地中電線路の大地帰路相互インピーダンス の一検討

正 員 松 浦 虔 士 (大阪大)

1. ま え が き

多線条系の地中電線路の伝送特性を解析する場合、対象とする周波数や大地の導電率に応じて、合理的な大地帰路相互インピーダンスを用いる必要がある。従来、架空電線路の大地帰路インピーダンスについては、Carson 氏⁽¹⁾や Pollaczek 氏⁽²⁾の計算式および、それらの計算式よりも高い周波数領域まで使える菊地氏⁽³⁾の計算式があって、伝送特性の解析に適宜利用されている。

一方、地中電線路に関しては、Pollaczek 氏が RGE 誌に発表した論文⁽⁴⁾があるが、彼の導出した大地帰路相互インピーダンスの式は、無限級数の形で表現されている。これは、1926 年当時、現在のような電子計算機がなく、無限積分形の表現よりも手計算の容易な級数形のほうが実用的であったためと思われる。

一方、Wedepohl 氏と Wilcox 氏は、1973 年 Proc. IEE 誌に、変位電流までは考慮しないが、比較的高周波まで使える大地帰路相互インピーダンスの計算式を新しく導出し発表した⁽⁵⁾。この導出では、電界に関する偏微分方程式の解を、地表面での境界条件を満たすように、積分変換によって求めている。しかし、その導出過程における数式や、結果として示している大地帰路相互インピーダンスの計算式の中には多くの印刷ミスが含まれており、不明りょうなものとなっている。彼らの求めた計算式は、本来 10MHz 程度までの周波数領域で使用可能なはずである。事実、Wilcox 氏は別の論文⁽⁶⁾で 1 MHz 以上の周波数領域を扱った解析例を示しているの、そこでは前記の論文⁽⁵⁾での印刷ミスを修正した計算式を使用しているものと思われるが、インピーダンスそのものの計算式は示されていない。

そこで本資料では、実用上必要とされる 10MHz 程度までの大地帰路相互インピーダンス Z_m の計算式を Pollaczek, Wedepohl 氏らとはほぼ同様の仮定の下に導出し直すと共に、使いやすい形に整理することを試みた。また、種々のケーブル布設間隔に対する Z_m の数値計算図表を作成し、実用に資することにした。

2. 基 本 式

図 1 に示すように、大気と接する境界面が無限平面とみなせる大地の中に、角周波数 ω (rad/s) の電流 I (A) の流れる導体 A が x - y 平面に垂直方向に、地表から深さ h (m) のところに埋設されているとする。また導体 A と平行に導体 B が座標 (X, Y) の位置に埋設されており、以下、これらの導体 A, B 間の単位長あたりの大地帰路相互インピーダンス Z_m (Ω /m) を次の仮定のもとに計算する。

- (i) 大地は均質一様とする。
- (ii) 導体内の電流分布に与える大地の影響は無視でき、導体外の場に対しては、導体の中心に線状に全電流 I が流れているものとして扱える。
- (iii) 変位電流は無視する。
- (iv) 導体は大地から絶縁されており、無限に長いものとする。

これらの仮定から、大気中の電界 $E_1(x, y)$ (V/m)

図 1 導体配列

Fig. 1. Conductor configuration.

An Investigation of Mutual Impedance of Underground Transmission Lines with Earth Return. By Kenji Matsuura, Member (Faculty of Engineering, Osaka University).

松浦虔士：正員，大阪大学工学部電気工学科

および地中の電界 $E_2(x, y)$ に関して、次の式が成り立つ (以下、複素数を示す・は省略する)。

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_1}{\partial y^2} = 0 \quad (y \geq 0) \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial y^2} = m_e^2 E_2 + C_0 \frac{m_e^2}{\sigma_e} I \delta(x) \delta(y+h) \quad (y \leq 0) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $m_e = \sqrt{j\omega\mu_e\sigma_e}$ 、 μ_e : 大地透磁率 (H/m)、 σ_e : 大地導電率 (S/m)

