整流器が含まれる電気機械の解析法

名古屋工業大学 松 井 信 行
 名古屋工業大学 木 寺 信 博
 名古屋工業大学 常 広 讓
 名古屋工業大学 足 立 良 夫

1. ま え が き

サイリスタやシリコン整流器など半導体整流素子の目ざましい発展とともに、近年これらが各種電気機器にとり入れられ、従来の機器ではとうてい達成できなかったようなすぐれた特性や制御能を持つ機器が開発され、多く実用に供されている。

このような実用面での発展とともに、これらの機器の解析も多くの研究者によって試みられすぐれた成果がいくつか報告されている。なかでも、整流器が含まれる回路を電子計算機で模擬し、整流素子のオン・オフ動作をもこれで判別させて回路動作の厳密な解析を行なわせる方法⁽¹⁾⁽²⁾は、どのような機器にも適用できるという点できわめて有用な方法であるが、膨大な計算時間と処理能を計算機に要するという欠点がある。

また、このような回路を共通の手法によって解く方法として林氏⁽³⁾、竹内氏⁽⁴⁾らの方法があり、これを用いた解析例がいくつか報告されているが、いずれも微分方程式を解く段階で式の演算を必要とするので、複雑な回路への適用は困難と思われる。

さて、整流器が含まれる回路の動作や特性を厳密に解析しようとするば、どうしても過渡現象的な取り扱いが必要であろう。自動制御理論で広く用いられている状態変数法は回路の状態の記述の面でも、また微分方程式を計算機で処理するうえでもきわめて便利で、

これまで状態変数を用いた整流器回路の解析法が二、三報告されており、⁽⁵⁾⁽⁶⁾ 複雑な回路動作に対し明確な解を与えている。ただ、このままでは対象がある限られた整流器回路に制約されるように思われる。

ここで述べる方法も、基本的には状態変数法によって複雑な計算を電子計算機で行なわせるものであるが、整流素子のオン、オフに応じて順次モードが遷移していく条件を接続行列 B に考慮することにより、適用範囲を周期的な動作が行なわれる整流器回路全体に広げようとするものである。

本文では本法の概要とこれを適用するうえでの問題点について述べる。なお、本法では動作モードの簡略化と、整流素子のオン、オフ動作に従って順次現われるモードをあらかじめ与えるという手法により計算時間の大幅な短縮を図ろうとするものであるが、その際の問題点についての検討を行なっている。

2. 整流器回路の動作の上からの分類

〈2・1〉 整流器回路の一般的な動作 整流器が含まれる回路（以下、簡単に整流器回路と記す）は、回路中の整流素子のオン、オフに応じて次々にその結線状態が遷移していく。その一つの状態をモードと呼ぶことにすると、多くの回路ではいくつかのモードがある決った順序で周期的に現われる。

たとえば、第1図（a）に示すインバータ回路では整流素子の動作のみに着目すると（b）図のような六つのモードからなっている。ただし、これら六つのモードは回路の対称性から正負の半サイクル期間Ⅰ、Ⅱに分けて考えたほうが便利で、結局この回路では三つのモードからなるⅠとⅡの期間が、交互にくり返されるとみることができよう。さて、この回路では期

Analytical Method of Rectifier Circuit by State Variables. By N. MATSUI, Member, N. KIDERA, Associate, Y. TSUNEHIRO, Member, Y. ADACHI, Member (Department of Electrical Engineering Nagoya Institute of Technology)

松井信行：正員，名古屋工業大学電気工学科助手
 木寺信博：准員，名古屋工業大学大学院修士課程
 常広 讓：正員，名古屋工業大学電気工学科助教授
 足立良夫：正員，名古屋工業大学電気工学科教授

第 2 図 単相インバータ回路の簡化

Fig. 2. Simplified circuit diagram of the single phase inverter circuit.

