さいほど顕著になり、 $d\theta/d\omega$ はパルス状に変化する。よって、 θ は ω_i のごく近傍でのみ急に変化し、ほかの ω ではほとんど変化を示さない。一方、 α_i が大きいと $d\theta/d\omega$ の変化は緩やかとなり、 θ は広い範囲で徐々に変化する。このように θ の変化の仕方は、複素平面上における固有値の位置により大きく異なる。

全体の応答は各固有値による変化を合せたものであり、固有値の分布状況により変化の様相が異なる。一般に、電力動揺の周期は 1 Hz 前後の比較的短いものが多く、対応する固有値も $\omega = 6 \sim 9$ rad/s 付近に多く分布する。例えば、ある周波数 $\bar{\omega}$ を中心に正規分布しているとすれば、 $d\theta/d\omega$ は固有値 1 個あたり

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega, \omega^*, \alpha)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(\omega^* - \bar{\omega})^2}{2\sigma^2}\right\} d\omega^* \dots \dots \dots (37)$$

図 3 1 個の固有値による応答の回転速度

Fig. 3. The speed of rotation of the frequency response by one eigenvalue.

図 4 正規分布する固有値 1 個あたりの応答の回転速度

Fig. 4. The speed of rotation of the frequency response per one eigenvalue of normal distribution.

ただし、 σ : 分散

となる。図 4 に $d\theta/d\omega$ と ω の関係を示す。ここでは $\bar{\omega} = 7.5$ rad/s、 $\sigma = 1$ とし、固有値実部 α をパラメータとした。同図より、周波数応答の回転速度は固有値が集中する ω の範囲において速くなることがわかる。また、 α が小さいほど $d\theta/d\omega$ の変化は鋭く、正規分布の形に近くなる。

〈4・2〉 周波数の分割 図 5 は 107 機の系統における $d\theta/d\omega$ を 0.1 rad/s ごとの ω について求めたものである。求め方は

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{\theta(\omega + \Delta\omega) - \theta(\omega)}{\Delta\omega} \dots \dots \dots (38)$$

ただし、 $\Delta\omega = 0.001$ rad/s

によっている。この例では、 $d\theta/d\omega$ は $\omega = 7$ rad/s あたりにピークをもっている。所々にパルス状の変化が見られるが、虚軸の近くに固有値があるためである。そして、図 4 のようになだらかでないのは、固有値の数が有限であることによる。

周波数応答は $d\theta/d\omega$ によって示される速さで回転

図5 周波数応答の回転速度 (107 機系)

Fig. 5. The speed of rotation of the frequency response (107-machine system).

図6 1回転あたりの
応答数

Fig. 6. The number of responses per one rotation.

図7 虚軸近くの
固有値による応答
のパルス的变化

Fig. 7. Pulse change of response by an eigenvalue near the imaginary axis.

する。複素平面上で一つの回転をみるのに、図6のように三つの応答が必要であるとすると、すべての回転を追跡するのに必要な周波数点の数は

$$n_r = \int_0^\infty 3 \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{d\omega} d\omega \dots \dots \dots (39)$$

となる。一方、総回転数はたかだか $m/2$ であるから、

$$n_r \doteq 3m/2 \dots \dots \dots (40)$$

となる。従って、すべての ω において $d\theta/d\omega$ がわかっており、それに応じて適切に刻み幅を変えていけば、走査すべき周波数の数は約 $3m/2$ ですむことになる。これは最も効率の良い場合に相当する。

しかし、すべての ω において $d\theta/d\omega$ を求めるのは計算効率の点で望ましくない。ここでは ω を 1 rad/s ごとに区切り、各区間で一定の刻み幅を用いることにする。ただし、刻み幅の大きさ $\Delta\omega$ は区間の両端における $d\theta/d\omega$ のうち、大きいほうにより定める (図5参

照)。このとき、各 1 rad/s あたりの応答数 Δn_p は

$$\Delta n_p = 3/2\pi \max(d\theta/d\omega) \dots \dots \dots (41)$$

与えられる。この方法を図5の例に適用すると、 $\omega = 1 \sim 20$ rad/s における応答総数は 228 個となった。

1 回転あたり平均応答数は 4.22 となり、理想的な場合の 3 と比較すると若干多くなる。一方、全周波数において一定の刻み幅を使用すると、刻み幅は $d\theta/d\omega$ の最大値により決まる。図5の例では、刻み幅は 0.0189 rad/s、応答総数は 1,058 個となる。刻み幅可変の場合と比較すると、両者の比は 0.22 となって計算量は固定の場合の約 22% に減少する。計算時間でも刻み幅固定では約 56 秒であるのに対し、刻み幅可変では約 12 秒となり、高速化されている。なお、刻み幅の決定には約 2 秒必要であった。

〈4・3〉パルス変化の処理 前節では、 $d\theta/d\omega$ を 1 rad/s ごとに求め、その間では単調に変化するとして刻み幅を決定した。しかし、図5には $d\theta/d\omega$ がパルス状に変化する部分が見られる。これは虚軸近くの固有値により生ずるものである (図3参照)。虚軸に近いほどパルスは大きくかつ狭くなり、位相 θ はその近くで急に変化する。しかし、計算効率の点から $d\theta/d\omega$ の形状はおおまかにしか把握されず、パルス状の変化は通常無視される。ここではこの点について考察する。