また、 C_0 は付録で導出したように、絶縁体の外半径 r_i (m) とすると、 $C_0 = \{m_e r_i K_1(m_e r_i)\}^{-1}$ で計算される定数である。 $K_1(\cdot)$ は一次の第二種変形ベッセル関数である。 δ は Dirack のデルタ関数である。

基本式(1)式と(2)式を次の境界条件のもとで解く。

$$y=0 \text{ で、 } E_1 = E_2 \quad (\text{電界の連続性}) \dots\dots\dots (3)$$

$$y=0 \text{ で、 } \frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{\mu_a}{\mu_e} \frac{\partial E_2}{\partial y} \quad (\text{磁束密度の垂直成分の連続性}) \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 μ_a : 大気透磁率 (H/m)

3. 積分変換による求解

最初に、(2)式の特解 $E_2^{(p)}(x, y)$ をフーリエ変換を用いて求める。

(2)式の両辺を x, y についてフーリエ変換すると、

$$-(v_x^2 + v_y^2) \hat{E}_2 = m_e^2 \hat{E}_2 + C_0 \frac{m_e^2}{\sigma_e} I \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 $\hat{E}_2$ は E_2 のフーリエ変換で、

$$\hat{E}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_2(x, y) e^{-jv_x x} \cdot e^{-jv_y(y+h)} \times dx dy \dots\dots\dots (6)$$

(5)式から

$$\hat{E}_2 = -C_0 \frac{m_e^2}{\sigma_e} \frac{I}{v_x^2 + v_y^2 + m_e^2}$$

であるから、(6)式より、

$$E_2^{(p)}(x, y) = -\frac{C_0 m_e^2 I}{4\pi^2 \sigma_e} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{jv_x x + jv_y(y+h)}}{v_x^2 + v_y^2 + m_e^2} dv_x dv_y \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $v_x = u \cos \theta$ 、 $v_y = u \sin \theta$ とおくと、

$$v_x^2 + v_y^2 = u^2$$

$$\frac{\partial(v_x, v_y)}{\partial(u, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -u \sin \theta \\ \sin \theta & u \cos \theta \end{vmatrix} = u$$

従って、(7)式は

$$E_2^{(p)}(x, y) = -\frac{C_0 m_e^2 I}{4\pi^2 \sigma_e} \int_0^{\infty} u du \times \int_0^{2\pi} \frac{e^{j u r \sin(\theta+\varphi)}}{u^2 + m_e^2} d\theta \dots\dots\dots (8)$$

と表せる。ただし、

$$r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2}, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{x}{y+h}$$

である。

零次の第一種ベッセル関数 $J_0(Z)$ に関する公式⁽⁷⁾、

$$J_0(Z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{-jZ \sin \theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{jZ \sin \theta} d\theta$$

を用いると、(8)式は

$$E_2^{(p)}(x, y) = -\frac{C_0 m_e^2 I}{2\pi \sigma_e} \int_0^{\infty} \frac{u J_0(ur)}{u^2 + m_e^2} du \dots\dots\dots (9)$$

となる。(9)式に零次の第二種変形ベッセル関数 K_0 (ay) に関する次の公式⁽⁷⁾、

$$K_0(ay) = \int_0^{\infty} \frac{x J_0(ax)}{x^2 + y^2} dx \quad (\text{Re } y > 0)$$

をあてはめ、 $a=r$ 、 $y=m_e$ とおくと、

$$E_2^{(p)}(x, y) = -\frac{C_0 m_e^2 I}{2\pi \sigma_e} K_0(m_e r) \dots\dots\dots (10)$$

を得る。

(10)式が(2)式の特解である。その物理的意味は、大地中十分深い位置に電流 I の流れる絶縁された導体が埋設されたときに生ずる大地中の電界を表している。あるいは、変位電流が無視できる領域で周波数が十分高いときに、大地中に埋設されている絶縁された導体の中心に電流 I が流れている場合の該導体近傍の大地中電界とも解釈できる。

次に、(1)式および(2)式の右辺第2項を0とした式の余関数を求める。これらの式をそれぞれ x についてフーリエ変換すると、

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_1}{\partial y^2} - \alpha^2 \hat{E}_1 = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_2}{\partial y^2} - (\alpha^2 + m_e^2) \hat{E}_2 = 0 \dots\dots\dots (12)$$