動作サイリスタ	Th ⁺	Th ⁻
動作ダイオード	D ⁺	D ⁻
時 間	τ_1 $\xrightarrow{T}$ τ_2 $\xrightarrow{T}$ τ_3 $\xrightarrow{T}$ τ_4	τ_1 $\xrightarrow{T}$ τ_2 $\xrightarrow{T}$ τ_3 $\xrightarrow{T}$ τ_4
モ ー ド	1 2 3 1 2 3	1 2 3 1 2 3
期 間	I	II

(b)

第 1 図 単相インバータ回路とその動作モード

Fig. 1. Single phase inverter circuit and its operating modes.

間 I, II の周期 T はサイリスタの点弧によって決まり、回路解析のうえでは既知量として取り扱えるが、 τ_1 や τ_2 は回路条件、たとえば負荷に依存している。整流器回路動作のもう一つの特徴は、回路条件の変化は動作モードの現れ方にも、影響を及ぼすことである。たとえば図の回路で (b) 図のようなモードをとるのは、ある回路条件に限定されていて、負荷状態によっては τ_2 が延び $\tau_3=0$ の場合が起こりうる。

このような現象は一般の整流器回路では、ごく普通に見られることであって、以下に述べるように状態変数法による取り扱いでは、どのようなモードがどのような順序で現れるか「回路に関する動作モード」が明確にされて初めて解析が可能になる。

回路に関する動作モードがせいぜい 2~3 の上の場合のような場合は、より広い範囲にわたって起こりうる可能性の大きい動作モードから解析を行なって、それが起こりうるための回路条件を決めるという手順により、多くの場合ほとんど目的が達せられるものである。

また、より複雑な回路に対しては次節で述べる動作モードの簡略化を行なったうえで、この方法を適用すればよい。

〈2・2〉 整流器回路動作の分類 第 1 図の回路で転流時間 τ_1 が半サイクルの時間 T に比べじゅうぶん小さく、かつ転流インダクタンス L における電圧が転流期間以外では無視できるとしよう。このような場合には転流期間のみ動作する素子 (L や C) を取除き、代わりにサイリスタ自身でオン、オフが行なえると考えて負荷の電流や電圧を求める。転流回路の電圧や電流の算定には、当然負荷電流の値が必要で、こ

第 3 図 II 形整流器回路の 1 例

Fig. 3. An example of the circuit of type II.

れは転流回路を省略して得られた値を用いばよい。

このような動作モードの簡略化は、回路解析を簡単にするという点できわめて有用であり、得られた結果が実用上はかなり良い近似を与えるので、これまでも良く用いられている。ただ、転流期間が T に比べ無視できるというだけで上記のような近似が可能かという、その場合にはある制約が必要で、これについては第 5 章で述べることにする。

さて、このような近似によって得られた第 2 図 (a) の回路は (b) 図のように考えてよいから、モードの切り換る時点も回路に加わる電圧も負荷の状態には無関係となる。つまり T も v_0 も既知量として取り扱える。このような観点から第 3 図を見ると、チョップのオン、オフ時間 τ_1 , τ_2 は既知量であるが、オフモードでは回路が電源 (入力) から切り離され、 v_0 は回路の状態とは独立でない。

第 4 図の回路ではモード時間も、回路に加わる電圧 v_0 も回路の状態に依存していて、解析を行なってはじめて明らかになるものである。

さて、周期的な動作をする整流器回路の多くは、上に述べた三つの形のどれかに属するものと考えられるし、逆にいえば本文でこれから述べる方法が適用できるのは、この形のいずれかに属するものに限られる。

そこで、便宜上整流器回路の動作を次のように定義しておこう。

モード時間が回路状態に独立なもの

(a) 回路が電源から切り離されるモードがない回

第 4 図 III 形整流器回路の 1 例

Fig. 4. An example of the circuit of type III.

