多層大地における棒状電極の接地抵抗の解析

正員 高橋 健彦 (千葉大)

正員 川瀬 太郎 (千葉大)

1. ま え が き

近年、電気設備のコンパクト化に伴い、接地施工のための敷地が制限され接地設計が困難になってきている。それに加え、FA, BA, OA 化に伴い電気・電子・通信設備機器に対する感電防止はもとより、安定な稼動を保証するための良質な接地が要求されている。このような状況のもとで、従来から行われている接地設計について見直すことの必要が生じてきている⁽¹⁾。

前述のように敷地が制限され、かつ良質の接地抵抗を要求されている場合、接地電極は大地に対して鉛直方向に布設せざるを得ない状況にある。つまり、接地電極に棒状電極を用い、地中深く打込む、いわゆる深打工法を選ぶことである。この工法は大地をボーリングして、その穴に電極（本論文ではボーリング電極と称す）を埋設するものであり、非常に大掛りになる。従って、接地設計の段階における接地抵抗の予測は大きな関心事である。棒状電極の接地抵抗計算は基本的には大地を均質かつ等方性とみなして行われてきている。Tagg の成書によると、大地を二層構造とみなして計算式を導出しているが、それ以上の多層構造については検討されていない⁽²⁾。実際の大地は複雑な地層構造を成しているため、単に均質あるいは二層構造とみなして接地抵抗を計算することは精度的に問題があると思われる。

雷インパルス問題や誘導雑音問題などを含む接地に関する論文では、接地抵抗ではなく接地インピーダンスとして取扱っている⁽³⁾⁽⁴⁾。保安用接地において、それが商用周波数帯域であっても接地抵抗を計算する場合は、厳密には接地インピーダンスを考慮しなければ

ならない⁽⁴⁾。しかし、本論文においては原理に基づいた考えとして、接地抵抗は直流抵抗とみなすことのできる低周波数を対象とする。更に、棒状電極の表面ではすべて等電位であるとみなして、電極の内部インピーダンスは無視することとする。また、各地層においては棒状電極は点電流源の集合体とみなすこととする。以下に述べる内容においては、これらの仮定のもとに接地抵抗の解析を行うことにする。

著者らは大地を水平多層構造とみなした場合の棒状電極の接地抵抗を上述の仮定のもとで理論的に解析し、多層問題における接地抵抗計算式を導出した。更に、コンピュータによる数値計算を試み、多層構造大地における接地抵抗の様相を調べた。本論文は従来まで得られている棒状電極の接地抵抗の二層問題を拡張して多層問題に適用できる計算式を示し、数値例によって多層大地における接地抵抗の特性を検討したものである⁽⁵⁾。

2. 問題の設定と電位の一般解

〈2・1〉 基本式 地中の任意の点における電位は、一般に次のように表現される。図1に示すように、大地が均質かつ等方性の大地抵抗率（以下、 ρ と略記）をもち、地中に電流源 I_0 が存在するとき、電流源から半径 s の球面状における電流密度は

図1 地中における電位

Fig. 1. Potential at any points in the earth.

The Analysis of Earth Resistance for the Deep Driven Rod in the Multi-Layered Earth. By Takehiko Takahashi, Member & Taro Kawase, Member (Faculty of Engineering, Chiba University).

高橋健彦：正員，千葉大学工学部電気工学科
川瀬太郎：正員，千葉大学工学部電気工学科

$$i = \frac{I_0}{4\pi s^2} \quad (1)$$

となり、球面状の電界は

$$E = \rho i \quad (2)$$

であるから、地中における電位は

$$-\text{grad } V = \frac{\rho I_0}{4\pi s^2} \quad (3)$$

従って、地中の任意の点における電位は

$$V = \frac{\rho I_0}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (4)$$

と表される。ここで、 $J_0(xr)$ は零次の第一種ベッセル関数である。

〈2・2〉 水平二層大地モデル⁽²⁾ 第 m 層の地中に電流源 I_m を想定する。地表面から t の深さに円筒座標系の原点 0 を設定 ($z = -t$) し、大地抵抗率が ρ_m であるとき、電位 V_0 は (4) 式より

$$V_0 = \frac{\rho_m I_m}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (5)$$

となる。これは、大地が ρ_m で均質である場合の電位である。ところが、図 2 に示すような水平二層大地 (上層が ρ_1 、下層が ρ_2) の場合、電位は他の地層の影響を受け、次のように表される。