ただし、

$$\hat{E}_1 = \hat{E}_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} E_1(x, y) e^{-j\alpha x} dx$$

$$\hat{E}_2 = \hat{E}_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} E_2(x, y) e^{-j\alpha x} dx$$

(11), (12)式の解、すなわち余関数 $\hat{E}_1^{(q)}$ 、 $\hat{E}_2^{(q)}$ は次のように表せる。

$$\hat{E}_1^{(q)} = A_1 e^{-|\alpha|y} + B_1 e^{|\alpha|y} \dots (13)$$

$$\hat{E}_2^{(q)} = A_2 e^{-\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}y} + B_2 e^{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}y} \dots (14)$$

ところで、無限遠においては電界は 0 となるべきであるから、 $y \rightarrow +\infty$ で $\hat{E}_1^{(q)} = 0$ 、 $y \rightarrow -\infty$ で $\hat{E}_2^{(p)} + \hat{E}_2^{(q)} = 0$ である。これらの条件から、

$$B_1 = A_2 = 0 \dots (15)$$

従って、

$$\hat{E}_1^{(q)} = A_1 e^{-|\alpha|y} \dots (16)$$

$$\hat{E}_2^{(q)} = B_2 e^{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}y} \dots (17)$$

次に、境界条件の (3)、(4) 式を用いて A_1 と B_2 を決定する。

まず、さきに求めた特解 (10) 式から、

$$\begin{aligned} E_2^{(p)}(x, y) &= D_0 I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\{-|y+h|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2} + jax\}}{2\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} d\alpha \\ &\dots (18) \end{aligned}$$

ここに、

$$D_0 = -\frac{C_0 m_e^2}{2\pi\sigma_e}$$

(18) 式を x についてフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} \hat{E}_2^{(p)}(y) &= D_0 I \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\{-|y+h|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2} + jax\}}{2\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right. \\ &\quad \left. \times d\alpha \right] e^{-j\alpha x} dx \\ &= \pi D_0 I \frac{e^{-|y+h|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \dots (19) \end{aligned}$$

上式を y で偏微分すれば、

$$\frac{\partial \hat{E}_2^{(p)}(y)}{\partial y} = -\pi D_0 I e^{-|y+h|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \dots (20)$$

境界条件の式 (3)、(4) から、

$$\hat{E}_1(0_+) = \hat{E}_2(0_-)$$

$$\frac{\partial \hat{E}_1(0_+)}{\partial y} = \frac{\mu_a}{\mu_e} \frac{\partial \hat{E}_2(0_-)}{\partial y}$$

また、

$$\hat{E}_1(0_+) = \hat{E}_1^{(q)}(0_+)$$

$$\hat{E}_2(0_-) = \hat{E}_2^{(p)}(0_-) + \hat{E}_2^{(q)}(0_-)$$

であるから、(16)、(17)、(19) 式および (20) 式の関係を用いて、上記の条件をあてはめると、

$$\begin{aligned} A_1 &= \pi D_0 I \frac{e^{-h\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} + B_2 \\ -|\alpha|A_1 &= -\pi D_0 I \frac{\mu_a}{\mu_e} e^{-h\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \\ &\quad + \frac{\mu_a}{\mu_e} \sqrt{\alpha^2 + m_e^2} B_2 \end{aligned}$$

上の 2 個の式から、 A_1 と B_2 が次のように決定される。

$$A_1 = \frac{2\pi D_0 I}{|\alpha| + \frac{\mu_a}{\mu_e} \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \frac{\mu_a}{\mu_e} e^{-h\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \dots (21)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\pi D_0 I}{|\alpha| + \frac{\mu_a}{\mu_e} \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \left(\frac{\mu_a}{\mu_e} - \frac{|\alpha|}{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right) \\ &\quad \times e^{-h\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \dots (22) \end{aligned}$$