路 (I 形)

(b) 電源から切り離されるモードを有する回路

(II 形)

(c) モード時間が回路状態に依存する回路(III形)

次章以下で明らかにするように、解析の簡単さからいえば、I 形、II 形、III 形、の順であり III 形については定常状態の解析に限定される。なお、この分類はあくまでも回路解析上の便宜を図るためのものであって、すでに述べたような近似が可能であればできるだけ解析が簡単な I 形、II 形に変換したうえで、次章の理論を適用しようとするものである。

3. 状態変数法による整流器回路の解析法

〈3・1〉動作モードと回路方程式 理解を容易にするため、第 5 図 (a) の単相ブリッジ整流回路を例にとって解析の基礎となる事項およびその方法を説明しよう。まず、回路解析に先だって、4 個の整流素子のオンオフに着目して回路の動作モードを明確にしておかなければならない。それを (b) 図に示しているが、この段階では図の動作モードが一番生じやすいというだけで別の動作モードも生ずるかもしれない。

この回路はすでに述べた III 形回路に属し、したがって定常状態のみに解析が限定されることを考えると上記の動作モードが満足される条件は定常状態で

$$\alpha_n/\omega + \tau_{1n} \leq T = 1/2f \quad \dots\dots\dots (1)$$

f : 電源の周波数

である。解析の結果、可能なすべての回路状態に対し (1) 式がなりたつなら問題はなく、また (1) 式を満さない範囲があってもそれが実用的には除外できるような場合は、あらためて別の動作モードを考慮する必要はないであろう。

さて、第 5 図 (a) で時間軸を (b) 図のように仮定すると期間 n におけるオンモードの電圧方程式は、

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= Ri + L \frac{di}{dt} + e \\ v_0 &= v = \sqrt{2} V \sin(\omega \lambda + \alpha_n) \\ i &= C \frac{dv}{dt} + Ge \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

(a)

(b)

第 5 図 単相ブリッジ整流回路とその動作

Fig. 5. Single phase rectifier circuit and its operation.

$$\lambda = t - T_{n-1}$$

であり、一方、オフモードの電圧方程式は、

$$\left. \begin{aligned} C \frac{dv}{dt} + Ge &= 0 \\ v_0 &= v = \sqrt{2} V \sin(\omega \lambda + \alpha_n + \beta_n) \\ \lambda &= t - \tau_{1n} - T_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3)$$

となる。(2)、(3) 式を状態方程式の形に記すと

$$P \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ i \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & & \\ -\omega & 0 & & \\ 1/L & 0 & -R/L - 1/L & \\ 0 & 0 & 1/C & -G/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ i \\ e \end{bmatrix} \quad \dots\dots (2')$$

$$P \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ i \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega & & \\ -\omega & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G/C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ i \\ e \end{bmatrix} \quad \dots\dots (3')$$

となる。ただし、 v_1 は正弦波の入力電圧 v_0 を作るための補助的な変数⁽⁷⁾である。

そこで、(2') 式をベクトル記号を用いて

$$P \mathbf{V} = \mathbf{A}_1 \mathbf{V} \quad \dots\dots\dots (2'')$$

と記せば、この 1 階の微分方程式は第 2 種初期値、すなわち $t = T_{n-1}^+$ における $\mathbf{V}$ の値が知れば、次のような形でその解が与えられる。

$$\mathbf{V}(t) = \Phi_1(\lambda) \cdot \mathbf{V}(T_{n-1}^+) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$\Phi_1(\lambda) = \mathcal{L}^{-1} \{ [S \mathbf{I} - \mathbf{A}_1]^{-1} \}$$

同様に、(3') 式についてもその解は、

$$\mathbf{V}(t) = \Phi_2(\lambda) \cdot \mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}^+) \dots \dots \dots (5)$$

ただし、 $\mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}^+)$ は、オンモードからオフモードへ移った直後における $\mathbf{V}$ の値である。

〈3・2〉 モードの接続行列と遷移条件 もし、モードが切り換った直後における $\mathbf{V}$ の値、すなわち、 $\mathbf{V}(T_{n-1}^+)$ 、 $\mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}^+)$ さえ求まれば、モード期間内での i 、 e など、いわゆる回路の状態量の時間的变化は (4) (5) 式により知ることができる。