(1) 電流源が上層に存在する場合 図 2 に示すように、上層の電流源を I_1 、上層の電位を V_{11} 、下層の電位を V_{12} とすると次式を得る。

$$V_{11} = V_0 + \frac{\rho_1 I_1}{4\pi} \int_0^\infty \{\phi_{11}(\lambda) e^{-\lambda z} + \Psi_{11}(\lambda) e^{\lambda z}\} J_0(\lambda x) d\lambda \quad (6)$$

$$V_{12} = \frac{\rho_1 I_1}{4\pi} \int_0^\infty \{\phi_{12}(\lambda) e^{-\lambda z} + \Psi_{12}(\lambda) e^{\lambda z}\} J_0(\lambda x) d\lambda \quad (7)$$

ここで、

$$V_0 = \frac{\rho_1 I_1}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda x) d\lambda$$

図 2 二層大地モデル

Fig. 2. Theoretical model for two-layered earth.

これらの式で z 軸は原点から下向きの場合を正、上向きの場合を負とする。

(6), (7) 式の未知関数 $\phi_{11}(\lambda)$, $\phi_{12}(\lambda)$, $\Psi_{11}(\lambda)$, $\Psi_{12}(\lambda)$ は次に示す境界条件により決定される。

(i) $z \rightarrow \infty$ では $V_{12} \rightarrow 0$

(ii) $z = -t$ では $\partial V_{11} / \partial z = 0$

(iii) $z = h - t$ では $V_{11} = V_{12}$

(iv) $z = h - t$ では $\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial V_{11}}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial V_{12}}{\partial z}$

これらの条件により未知関数を解き整理すると、 V_{11} は次式で表される。

$$V_{11} = \frac{\rho_1 I_1}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ e^{-\lambda|z|} + \frac{e^{-2\lambda t} + k_1 e^{-2\lambda h}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h}} e^{-\lambda z} + k_1 \frac{e^{-2\lambda h} + e^{-2\lambda(h-t)}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h}} e^{\lambda z} \right\} J_0(\lambda x) d\lambda \quad (8)$$

ただし、 k_1 は第一層と第二層の地層の境界面における反射率であり、次式で表される。

$$k_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

反射率 k は大地が不均質である場合、地層の境界面における接地電流の流れ具合を表す指数である。一般に、上層の大地抵抗率を ρ_i 、下層を ρ_{i+1} としたとき、反射率は次式で表される。

$$k_i = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_{i+1} + \rho_i}$$

この k_i の値は ρ_i と ρ_{i+1} の大小関係に応じて $-1 \leq k_i \leq 1$ の範囲にある。上層の ρ_i が下層に比べて大きい場合は k は 0 と 1 の間の値をとり、下層の ρ_{i+1} が非常に大きい場合 ($\rho_{i+1} \rightarrow \infty$) は $k=1$ になる。その逆の場合は k は 0 と -1 の間の値をとり、下層の ρ_{i+1} が非常に小さい場合 ($\rho_{i+1} \rightarrow 0$) は $k=-1$ になる。

地表面の電位は $z = -t$ を代入すれば次式になる。

$$V_1 = \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} + k_1 e^{-2\lambda h} e^{\lambda t}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda x) d\lambda \quad (9)$$

(2) 電流源が下層に存在する場合 図 2 に示すように、地表面から t の深さに原点 0 を設定し (図中では破線で表す)、電流源を I_2 、上層の電位を V_{21} 、下層の電位を V_{22} とすると次式の関係になる。

$$V_{21} = \frac{\rho_2 I_2}{4\pi} \int_0^\infty \{\phi_{21}(\lambda) e^{-\lambda z} + \Psi_{21}(\lambda) e^{\lambda z}\} J_0(\lambda x) d\lambda \quad (10)$$

$$V_{22} = V_0 + \frac{\rho_2 I_2}{4\pi} \int_0^\infty \{\phi_{22}(\lambda) e^{-\lambda z} + \Psi_{22}(\lambda) e^{\lambda z}\} J_0(\lambda x) d\lambda \quad (11)$$

ここで、

$$V_0 = \frac{\rho_2 I_2}{4\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda x) d\lambda$$

(1) 項に示したと同様な境界条件により未知関数を決定し、 V_{21} を求め、それに $z=-t$ を代入し整理すると地表面の電位は次式になる。

$$V_2 = \frac{\rho_2 I_2}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(1-k_1)e^{-\lambda t}}{1-k_1 e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda x) d\lambda \dots\dots (12)$$