従って、(16)、(17)、(19) 式から、

$$\hat{E}_1(y) = \frac{2\pi D_0 I}{\frac{\mu_e}{\mu_a} |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} e^{-h\sqrt{\alpha^2 + m_e^2} - |\alpha|y} \dots (23)$$

$$\begin{aligned} \hat{E}_2(y) &= \pi D_0 I \\ &\quad \times \left\{ \frac{e^{-|y+h|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} - \frac{e^{-(h-y)\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2e^{-(h-y)\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\frac{\mu_e}{\mu_a} |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right\} \dots (24) \end{aligned}$$

(23)、(24) 式を逆フーリエ変換すると、解 $E_1(x, y)$ と $E_2(x, y)$ が次のように表せる。

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= D_0 I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\alpha|y - h\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\frac{\mu_e}{\mu_a} |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \\ &\quad \times e^{j\alpha x} d\alpha \dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2(x, y) &= D_0 I \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-|y+h|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{2\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} - \frac{e^{-(h-y)\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{2\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-(h-y)\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{\frac{\mu_e}{\mu_a} |\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right\} e^{j\alpha x} d\alpha \dots (26) \end{aligned}$$

4. 大地帰路相互インピーダンスの計算式

図 1 に示した二つの導体 A, B 間の大地帰路相互インピーダンスを Z_m とすると、

$$Z_m = -\frac{E_2(X, Y)}{I} \dots (27)$$

である。

前章で求めた解 (26) 式を用い、 $\mu_a = \mu_e = \mu_0$ と仮定すれば、 Z_m は次式のように表される。

$$\begin{aligned} Z_m &= \frac{j\omega\mu_0}{2\pi r_i m_e K_1(m_e r_i)} \left\{ K_0(m_e R) \right. \\ &\quad \left. - K_0(m_e R') + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|h-Y|\sqrt{\alpha^2 + m_e^2}}}{|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + m_e^2}} \right. \\ &\quad \left. \times e^{j\alpha X} d\alpha \right\} \dots (28) \end{aligned}$$

ここに,

$$R = \sqrt{X^2 + (h+Y)^2}, \quad R' = \sqrt{X^2 + (h-Y)^2}$$

$K_0(\cdot)$ は零次の第二種変形ベッセル関数で,

$$K_0(m_e R) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|h+Y|\sqrt{\alpha^2+m_e^2}}}{2\sqrt{\alpha^2+m_e^2}} e^{j\alpha X} d\alpha$$

$$K_0(m_e R') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|h-Y|\sqrt{\alpha^2+m_e^2}}}{2\sqrt{\alpha^2+m_e^2}} e^{j\alpha X} d\alpha$$

(28)式の $\{\cdot\}$ の第3項の積分を実行すると,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|h-Y|\sqrt{\alpha^2+m_e^2}}}{|\alpha| + \sqrt{\alpha^2+m_e^2}} e^{j\alpha X} d\alpha \\ &= \frac{2L^2}{R'^2} K_0(m_e R') + \frac{2(L^2 - X^2)}{R'^3 m_e} K_1(m_e R') \\ & \quad - \frac{2(L^2 - X^2)}{R'^4 m_e^2} (1 + m_e L) e^{-m_e L} \\ & \quad + \frac{2L|X|}{R'^2} S(m_e R', |X|, L) \dots\dots(29) \end{aligned}$$

ここに,

$$L = h - Y$$

$K_1(\cdot)$ は、一次の第二種変形ベッセル関数である。

$S(m_e R', |X|, L)$ は、次の(30)式で示すような関数である。

$$\begin{aligned} S(m_e R', |X|, L) &= \frac{L|X|}{R'^2} - m_e R' \left\{ \frac{2}{3} \frac{|X|}{R'} \left(\frac{L}{R'} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{|X|}{R'} \right\} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m_e R')^{2k}}{(2k+2)(2k)!!(2k-1)!!} \\ & \quad \times \left[2 \frac{|X|}{R'} \left(\frac{L}{R'} \right)^{2k+1} + \frac{(2k-1)!!}{(2k-2)!!} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \sum_{\nu=1}^k \frac{(2\nu-2)!!}{(2\nu-1)!!} \frac{|X|}{R'} \left(\frac{L}{R'} \right)^{2\nu-1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \tan^{-1} \frac{|X|}{L} \right\} \right] \\ & \quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(m_e R')^{2k+1}}{(2k+3)(2k+1)!!(2k)!!} \\ & \quad \times \left[2 \frac{|X|}{R'} \left(\frac{L}{R'} \right)^{2k+2} + \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ \sum_{\nu=1}^k \frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \frac{|X|}{R'} \left(\frac{L}{R'} \right)^{2\nu} + \frac{|X|}{R'} \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots(30)$$