ところで、(4)、(5)式の基になる (2)、(3) 式は期間 n に対して誘導されたもので、他の期間に対して正当とは限らない。しかし、一定の周期性をもってモードが順次遷移してゆく整流器回路では、一般に回路の入力や、状態量のとり方を適当に選ぶことによって、期間 n に関する方程式を他の期間に対してもなりたつようにすることができる。たとえば、第5図の回路では $n-2$ 、 $n+2$ 、などの期間では、サフィクス n さえ変えればよいし、また $n-1$ や $n+1$ の期間に対しては

$$v_0 = -v = \sqrt{2} V \sin(\omega \lambda + \alpha_{n-1}) \quad (\text{オンモード})$$

$$v_0 = -v = \sqrt{2} V \sin(\omega \lambda + \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) \quad (\text{オフモード})$$

などとするだけで、状態方程式そのものは全く同じものでよいことになる。

しかし、このような状態量の変更によって、 $\mathbf{V}$ の要素すなわち入力や状態量はモード切り換え時点において当然不連続になる。すなわち、上記の例では

$$v_0(T_{n-1}^+) = -v_0(T_{n-1}), \quad v_1(T_{n-1}^+) = -v_1(T_{n-1})$$

$$i(T_{n-1}^+) = i(T_{n-1}), \quad e(T_{n-1}^+) = e(T_{n-1})$$

としなければならない。上記をまとめて

$$\mathbf{V}(T_{n-1}^+) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}(T_{n-1}) \dots \dots \dots (6)$$

と表わし、 $\mathbf{B}$ を接続行列と呼ぶことにする。このように考えると、 $t = T_{n-1} + \tau_{1n}$ においては、

$$\mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}^+) = \mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}) \dots \dots \dots (7)$$

であって接続行列は1である。そして、(6)、(7)式は、すべての n に対しなりたつことに注意すべきである。

最後に Ⅲ 形の整流器回路に対しては、モードの遷移が回路の状態に関係して行なわれるので、この条件を回路の状態量を用いて表しておかねばならない。

この例ではオフからオンモードへの遷移は $t = T_{n-1}$ において電流 i が流れはじめることであり、それは

$$e(T_{n-1}) = v_0(T_{n-1}^+) = -v_0(T_{n-1}) \dots \dots (8)$$

また、オンモードからオフモードへの遷移は、

$$i(T_{n-1} + \tau_{1n}) = 0 \dots \dots \dots (8')$$

という状態で生ずる。(8)、(8') 式を便宜上モード遷

移条件と呼ぶことにしよう。

〈3・3〉 三つの形の整流器回路における解析の限界
これまでのところで、もしモード遷移時点での $\mathbf{V}(T_n)$ 、 $\mathbf{V}(T_n + \tau_{1n})$ 、($n=0, 1, 2, \dots$) がわかれば、すべての期間での状態量 $\mathbf{V}(t)$ が求められることを述べた。

さて、 $\mathbf{V}(t)$ について、まず (5) 式で $\lambda = \tau_{2n}$ とおくと、

$$\mathbf{V}(T_n) = \Phi_2(\tau_{2n}) \cdot \mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}^+)$$

また、(4)式で $\lambda = \tau_{1n}$ とおき、(7)式および (6) 式を使うと

$$\mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n}^+) = \mathbf{V}(T_{n-1} + \tau_{1n})$$

$$= \Phi_1(\tau_{1n}) \mathbf{V}(T_{n-1}^+) = \Phi_1(\tau_{1n}) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{V}(T_{n-1})$$

ここで便宜上

$$\mathbf{H}(\tau_{2n} \cdot \tau_{1n}) = \Phi_2(\tau_{2n}) \cdot \Phi_1(\tau_{1n}) \mathbf{B} \dots \dots (9)$$

とおけば

$$\mathbf{V}(T_n) = \mathbf{H}(\tau_{2n} \cdot \tau_{1n}) \mathbf{V}(T_{n-1})$$

と書くことができる。このような手順をくり返すと

$$\mathbf{V}(T_n) = \mathbf{H}(\tau_{2n}, \tau_{1n}) \cdot \mathbf{H}(\tau_{2n-1}, \tau_{1n-1})$$

$$\cdot \cdot \cdot \mathbf{H}(\tau_{21}, \tau_{11}) \cdot \mathbf{V}(0) \dots \dots \dots (10)$$