以上に示した電位は微小電流源に対するものである。これを棒状電極に適用するには式中の x を電極半径 a とし、深さ t 方向に電極長 l で積分することによって電極表面の電位を求めることができる。水平二層大地における棒状電極の作る電位 $V_2(x)$ は次式になる。

$$\begin{aligned} V_2(x) &= \int_0^h V_1 dt + \int_h^l V_2 dt \\ &= \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \left[\int_0^h \frac{e^{-\lambda t} + k_1 e^{-2\lambda h} e^{\lambda t}}{1-k_1 e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right. \\ &\quad \left. + (1-k_1) \int_h^l \frac{e^{-\lambda t}}{1-k_1 e^{-2\lambda h}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right] \dots\dots (13) \end{aligned}$$

ここで、 $\rho_1 I_1 = \rho_2 I_2$ (〈2・5〉節参照)

〈2・3〉 水平三～五層大地モデル 前節で述べた二層大地モデルを拡張して図3に示す水平三、五層大地モデルを設定する。電位の一般解を求めるには、電流源が存在する地層の電位と、他の地層の影響に対する修正項の電位を加え合せることによって得られる。また、境界条件である (i) 無限下限では電位が零に等しい、(ii) 地表面を通過する電流は零、(iii) 地層の境界面においては電位が相等、(iv) 地層の境界面において

図3 三、五層大地モデル

Fig. 3. Theoretical model for three, five-layered earth.

は電流は連続、という基本事項によって未知関数を決定する必要がある。この場合、目的は地表面における電極表面の電位を求めることである。計算する過程ではすべての未知関数が必要であるが、最終的には第一層目に関する電位式の未知関数を決定するだけでよい。

さて、以上のことをふまえて電位の方程式から境界条件を用いて解き、第一層目の電位式に含まれる未知関数を決定すると表1ようになる。

(1) 三層大地モデルの電位 図3に示すモデルにおいて、各地層の厚さを h_i 、大地抵抗率を ρ_i 、地層に存在する電流源を I_i としたとき電位の方程式を作り、境界条件によって未知関数を求める。表1に示した未知関数を用いて式を整理すると次式を得る。

$$V_1 = V_{11|z=-t} = \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha_{31} e^{-\lambda t} + \beta_{31} e^{-2\lambda h_1} e^{\lambda t}}{\alpha_{31} - \beta_{31} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda \dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= V_{21|z=-t} = \frac{\rho_2 I_2}{2\pi} (1-k_1) \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} + k_2 e^{-2\lambda H_2} e^{\lambda t}}{\alpha_{31} - \beta_{31} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda \dots\dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= V_{31|z=-t} = \frac{\rho_3 I_3}{2\pi} (1-k_1)(1-k_2) \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\alpha_{31} - \beta_{31} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda \dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここで、 $H_2 = h_1 + h_2$

従って、水平三層大地における棒状電極の作る電位 $V_3(x)$ は次式に (14)～(16) 式を代入して得られる。

$$V_3(x) = \int_0^{h_1} V_1 dt + \int_{h_1}^{H_2} V_2 dt + \int_{H_2}^l V_3 dt \dots\dots (17)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} V_3(x) &= \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \left[\int_0^{h_1} \int_0^\infty \frac{\alpha_{31} e^{-\lambda t} + \beta_{31} e^{-2\lambda h_1} e^{\lambda t}}{\alpha_{31} - \beta_{31} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right. \\ &\quad \left. + (1-k_1) \int_{h_1}^{H_2} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} + k_2 e^{-2\lambda H_2} e^{\lambda t}}{\alpha_{31} - \beta_{31} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right. \\ &\quad \left. + (1-k_1)(1-k_2) \int_{H_2}^l \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\alpha_{31} - \beta_{31} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right] \dots\dots (18) \end{aligned}$$

(2) 五層大地モデルの電位 図3に示すモデルを用いて、三層の場合と同様にして各独立電位 $V_1, V_2, \dots, V_5$ を求め整理すると、水平五層大地における棒状電極の作る電位 $V_5(x)$ は次のようになる。

表 1 未知関数 $\phi_{(\lambda)}$, $\psi_{(\lambda)}$ Table 1. Values of the functions $\phi_{(\lambda)}$, $\psi_{(\lambda)}$.