ここに,

$$(2k)!! = 2k \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$$

$$(2k-1)!! = (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$$

(29)式の関係を(28)式に代入すると、 Z_m は次のように表される。

$$\begin{aligned} Z_m &= j \frac{\omega \mu_0}{2\pi r_i m_e K_1(m_e r_i)} \left\{ K_0(m_e R) \right. \\ & \quad \left. + \frac{L^2 - X^2}{R'^2} \left\{ K_0(m_e R') + \frac{2}{m_e R'} K_1(m_e R') \right\} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. - \frac{2}{m_e^2 R'^2} (1 + m_e L) e^{-m_e L} \right\} \\ & + \frac{2L|X|}{R'^2} S(m_e R', |X|, L) \dots\dots(31) \end{aligned}$$

(31)式において、 $|m_e r_i| \ll 1$, $|m_e R| \ll 1$ および $|m_e R'| \ll 1$ の場合は、次の近似が適用できる。

$$m_e r_i K_1(m_e r_i) \simeq 1$$

$$K_0(m_e R) \simeq -\ln \frac{\gamma m_e R}{2}$$

$$K_0(m_e R') \simeq -\ln \frac{\gamma m_e R'}{2}$$

$$\frac{K_1(m_e R')}{m_e R'} \simeq \frac{1}{2} \ln \frac{\gamma m_e R'}{2} + \frac{1}{m_e^2 R'^2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{(1 + m_e L) e^{-m_e L}}{m_e^2 R'^2} \simeq \frac{1}{m_e^2 R'^2} - \frac{L^2}{2 R'^2} + \frac{m_e L^3}{3 R'^2}$$

$$S(m_e R', |X|, L) \simeq \frac{|X|L}{R'^2}$$

$$-m_e \left(\frac{2|X|L^2}{3 R'^2} + \frac{|X|}{3} \right)$$

ここに、 $\gamma = 1.7811$ (オイラー定数)

これらの近似が許される条件のもとでは、(31)式の Z_m は次のような簡単な形の式となる。

$$Z_m \simeq j \frac{\omega \mu_0}{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{\gamma m_e R}{2} - \frac{2}{3} m_e L \right) \dots\dots(32)$$

(32)式は、Pollaczek 氏が発表した近似式⁽⁴⁾と完全に一致している。

5. 計算例

前章で導出した(31)式の形から、 A , $B2$ 導体の埋設位置と絶縁半径が与えられれば、 Z_m/ω の値は実部 $\{\text{Re}(Z_m/\omega)\}$ 、虚部 $\{\text{Im}(Z_m/\omega)\}$ とともに周波数 f と大地導電率 σ_e との積 $f\sigma_e$ のみに依存すると言える。

そこで、

$$\begin{aligned} \frac{Z_m}{\omega} &= \text{Re}(Z_m/\omega) + j \text{Im}(Z_m/\omega) \\ &= G + jH \dots\dots(33) \end{aligned}$$

と置き、 G または H と $f\sigma_e$ との関係求めておけば、一般的で実用的な資料として利用できる。

図2は、導体 A および A との間で相互インピーダンスの計算対象となる導体 $B1$, $B2$, ..., $B15$ の埋設位置を示す。 A と BI ($I=1, 2, \dots, 15$) との間の大地帰路相互インピーダンスを Z_{ABI} とし、 Z_{ABI} の計算に必要な X , Y と R , R' および L の値を表1に示した。すべてのケースに対し、 $r_i = 0.05 \text{ m}$ とした。