例として、固有値が図7のように刻み幅を直径とする円内にある場合を考える。同図から明らかなように、位相 θ は ω が $\Delta\omega$ 変化することにより 90° 以上最大 180° 急変化する。一方、刻み幅は θ の変化が各 $\Delta\omega$ でほぼ同じで、 $\Delta\omega$ ごとに最大 120° 定常的に回転することを想定して決められている (図6参照)。よって、該当の $\Delta\omega$ ではこの定常的变化にパルス的变化が重畳することになる。ここで、定常的变化を 120° 、パルスの変化を 90° とすれば、合計 210° の回転が生ずる。ところが、複素平面上では 210° は -150° とも解釈できる。計算では後者の扱いとしており、このままでは回転数に誤差が生ずることになる。

この問題は、現在の $\Delta\omega$ における θ の変化量を、一つ前の $\Delta\omega$ で生じた θ の変化量と比較することにより解消できる。二つの $\Delta\omega$ でともに虚軸の近くに固有値があれば、 θ の変化量はほぼ同じ値となるはずである。変化量が急に変わることは、近くに固有値があることを示す。また、一つ前の変化量を使って θ を予想し、それを中心に応答の位置を調べれば、 θ がどちらに回転するかを知ることができる。これにより、固有値が虚軸のどちら側にあるかも判断できる。

〈4・4〉行列 D に対する刻み幅の緩和 周波数応答は (29) 式のように三つの行列式より成り、その位相

は各行列式の位相の和となる。すなわち、

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \dots\dots\dots(42)$$

ただし、

$$\theta_1 = \angle |A|, \theta_2 = \angle |D'|, \theta_3 = \angle |D|$$

図8に107機系統における各位相の動きを示す。 θ_1 は $\omega=8\sim 12$ rad/sで、 θ_2 は $\omega=8.5$ rad/s前後で大きく変化する。これに対し、 θ_3 は $\omega=3$ rad/sまでに変化がほぼ終了し、その後はあまり変化がない。全体の位相 θ は $\omega=5\sim 10$ rad/sで急に変化するが、この変化も主に θ_1 と θ_2 によるものである。従って、 θ_3 は θ_1 や θ_2 ほど細かく調べる必要がない。

位相 θ_3 を求めるには、行列 D を作成し、更に LU 分解しなければならず、これに対する刻み幅を緩和すれば計算量をかなり削減できる。そこで、 θ のときと同様、1 rad/sごとに $d\theta_3/d\omega$ を求め、その値から各区间における応答数 Δn_3 を決定することにする。すなわち、

$$\Delta n_3 = 12 \max(d\theta_3/d\omega)/2\pi \dots\dots\dots(43)$$

ここでは、 θ_3 の更新による θ の変化を小さくするため、応答数を1回転あたり12個とし、 θ_3 の変化が刻み幅あたり 30° 以下となるようにしている。この手法を107機の系統に適用した結果、 θ_3 を走査した周波数の数は86となった。ただし、 θ_3 に対する刻み幅は、(43)式により定まる値よりも小さく、かつ θ に対する刻み幅の整数倍となるように決めた。 θ_1 、 θ_2 については前節と同じく228点の周波数を走査した。この結果、 LU 分解の数は約69%に減少した。計算時間は θ_3 の刻み幅緩和前は約12秒であったのに対し、緩和後

は約9秒となり、約75%に減少した。 LU 分解の69%に比べて若干大きいのは、 θ_1 の計算その他に時間を要するためである。

5. む す び

本論文では、大規模な電力系統の安定度解析における周波数応答法の高速化について検討した。以下にその結果をまとめる。

(1) 各周波数における応答の計算速度をあげるため、伝達行列 F の行列式を三つの行列式により表し、行列のスパース性を利用して求めることを提案した。

(2) 応答を求める周波数の数を少なくするため、周波数の刻み幅を一つに固定せず、応答の変化速度に応じて変えることを提案した。また、変化の緩やかな行列 D に対しては刻み幅を緩和することを提案した。

(3) 上記の方法を107機の発電機から成る例題系統に適用した結果、前者により応答の計算時間は従来約1/22となり、後者により計算量は約1/6となった。全体の計算時間は、従来法では約21分となるのに対し、本提案法では約9秒となった。従って、本提案法により計算時間は従来約1/137となり、これにより本論文で提案した方法の有効性を確認できる。

(昭和61年12月24日受付、同62年8月20日再受付)

文 献

- (1) M.A. Laughton : *Proc. Instn Elct. Engrs*, 113, 325 (1966)
- (2) J.M. Undrill : *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-87, 835 (1968)
- (3) D.L. Bauer, et al. : *ibid.*, PAS-94, 207 (1975)
- (4) R.T. Byerly, et al. : *ibid.*, PAS-94, 224 (1975)
- (5) S. Okubo, et al. : *ibid.*, PAS-97, 1313 (1978)
- (6) 系統安定化専門委員会 : 「電力系統の安定度」, 電気協同研究, 34, 30 (昭 54-5)
- (7) H. Suzuki, et al. : *Electrical Power & Energy Syst.*, 1, 1, 16 (1979)
- (8) 鈴木・武田・小畑 : 電学論B, 100, 525 (昭 55-9)
- (9) 内田 : 同上B, 100, 389 (昭 55-7)
- (10) R.T. Byerly, et al. : *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-101, 235 (1982)
- (11) 小佐野 : 電気学会電力技術研資, PE-83-48 (昭 58)
- (12) G.N. Zhenenko & A.A. Fouad : *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-103, 715 (1984)
- (13) R.D. Berry : *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-18, 40 (1971)
- (14) 田中・高橋・内田 : 昭 56 電気学会全大, No. 891
- (15) 関根 : 電力系統過渡解析論 (昭 59)
- (16) 垣本・林・大野木 : 電気学会電力技術研資, PE-86-143 (昭 61)

図 8 各成分の回転数 (107 機系)

Fig. 8. The number of rotations of each component (107-machine system).