	三 層	四 層	五 層
$\phi_{11}(\lambda)$	$\frac{e^{-2\lambda t} + K_{31} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_1}}$	$\frac{e^{-2\lambda t} + K_{41} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_1}}$	$\frac{e^{-2\lambda t} + K_{51} e^{-2\lambda h_1}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_1}}$
$\phi_{21}(\lambda)$	$\frac{1 - K_{31}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_1}} \frac{e^{-2\lambda t} + k_2 e^{-2\lambda(h_1+h_2)}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_2}}$	$\frac{1 - K_{41}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_1}} \frac{e^{-2\lambda t} + K_{42} e^{-2\lambda(h_1+h_2)}}{1 - K_{42} e^{-2\lambda h_2}}$	$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_1}} \frac{e^{-2\lambda t} + K_{52} e^{-2\lambda(h_1+h_2)}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}}$
$\phi_{31}(\lambda)$	$\frac{1 - K_{31}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_1}} \frac{(1 - k_2) e^{-2\lambda t}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_2}}$	$\frac{1 - K_{41}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_1}} \frac{1 - K_{42}}{1 - K_{42} e^{-2\lambda h_2}} \times \frac{e^{-2\lambda t} + k_2 e^{-2\lambda(h_1+h_2+h_3)}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_3}}$	$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_1}} \frac{1 - K_{52}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}} \times \frac{e^{-2\lambda t} + K_{53} e^{-2\lambda(h_1+h_2+h_3)}}{1 - K_{53} e^{-2\lambda h_3}}$
$\phi_{41}(\lambda)$		$\frac{1 - K_{41}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_1}} \frac{1 - K_{42}}{1 - K_{42} e^{-2\lambda h_2}} \frac{(1 - k_2) e^{-2\lambda t}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_3}}$	$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_1}} \frac{1 - K_{52}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{53}}{1 - K_{53} e^{-2\lambda h_3}} \times \frac{e^{-2\lambda t} + K_{54} e^{-2\lambda(h_1+h_2+h_3+h_4)}}{1 - K_{54} e^{-2\lambda h_4}}$
$\phi_{51}(\lambda)$			$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_1}} \frac{1 - K_{52}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{53}}{1 - K_{53} e^{-2\lambda h_3}} \frac{(1 - k_4) e^{-2\lambda t}}{1 - k_4 e^{-2\lambda h_4}}$
$\psi_{11}(\lambda)$	$\frac{e^{-2\lambda h_1} + e^{-2\lambda(h_1-t)}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_2}} K_{31}$	$\frac{e^{-2\lambda h_1} + e^{-2\lambda(h_1-t)}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_2}} K_{41}$	$\frac{e^{-2\lambda h_1} + e^{-2\lambda(h_1-t)}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_2}} K_{51}$
$\psi_{21}(\lambda)$	$\frac{1 - K_{31}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 + k_2 e^{-2\lambda(h_1+h_2)}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_2}}$	$\frac{1 - K_{41}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 + K_{42} e^{-2\lambda(h_1+h_2-t)}}{1 - K_{42} e^{-2\lambda h_2}}$	$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 + K_{52} e^{-2\lambda(h_1+h_2-t)}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}}$
$\psi_{31}(\lambda)$	$\frac{1 - K_{31}}{1 - K_{31} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - k_2}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_2}}$	$\frac{1 - K_{41}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{42}}{1 - K_{42} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 + k_2 e^{-2\lambda(h_1+h_2+h_3-t)}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_3}}$	$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{52}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 + K_{53} e^{-2\lambda(h_1+h_2+h_3-t)}}{1 - K_{53} e^{-2\lambda h_3}}$
$\psi_{41}(\lambda)$		$\frac{1 - K_{41}}{1 - K_{41} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{42}}{1 - K_{42} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - k_2}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_3}}$	$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{52}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{53}}{1 - K_{53} e^{-2\lambda h_3}} \times \frac{1 + k_2 e^{-2\lambda(h_1+h_2+h_3+h_4-t)}}{1 - k_2 e^{-2\lambda h_4}}$
$\psi_{51}(\lambda)$			$\frac{1 - K_{51}}{1 - K_{51} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{52}}{1 - K_{52} e^{-2\lambda h_2}} \frac{1 - K_{53}}{1 - K_{53} e^{-2\lambda h_3}} \frac{1 - k_4}{1 - k_4 e^{-2\lambda h_4}}$