図3は、 A と BI ($I=1, 2, 3$) とが水平の位置関係にある場合、図4、図5はそれぞれ A に対し BI (I

=4, 5, 6 および 7, 8, 9) が鉛直上方および鉛直下方にある場合の Z_{ABI}/ω 対 $f\sigma_e$ の計算結果を示す。また、図 6, 図 7 は、それぞれ A に対し BI ($I=10, 11, 12$ および 13, 14, 15) が斜め上方および斜め下方にある場合の同様の計算結果を示す。

図 3 から図 7 において、横軸の $f\sigma_e$ の値は 10^5 までとしたが、例えば $\sigma_e=0.01 \text{ S/m}$ のときは、 $f=10^7$

図 2 Z_{ABI} ($I=1, 2, \dots, 15$) 計算用の導体配列

Fig. 2. Configuration for calculation of Z_{ABI} ($I=1, 2, \dots, 15$).

$\text{Hz}=10 \text{ MHz}$ までの大地帰路相互インピーダンスの値がこれらの図から求められる。

図 3～図 7 までの計算結果から、A に対する BI の位置が、水平、鉛直、斜めのいずれの方向にあっても大地帰路相互インピーダンスの値は、A と BI 間の距離 R が同じであれば、実用上はほぼ同値と言える。

図 8 は、A と BI とが水平の位置関係にある $I=1, 2, 3$ のケースについて、 $f\sigma_e$ の値をパラメータとし、 Z_{ABI}/ω をベクトル $G_{ABI} + jH_{ABI}$ の先端の軌跡として示した図である。これは図 3 の結果を別の形で表現したものにすぎないが、 $f\sigma_e$ が変化するとき G_{ABI} よりも H_{ABI} のほうが、はるかに敏感に変化することを明らかに示している。

本資料では、大地中での電界に関する偏微分方程式を (2) 式の形とし Z_m を求めたが、その際、付録に示したように、 $C_0 = \{m_i r_i K_1(m_i r_i)\}^{-1}$ とした。従って、本資料で求めた Z_m [(31) 式] は、ケーブル絶縁外半径 r_i に依存する形となった。Pollaczek 氏⁽⁴⁾ および Wedepohl 氏⁽⁵⁾ の基本式は、 $C_0=1$ の場合に相当する。これは、 $r_i \rightarrow 0$ の極限の場合を扱ったことになり、彼らの求めた Z_m の計算式の中には r_i が含まれていない。そこで、本資料の (31) 式の Z_m の r_i 依存性を調べた。

図 9 は、通常のケーブルで考えられる $0 < r_i \leq 0.075 \text{ m}$ の範囲で、 G_{AB2} と H_{AB2} が $f\sigma_e=10^{-1}, 10^2, 10^5$ の各場合でどのように変化するかを示したものである。同図の縦軸の値は、 $r_i \rightarrow 0$ ($C_0=1$) の場合の G_{AB2} , H_{AB2} の値を基準とした相対値で表している。図 9 の

表 1 計算したケース

Table 1. Cases of numerical calculations.

導体 A に対する導体 BI の位置	相互インピーダンスの記号	導体 BI の座標		導体 A と BI 間の距離 $R = \sqrt{X^2 + (Y+h)^2}$	$R' = \sqrt{X^2 + (Y-h)^2}$	導体 A と BI の埋設深さの和 $L = h - Y$
		X	Y			
水 平	Z_{AB1}	0.1	-1.5	0.100	3.002	3.000
	Z_{AB2}	0.3	-1.5	0.300	3.015	3.000
	Z_{AB3}	0.5	-1.5	0.500	3.041	3.000
鉛 直 上 方	Z_{AB4}	0.0	-1.4	0.100	2.900	2.900
	Z_{AB5}	0.0	-1.2	0.300	2.700	2.700
	Z_{AB6}	0.0	-1.0	0.500	2.500	2.500
鉛 直 下 方	Z_{AB7}	0.0	-1.6	0.100	3.100	3.100
	Z_{AB8}	0.0	-1.8	0.300	3.300	3.300
	Z_{AB9}	0.0	-2.0	0.500	3.500	3.500
斜 め 上 方	Z_{AB10}	0.1	-1.4	0.141	2.902	2.900
	Z_{AB11}	0.3	-1.2	0.424	2.717	2.700
	Z_{AB12}	0.5	-1.0	0.707	2.550	2.500
斜 め 下 方	Z_{AB13}	-0.1	-1.6	0.141	3.102	3.100
	Z_{AB14}	-0.3	-1.8	0.424	3.314	3.300
	Z_{AB15}	-0.5	-2.0	0.707	3.536	3.500