が得られる。ただし $\mathbf{V}(0)$ は、 $t=0$ すなわち回路が動作しはじめる時点での状態量の値を示す。

なお、(10)式は第5図の回路、すなわち、1期間がオン、オフの2モードからなるⅢ形回路のものであるが、1期間内のモード数がさらに多い場合も全く同様な考え方でよいので、1期間が2モードからなる場合を考えても一般性は失なわれない。ただこの場合、1期間中に入力が不連続となるような系では、そこで $\mathbf{B}$ 行列を考えなければならないが、⁽⁸⁾ そのようなことは一般的にはまれである。

ところで、Ⅰ形やⅡ形の回路では、モード時間 τ_1 、 $\tau_2 \dots$ が既知量として取り扱えるので、いま (10) 式で

$$\mathbf{H}(\tau_{2n} \cdot \tau_{1n}) = \dots = \mathbf{H}(\tau_{21}, \tau_{11}) = \mathbf{H}(\tau_2, \tau_1)$$

とおくことができ、したがって (10) 式は

$$\mathbf{V}(T_n) = \mathbf{H}^n(\tau_2, \tau_1) \mathbf{V}(0) \dots \dots \dots (11)$$

のように簡単化される。

ところで、(10)式で行列 $\mathbf{H}$ を入力 $\mathbf{m}$ と回路の状態量 $\mathbf{x}$ に関する小行列にわけて、

$$\mathbf{H}(\tau_2, \tau_1) = \begin{bmatrix} \alpha(\tau_2, \tau_1), & 0 \\ \gamma(\tau_2, \tau_1), & \beta(\tau_2, \tau_1) \end{bmatrix} \dots \dots (12)$$

とおくと、回路の状態量 $\mathbf{x}(T_n)$ は z 変換された形で

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1} [\mathbf{I} - z^{-1} \beta(\tau_2, \tau_1)]^{-1} \gamma(\tau_2, \tau_1) \mathbf{M}(z)$$

$$+ [\mathbf{I} - z^{-1} \beta(\tau_2, \tau_1) \mathbf{x}(0) \dots \dots \dots (13)$$

で与えられる。⁽⁷⁾ただし、 $\mathbf{M}(z)$ は入力 $\mathbf{m}(t)$ を z 変換したもので

$$\mathbf{M}(z) = [\mathbf{I} - z^{-1} \boldsymbol{\alpha}(\tau_2, \tau_1)]^{-1} \mathbf{m}(0) \dots (13')$$

であり、 $\mathbf{x}(0)$ 、 $\mathbf{m}(0)$ は入力および回路の状態量の $t=0$ における第1種初期値である。

このように、I 形や II 形の整流器回路は (13) 式によって $t=0$ からの全期間における $\mathbf{x}(T_n)$ が計算でき、また $\mathbf{m}(T_n)$ はもともと既知量であるから、モード期間内の $\mathbf{x}$ の時間的な変化は (4) および (5) 式を用いて計算できる。特に定常状態における $\mathbf{x}$ の値だけが必要とされるときは、 z 変換の最終値定理

$$\lim_{T_n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(T_n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)/z \cdot \mathbf{x}(z) \dots (14)$$

により $\mathbf{x}(T_n)$ を求めればよい。その際、回路動作が周期的に行なわれる場合は入力 $\mathbf{m}(T_n)$ は一定値をとるので、 $\mathbf{M}(z)$ は一般に、

$$\mathbf{M}(z) = z/(z-1) \cdot \mathbf{m}(0), \quad \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}(T_n)$$

となり、これを (13) 式に適用すると、

$$\lim_{T_n \rightarrow \infty} \mathbf{x}(T_n) = [\mathbf{I} - \boldsymbol{\beta}(\tau_2, \tau_1)]^{-1} \boldsymbol{\gamma}(\tau_2, \tau_1) \cdot \mathbf{m}(T_n) \dots (15)$$