表中の k_{NS} は次式で表す。

$$K_{31} = \frac{k_1 + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 k_2 e^{-2\lambda h_2}} = \frac{\beta_{31}}{\alpha_{31}} \quad K_{41} = \frac{k_1 + K_{42} e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 K_{42} e^{-2\lambda h_2}} = \frac{\alpha_{42} k_1 + \beta_{42} e^{-2\lambda h_2}}{\alpha_{42} + k_1 \beta_{42} e^{-2\lambda h_2}} = \frac{\beta_{41}}{\alpha_{41}} \quad K_{42} = \frac{k_2 + k_3 e^{-2\lambda h_3}}{1 + k_2 k_3 e^{-2\lambda h_3}} = \frac{\beta_{42}}{\alpha_{42}}$$

$$K_{51} = \frac{k_1 + K_{52} e^{-2\lambda h_2}}{1 + k_1 K_{52} e^{-2\lambda h_2}} = \frac{\alpha_{52} k_1 + \beta_{52} e^{-2\lambda h_2}}{\alpha_{52} + k_1 \beta_{52} e^{-2\lambda h_2}} = \frac{\beta_{51}}{\alpha_{51}} \quad K_{52} = \frac{k_2 + K_{53} e^{-2\lambda h_3}}{1 + k_2 K_{53} e^{-2\lambda h_3}} = \frac{\alpha_{53} k_2 + \beta_{53} e^{-2\lambda h_3}}{\alpha_{53} + k_2 \beta_{53} e^{-2\lambda h_3}} = \frac{\beta_{52}}{\alpha_{52}} \quad K_{53} = \frac{k_3 + k_4 e^{-2\lambda h_4}}{1 + k_3 k_4 e^{-2\lambda h_4}} = \frac{\beta_{53}}{\alpha_{53}}$$

$$V_5(x) = \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \left\{ \int_0^{h_1} \int_0^\infty \frac{\alpha_{51} e^{-\lambda t} + \beta_{51} e^{-2\lambda h_1} e^{\lambda t}}{\alpha_{51} - \beta_{51} e^{-2\lambda h_1}} \times J_0(\lambda x) d\lambda dt + (1 - k_1) \times \int_{h_1}^{H_2} \int_0^\infty \frac{\alpha_{52} e^{-\lambda t} + \beta_{52} e^{-2\lambda H_2} e^{\lambda t}}{\alpha_{51} - \beta_{51} e^{-2\lambda h_1}} \times J_0(\lambda x) d\lambda dt + (1 - k_1)(1 - k_2) \times \int_{H_2}^{H_3} \int_0^\infty \frac{\alpha_{53} e^{-\lambda t} + \beta_{53} e^{-2\lambda H_3} e^{\lambda t}}{\alpha_{51} - \beta_{51} e^{-2\lambda h_1}} \times J_0(\lambda x) d\lambda dt + (1 - k_1)(1 - k_2)(1 - k_3) \times \int_{H_3}^{H_4} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} + k_4 e^{-2\lambda H_4} e^{\lambda t}}{\alpha_{51} - \beta_{51} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda dt + (1 - k_1)(1 - k_2)(1 - k_3)(1 - k_4) \times \int_{H_4}^l \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{\alpha_{51} - \beta_{51} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right\} \quad (19)$$

$$\text{ここで, } H_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad k_i = (\rho_{i+1} - \rho_i) / (\rho_{i+1} + \rho_i)$$

電位式を検証するにあたり、例えば三層を二層問題に置き換えた場合について試みた。方法は第一層と第二層を同一地層にする場合と、第二層と第三層を同一

地層にする場合が考えられる。前者は $\rho_1 = \rho_2$ とすると $k_1 = 0$ であり、 $\alpha_{31} = 1$, $\beta_{31} = k_2 e^{-2\lambda h_2}$ となり、これらを (14), (15) 式に代入した結果 $V_1 = V_2$ となる。後者は $\rho_2 = \rho_3$ とすると、 $\alpha_{31} = 1$, $\beta_{31} = k_1$ となり、(15), (16) 式に代入した結果 $V_2 = V_3$ となる。すなわち、二層問題になることが確認された。

これらの検証は次に述べる N 層問題でも同様にを行い、導出した式の確認をした。

〈2・4〉 水平 N 層大地モデル 図 4 に示すような水平 N 層大地モデルを仮定する。電流源が各地層に存在する場合、電位の一般解は次のように表される。

- ① I_1 による電位: $V_{11}, V_{12}, \dots, V_{1N}$
- ② I_2 による電位: $V_{21}, V_{22}, \dots, V_{2N}$
- $\vdots$
- ⑨ I_N による電位: $V_{N1}, V_{N2}, \dots, V_{NN}$

①の場合

$$V_{11} = V_0 + \frac{\rho_1 I_1}{4\pi} \int_0^\infty \{ \phi_{11(\lambda)} e^{-\lambda z} + \psi_{11(\lambda)} e^{\lambda z} \} \times J_0(\lambda x) d\lambda \quad (20)$$

$$V_{1N} = \frac{\rho_1 I_1}{4\pi} \int_0^\infty \{ \phi_{1N(\lambda)} e^{-\lambda z} + \psi_{1N(\lambda)} e^{\lambda z} \}$$