(数字の単位は m, $h=1.5 \text{ m}$, $r_i=0.05 \text{ m}$)

図 3 $Z_{ABI}/\omega (=G_{ABI}+jH_{ABI})$ と $f\sigma_e$ の関係 ($I=1, 2, 3$)

Fig. 3. $Z_{ABI}/\omega (=G_{ABI}+jH_{ABI})$ vs. $f\sigma_e$ ($I=1, 2, 3$).

図 4 $Z_{ABI}/\omega (=G_{ABI}+jH_{ABI})$ と $f\sigma_e$ の関係 ($I=4, 5, 6$)

Fig. 4. $Z_{ABI}/\omega (=G_{ABI}+jH_{ABI})$ vs. $f\sigma_e$ ($I=4, 5, 6$).

図 5 $Z_{ABI}/\omega (=G_{ABI}+jH_{ABI})$ と $f\sigma_e$ の関係 ($I=7, 8, 9$)

Fig. 5. $Z_{ABI}/\omega (=G_{ABI}+jH_{ABI})$ vs. $f\sigma_e$ ($I=7, 8, 9$).

結果は、 $0 < r_i \leq 0.075$ m の範囲では、 $C_0=1$ の場合 ($r_i \rightarrow 0$) との差が最も大となる $f\sigma_e=10^5$ のときでも、 Z_m の実部、虚部ともその差は $\pm 1\%$ 以内にあるこ

とを示している。このことは、(2)式において、Pollaczek 氏や Wodepohl 氏らのように、 $C_0=1$ としても実用上何ら問題ないことを意味している。

図 6 $Z_{AB1}/\omega (=G_{AB1}+jH_{AB1})$ と $f\sigma_e$ の関係 ($I=10, 11, 12$)

Fig. 6. $Z_{AB1}/\omega (=G_{AB1}+jH_{AB1})$ vs. $f\sigma_e$ ($I=10, 11, 12$).

図 7 $Z_{AB1}/\omega (=G_{AB1}+jH_{AB1})$ と $f\sigma_e$ の関係 ($I=13, 14, 15$)

Fig. 7. $Z_{AB1}/\omega (=G_{AB1}+jH_{AB1})$ vs. $f\sigma_e$ ($I=13, 14, 15$).

図 8 $G_{AB1}+jH_{AB1}$ の先端軌跡

Fig. 8. Loci of $G_{AB1}+jH_{AB1}$.

図 9 $Z_{AB2}/\omega (=G_{AB2}+jH_{AB2})$ に与える絶縁半径 r_i の影響

Fig. 9. Effect of radius of insulation layer r_i on $Z_{AB2}/\omega (=G_{AB2}+jH_{AB2})$.

6. む す び

地中に埋設された2導体間の大地帰路相互インピーダンス Z_m の周波数依存性を、 Z_m/ω ($\omega=2\pi f$) を周波数 f (Hz) と大地導電率 σ_e (S/m) との積 $f\sigma_e$ のみの関数で表し、一般性のある形式で求めた。

本論文で導出したこのような形式の計算式は、変位電流が無視できる範囲 ($\sim f\sigma_e < 10^5$) で使える。種々のケーブル布設間隔に対し、 Z_m/ω の実部と虚部の値を $0.1 \leq f\sigma_e \leq 10^5$ の範囲で計算し、図表で示した。このような Z_m の計算式と計算結果は、多線条系の地中電線路の商用周波数からサージ領域にいたる過渡現象の解析に寄与できるものと確信する。

(昭和61年10月13日受付)