となる。

次に III 形回路について考える。すでに明らかなように、III 形回路を $t=0$ から解析するには (10) 式によらなければならない。その際、I 形や II 形回路と異なり III 形では、モード時間 τ_1 、 τ_2 は回路の状態量の関数であるから、(10) 式を直接計算するには、次のようにするしかない。すなわち、 $t=0$ より始めて期間1のオンモードの状態量を計算し、(8') 式のモード遷移条件を満たす τ_{11} を求める。次に $t=\tau_{11}$ における状態量からオフモード期間の状態量を求めるといったような手順で、以下にこれを状態量 $\mathbf{x}(T_n)$ が一定値に落ちつくまでくり返す。このような方法はディジタルシュミレーション法としてすでに報告されている⁽¹⁾が、計算機を利用する場合でも一般に膨大な計算時間を要するものである。そこで本論文に述べる方法では III 形回路については解析を定常状態のみに限定するかわりに、計算時間の大幅な短縮を図ろうとするもので、以下その基本的な考え方を述べる。

まず (10) 式におけるモード時間 τ_{1n} 、 τ_{2n} は n の増大とともに一定値に近づく。これが定常状態の値であって、いまそれを τ_1 、 τ_2 としよう。ここで、 $t=0$ でスイッチを投入した時点から、I 形や II 形回路のように、すべての n に対して $\tau_{1n}=\tau_1$ 、 $\tau_{2n}=\tau_2$ と仮定して解を求めたとすると、その解は $n \rightarrow \infty$ の定常状態では正当である。すなわち、その解は I 形、II 形と全く同形の (15) 式で与えられることがわかる。

なお、III 形回路では定常状態のみを取扱うので、時

間軸を一つの期間内とすることにし (15) 式を

$$\mathbf{x}(T) = [\mathbf{I} - \boldsymbol{\beta}(\tau_2, \tau_1)]^{-1} \boldsymbol{\gamma}(\tau_2, \tau_1) \mathbf{m}(T) \dots (16)$$

と書きあらためて用いることにしよう。

一方、モード切り換え時点の状態量 $\mathbf{x}(\tau_1)$ は、すでに述べたと同じ手順により

$$\mathbf{x}(\tau_1) = [\mathbf{I}' - \boldsymbol{\beta}'(\tau_1, \tau_2)]^{-1} \boldsymbol{\gamma}'(\tau_1, \tau_2) \mathbf{m}(\tau_1) \dots (17)$$

となる。ただし、 $\boldsymbol{\beta}'(\tau_1, \tau_2)$ 、 $\boldsymbol{\gamma}'(\tau_1, \tau_2)$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'(\tau_1, \tau_2) &= \boldsymbol{\Phi}_1(\tau_1) \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Phi}_2(\tau_2) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}'(\tau_1, \tau_2), & 0 \\ \boldsymbol{\gamma}'(\tau_1, \tau_2), & \boldsymbol{\beta}'(\tau_1, \tau_2) \end{bmatrix} \dots (18) \end{aligned}$$

から決まる行列であり、 $\mathbf{m}(\tau_1)$ はオンからオフへのモード遷移が行なわれる直前の入力量を示すものとする。

さて、このようにしてモード遷移時点の状態量が形のおかげでは一応求まるが、III 形回路ではモード時間 τ_1 や τ_2 が未知で ($\tau_1 + \tau_2 = T$ であるから、 τ_1, τ_2 のいずれかが決まればよい) かつモードの遷移が入力に対してどの時点で行なわれるか (第5図の α_n) が明らかでない。これを決める条件は (8)、(8') 式のモード遷移条件であるが、これらについては次節で具体例をもって示すことにする。

〈3.4〉 解析の手順 これまでに述べた理論を実際に適用する手順を第5図の例について述べよう。

まず、回路に関する動作モードを (b) 図のようにオン、オフの2モードで1期間が構成される場合に限定すると、オン時間 τ_1 は少なくとも

$$0 < \omega \tau_1 \leq \pi$$

の範囲にならなければならない。そこで、上の範囲にある一つの τ_1 を選べば、同時に τ_2 も決まるので、あとは電子計算機を利用することにより (16)、(17) 式までの数値計算が行なえる。