図 4 N 層大地モデル

Fig. 4. Theoretical model for multi-layered earth.

$$\times J_0(\lambda x) d\lambda \dots \dots \dots (21)$$

⑨の場合

$$V_{N1} = \frac{\rho_N I_N}{4\pi} \int_0^\infty \{ \phi_{N1(\lambda)} e^{-\lambda z} + \Psi_{N1(\lambda)} e^{\lambda z} \} \times J_0(\lambda x) d\lambda \dots \dots \dots (22)$$

$$V_{N2} = \frac{\rho_N I_N}{4\pi} \int_0^\infty \{ \phi_{N2(\lambda)} e^{-\lambda z} + \Psi_{N2(\lambda)} e^{\lambda z} \} \times J_0(\lambda x) d\lambda \dots \dots \dots (23)$$

$$\vdots$$

$$V_{NN} = V_0 + \frac{\rho_N I_N}{4\pi} \int_0^\infty \{ \phi_{NN(\lambda)} e^{-\lambda z} + \Psi_{NN(\lambda)} e^{\lambda z} \} \times J_0(\lambda x) d\lambda \dots \dots \dots (24)$$

上述の式中、未知関数は前述したような 4 種類の境界条件を用いて決定する。未知関数が n 個あれば n 元の方程式で決定されることは自明である。

境界条件により求めた第一層目に関する未知関数 ($\phi_{11}, \dots, \phi_{1N}, \Psi_{11}, \dots, \Psi_{1N}$) を用い、地表面 ($z = -l$) の各独立電位 ($V_1 = V_{11|z=-l}, \dots, V_N = V_{N1|z=-l}$) を整理すると次式になる。

$$V_1 = \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha_{N1} e^{-\lambda l} + \beta_{N1} e^{-2\lambda h_2} e^{\lambda l}}{\alpha_{N1} - \beta_{N1} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda \dots \dots \dots (25)$$

$$\vdots$$

$$V_N = \frac{\rho_N I_N}{2\pi} (1-k_1)(1-k_2)\dots(1-k_{N-1}) \times \int_0^\infty \frac{e^{-2\lambda l}}{\alpha_{N1} - \beta_{N1} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda \dots (26)$$

$$\text{ここで, } \alpha_{N1} = \alpha_{N2} + \beta_{N2} k_1 e^{-2\lambda h_2}$$

$$\alpha_{N2} = \alpha_{N3} + \beta_{N3} k_2 e^{-2\lambda h_3}$$

$$\vdots$$

$$\beta_{N1} = k_1 \alpha_{N2} + \beta_{N2} e^{-2\lambda h_2}$$

$$\beta_{N2} = k_2 \alpha_{N3} + \beta_{N3} e^{-2\lambda h_3}$$

$$\vdots$$

以上より、 N 層大地における棒状電極の作る電位 $V_N(x)$ は次式のように与えられる。

$$V_N(x) = \int_0^{h_1} V_1 dt + \int_{h_1}^{H_2} V_2 dt + \dots + \int_{H_{N-1}}^l V_N dt$$

$$= \frac{\rho_1 I_1}{2\pi} \sum_{s=1}^N \left[\prod_{i=0}^{s-1} (1-k_i) \int_{H_{s-1}}^{H_s} \int_0^\infty \frac{\alpha_{Ns} e^{-\lambda t} + \beta_{Ns} e^{-2\lambda H_s} e^{\lambda t}}{\alpha_{N1} - \beta_{N1} e^{-2\lambda h_1}} J_0(\lambda x) d\lambda dt \right] \dots \dots \dots (27)$$

$$\text{ここで, } H_s = \sum_{i=1}^s h_i, H_0 = 0, H_N = l$$

$$\alpha_{NN} = 1, \beta_{NN} = 0$$

〈2・5〉 電流の扱い 大地が均質かつ等方性である場合、棒状電極表面から大地へ流出する電流は均等であると仮定してきた。ところが多層構造の場合、大地の ρ が地層によって異なってくるので、上述の仮定は成立しなくなる。しかし、電流密度が ρ に逆比例していると仮定すれば、各地層内における電流は均等であると考えることができる。そこで、図 4 に示す水平 N 層大地モデルにおいて、電極に流れる電流を I 、第 N 層の地層の厚さを h_{N-1} 、大地抵抗率を ρ_N 、 N 層に存在する電流源を I_N とすれば次の関係式を得る。

$$\rho_1 I_1 = \rho_2 I_2 = \dots = \rho_N I_N \dots \dots \dots (28)$$

$$I_1 h_1 + I_2 h_2 + \dots + I_N (l - h_1 - h_2 - \dots - h_{N-1}) = I \dots \dots \dots (29)$$