文 献

- (1) J.R. Carson: "Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return", *Bell Syst. Tech. J.*, 5, 539 (1926)
- (2) F. Pollaczek: "Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung", *Elektr. Nachr. Tech.*, 3, 339 (1926)
- (3) 菊地: 「高周波における大地帰路回路について」, 電学誌, 75, 1176 (昭30-)
- (4) F. Pollaczek: "Sur le champ produit par un conducteur simple infiniment long parcouru par un courant alternatif", *Rev. Gén. Elect.*, XXIX, 851 (1931)
- (5) L.M. Wedepohl & D.J. Wilcox: "Estimation of transient sheath overvoltages in power-cable transmission systems", *Proc. Instn. Elect. Engrs.*, 120, 877 (1973)
- (6) D.J. Wilcox & K.J. Lawler: "Transient phenomena in crossbonded cable systems: analytical results", *ibid.*, 125, 999 (1978)
- (7) 日本数学会編: 数学辞典(第三版)(昭60) 岩波書店

付 録

本文(2)式の中の C_0 について

第3章で求めた大地中の電界の計算式[(26)式]および第4章に示した(29)式の関係を用いて、図1の導体Aの絶縁体直上の y 軸上の点 $(0, -h+r_i)$ における電界 $E_2(0, -h+r_i)$ を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E_2(0, -h+r_i) &= D_0 I \left[K_0(m_e r_i) + K_0\{m_e(2h-r_i)\} \right. \\ &\quad + \frac{2}{(2h-r_i)} K_1\{m_e(2h-r_i)\} \\ &\quad \left. - \frac{2(1+2hm_e-m_e r_i)}{(2h-r_i)^2 m_e^2} e^{-m_e(2h-r_i)} \right] \quad \text{.....(付1)} \end{aligned}$$

(付1)式で h が極めて大きい場合、すなわち導体Aが大地中極めて深く埋設されている極限を考えると、右辺〔〕内の第2項以下は0に収束する。

この場合、 $h \rightarrow h_\infty$ と記すと、

$$E_2(0, -h_\infty+r_i) = D_0 I K_0(m_e r_i) \quad \text{.....(付2)}$$

一方、導体Aが最初から大地中極めて深い極限に埋設されている場合を考えると、導体Aの中心から距離 r のところの地中電界 $E(r)$ に関して次の関係が成り立つ。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) = m_e^2 E \quad \text{.....(付3)}$$

(付3)式の一般解は、 A_1, B_1 を定数として、

$$E = A_1 I_0(m_e r) + B_1 K_0(m_e r) \quad \text{.....(付4)}$$

と表せる。

$r \rightarrow \infty$ で $E=0$ であるから、 $A_1=0$ である。

次に、電界 E と磁束密度 B の関係、 $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$ から、

$$\frac{\partial E}{\partial r} = j\omega B \quad \text{.....(付5)}$$

$r=r_i$ において、

$$B = \frac{\mu_e I}{2\pi r_i} \quad \text{.....(付6)}$$

である。(付4)、(付5)式から

$$B_1 \left[\frac{\partial K_0(m_e r)}{\partial r} \right]_{r=r_i} = j\omega \frac{\mu_e}{2\pi r_i} I \quad \text{.....(付7)}$$

ところで

$$\frac{\partial K_0(m_e r)}{\partial r} = m_e \frac{\partial K_0(m_e r)}{\partial(m_e r)} = -m_e K_1(m_e r)$$

という関係があるから、(付7)式より

$$B_1 = -\frac{j\omega \mu_e I}{2\pi m_e r_i K_1(m_e r_i)} \quad \text{.....(付8)}$$

(付4)、(付8)両式から

$$E(r_i) = -\frac{j\omega \mu_e K_0(m_e r_i)}{2\pi m_e r_i K_1(m_e r_i)} I \quad \text{.....(付9)}$$

(付9)式の $E(r_i)$ と(付2)式の $E_2(0, -h_\infty+r_i)$ は等しいはずであるから、

$$D_0 = -\frac{j\omega \mu_e}{2\pi m_e r_i K_1(m_e r_i)} \quad \text{.....(付10)}$$

本文(18)式のところで定義したように、 D_0 と C_0 の間には、 $D_0 = -(C_0 m_e^2) / (2\pi \sigma_e)$ の関係がある。このことと(付10)式から、 C_0 は次のように決定される。

$$C_0 = \frac{1}{m_e r_i K_1(m_e r_i)} \quad \text{.....(付11)}$$