これらの式を解くと次式になる。

$$\rho_1 I_1 = \frac{I}{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_i}{\rho_i} + \frac{l - H_{N-1}}{\rho_N}} \dots \dots \dots (30)$$

$$\text{ここで, } H_{N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i$$

3. 接地抵抗の計算

〈3・1〉 計算式の導出 棒状電極の接地抵抗は電極に流入する電流と電極の地表面上の電位の比で表される。そこで、 N 層大地における棒状電極の電位式〔(27)式〕と電流式〔(30)式〕を用いて接地抵抗計算式を導出する。(27)式において、電極の地表面上の電位は電極の半径を a としたとき、 $x=a$ とすることによって求められる。また、同式において $\rho_1 I_1$ は電極に流入する電流 I を用いて表した (30) 式を用いることができる。これらをまとめて整理すると、水平 N 層大地における棒状電極 (半径 a 、長さ l) の接地抵抗は大地パラメータ (ρ_i, h_i) を用いて表すと次式で与えられる。

$$R = \frac{V_N(a)}{I} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sum_{i=1}^{N-1} \frac{h_i}{\rho_i} + \frac{l - H_{N-1}}{\rho_N}} \sum_{s=1}^N \left[\prod_{i=0}^{s-1} (1 - k_i) \times \int_{H_{s-1}}^{H_s} \int_0^\infty \frac{\alpha_{Ns} e^{-\lambda t} + \beta_{Ns} e^{-2\lambda H_s} e^{\lambda t}}{\alpha_{N1} - \beta_{N1} e^{-2\lambda h_1}} \times J_0(\lambda a) d\lambda dt \right] \dots (31)$$

〈3.2〉 数値例による検討 (31)式を計算するために、ベッセル関数を含む二重積分を有限区間はロンベルグ法、無限区間は二重指数形減衰の積分公式を用い、倍精度で行った。計算は本学情報処理センターの電算機を使用した。Tagg によって得られている二層大地の計算式を用いた結果と、(31)式を用いて計算した結果を比較すると、10~2% のオーダの誤差で一致をみた。そこで、本プログラムを用いて各種条件の場合の接地抵抗を計算し、多層大地における接地抵抗の特性を検討する。

接地抵抗 (R) と電極長 (l) の関係 (以下 R - l 曲線という) について、大地が多層で層状を成している場合、棒状電極がそれらの地層に達したときに境界面で変曲点を生じることが言われている。また、大地パラメータ (地層の厚さとその地層の大地抵抗率) との関係について、上層に比べ下層の ρ が低い場合は接地抵抗の変化が大きいこと、下層の ρ が高い場合は変化が小さいことなどが言われている。本論文では、これらに含めて理論的に検討するものである。なお、計算例において、供試電極の半径は 0.03 m とする。

(1) 変曲点の存在 表2に示す大地パラメータを用いて R - l 曲線を作成すると図5のようになる。均質大地、二~四層大地をモデルにしている。設定モデルでは地表面から 7.5 m ごとに地層の境界面を設けているが、同図ではその境界面において変曲点が存在していることが確認できる。なお、曲線の傾きは近接している地層の ρ の大小に関係するものである。実際の大地においては、地層が層状を成していても、

表 2 大地パラメータ

Table 2. Earth parameters.

地層の数	大地抵抗率 ($\Omega \cdot m$)				曲線
	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	
1	10^4				A
2	10^4	10^3			B
3	10^4	10^3	10^2		C
4	10^4	10^3	10^2	10	D

$$h_1 = h_2 = h_3 = 7.5 \text{ m}$$

図 5 接地抵抗の変曲点

Fig. 5. Discontinuous points of earth resistance.

図 6 大地抵抗率の影響

Fig. 6. Effect of the earth resistivity.

近接している地層の ρ が極端な値であることはまれであり、変曲点を明確に認識できるデータを得ることは数少ないようである。

(2) 上層と下層の ρ の影響 二層大地モデルにおいて、地層の厚さを 15 m とし、上層の ρ_1 を 1,000 $\Omega \cdot m$ にしたとき、下層の ρ_2 を変化させた場合の R - l 曲線を見ると図6のようになる。前述したように、 ρ_1 に比べ ρ_2 が低い場合、接地抵抗は変曲点から急激に減少し、その傾きも大きい。逆に ρ_2 が高い場合は変曲点もはっきりつかめず、接地抵抗の減少の割合も小さい。

(3) 地層の厚さの影響 五層大地モデルにおいて各地層の ρ は同値で、地層の厚さを変化させた場合の R - l 曲線を見ると図7のようになる。 ρ の低い地層が厚ければ接地抵抗の低減の割合は大きくなる。各地層の ρ の組合せが同じ場合、電極が最下層まで到達したとき地層の厚さの違いにもかかわらず、接地抵抗はほぼ同じ値に収束する。

図 7 地層の厚さの影響
Fig. 7. Effect of the thickness of the layer.

図 8 五層大地における接地抵抗
Fig. 8. Earth resistance in five-layered earth.

(4) 五層大地モデルの $R-l$ 曲線 大地パラメータのうち、地層の厚さを固定し、各地層の ρ を変化させた場合 (表 3) の $R-l$ 曲線を作成すると図 8 のようになる。図中の E, B を見ると、第五層目の ρ が第四層目に比べて高いため、接地抵抗の低減の割合が小さい。 E のほうが若干ではあるが高目に出ているが、これは上層部の ρ が高いことの影響である。 C については下層になるほど ρ が高い場合であり、従って接地抵抗があまり減少していない。それに対して、 D は下層の ρ が低い場合であり、接地抵抗は急激な減少の傾向を呈している。 E, F について、第二層目までの大地パラメータは同じであるため、 $R-l$ 曲線の様相も似ているが、三層目からの ρ の大小によってその様相は大きく変わってきている。

表 3 五層大地の大地パラメータ

Table 3. Earth parameters for five-layered earth.

地 層	地層の厚さ (m)	大地抵抗率 ($\Omega \cdot m$)					
		A	B	C	D	E	F
第一層	5	10	100	10	1,000	500	500
第二層	10	100	10	50	500	50	50
第三層	20	10	100	100	100	100	1,000
第四層	40	100	10	500	50	10	100
第五層		10	100	1,000	10	100	10

4. あとがき

本論文では、水平多層大地における棒状電極の接地抵抗の計算式を得るための導出過程を主に述べ、若干の数値例による検討を行い、多層問題に対する棒状電極の接地抵抗の挙動を把握することができた。更に、本論文で示した手法を応用して、電気検層データを用いた接地抵抗の計算⁽⁶⁾や $R-l$ 曲線法による大地パラメータの推定⁽⁷⁾などを検討することができた。

本論文で導出した計算式を用いることによって、所要の接地抵抗を得るための、例えばボーリング工法においてはボーリングの深さを、深打工法においては接地棒の長さを予測することが可能になり、接地設計の一部に寄与できると思われる。

多層問題として接地抵抗を計算するには多層の大地パラメータの情報を必要とするわけであるが、多層の大地パラメータの解析において、現段階では解決しなければならない課題がある。その一つに、 $\rho-a$ 曲線の解析が二層標準曲線を用いて、手作業である照合法によって行われていることである。そのため、多層大地パラメータの解析は精度的に問題が生じている。多層大地の接地抵抗を計算するには、それに対応した多層の大地パラメータを推定する方法⁽⁸⁾を確立しなければならない。今後、多層大地における大地パラメータの推定法について述べるつもりである。終りに、著者らの接地に関する研究について、御べんたつをいただいている東京大学生産技術研究所 河村達雄教授に厚く感謝の意を表す。また、本研究に御協力いただいた杉崎裕之氏 (現、鹿島建設)、川畑 裕氏 (現、丸善石油化学) に感謝する。

(昭和 62 年 7 月 29 日受付、同 62 年 12 月 4 日再受付)

文 献

- (1) 高橋:「接地技術の動向」, 電学誌, **106**, 69 (昭 61-4)
- (2) G. F. Tagg: Earth Resistance (1964) George Newnes Ltd.
- (3) 高島, 他:「棒状電極の接地インピーダンスの数値計算」, 電学論 B, **103**, 33 (昭 58-3)
- (4) 大矢, 他:「多電極並列接地による接地抵抗の低減化」, 同上 B, **106**, 75 (昭 61-10)
- (5) 川瀬, 他:「多層大地における接地抵抗の計算について」, 昭 60 電気学会全大, No. 1084
- (6) 高橋・川瀬:「電気検層データを用いた接地抵抗の予測計算」, 昭 60 電気関係学会東北支部連大, No. 1 H 3
- (7) 高橋・川瀬:「多層大地パラメータの推定について」, 昭 61 電気関係学会関西支部連大, No. G 4-15
- (8) 川瀬, 他:「多層大地における大地抵抗率の推定について」, 昭 60 電気学会全大, No. 1085