しかるにモード遷移時点での入力 $\mathbf{m}(T)$ 、 $\mathbf{m}(\tau_1)$ は第5図および $Pv_1 = -\omega v_0$ であることに着目すると

$$\mathbf{m}(T) = -\mathbf{m}(0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} V \sin \alpha \\ -\sqrt{2} V \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m}(\tau_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} V \sin (\alpha + \omega \tau_1) \\ \sqrt{2} V \cos (\alpha + \omega \tau_1) \end{bmatrix}$$

となるから、結局 (16)、(17) 式は仮定した τ_1 に関し

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i(T) \\ e(T) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_{11}, q_{12} \\ q_{21}, q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} V \sin \alpha \\ -\sqrt{2} V \cos \alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} i(\tau_1) \\ e(\tau_1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} j_{11}, j_{12} \\ j_{21}, j_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \omega \tau_1, -\sin \omega \tau_1 \\ \sin \omega \tau_1, -\cos \omega \tau_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

第 6 図 負荷抵抗 R_L と α , β との関係Fig. 6. Calculated α and β vs. load resistance.

$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2} V \sin \alpha \\ -\sqrt{2} V \cos \alpha \end{bmatrix}$$

の形にまとめることができる。ここで g_{ij} , j_{ij} は数値で与えられているので、上式にモード遷移条件

$$e(T) = -v_0(T) = \sqrt{2} V \sin \alpha, \quad i(\tau_1) = 0$$

を代入すれば仮定した τ_1 に対する α が求まり、これを使って $e(T)$ や $e(\tau_1)$ が容易に計算できる。

このような操作を種々の τ_1 について行えば τ_1 と α , $e(\tau_1)$, $e(T)$ などの相互関係が求められる。

ただし、このようにして得られた諸量や関係は、あくまでも上記の動作モードが成り立つとしたときのことであって、すでに述べたようにこの場合

$$\alpha + \tau_1 \omega \leq \pi, \quad \alpha \geq 0$$

の範囲のものだけが正当で、逆にこれを満たさない τ_1 についてはあらためて別の動作モードで考慮すべきである。

その一例を第 6 図について説明しよう。まず、上に述べた方法により、種々の負荷抵抗 R_L に関し α , β

が計算される。その結果、 $\alpha + \beta \leq \pi$ を満たす R_L は 87.7Ω よりも大でなければならないことになり、別の動作モードは $R_L \leq 87.7\Omega$ に対し生ずることがわかる。

ところで、第 5 図の回路の動作モードは、上記のもののほかに次の二つが考えられる。

(i) $\alpha + \beta > \pi$, ただし $\beta < \pi$, $\alpha > 0$

(ii) $\beta = \pi$, $\alpha = 0$

(ii) は 4 個の整流素子のうち常に 2 個がオンしている場合で、解析の最も簡単な I 形回路に該当する。そこで、この解析を行なうと (ii) の動作モードは $R_L < 53.0\Omega$ の範囲で生ずることがわかる。

さて、(i) の動作モードは 3 モードから期間が構成され (第 7 図)、解析は最も複雑となるが、 R_L が狭い範囲に限られていることや、前の二つの動作モードの α , β をプロットすることにより、この場合の α , β のおおよその値を知ることができるので、計算は比較的簡単に行なえる。また、実用上は近似値でじゅうぶんな場合が多く、この例のように解析の簡単な動作モードから計算を行ない、グラフ上から残りのモードの値を近似的に求めるのが便利であろう。

4. 対称三相整流器回路の取り扱い法

すでに明らかなように、本文の解析法では整流素子のオン、オフに従って順次移り変わってゆくモードをその周期性に着目して「期間」で区分し、一つの期間に関し状態変数法を適用しようとするものであった。

この点からいえば一つの期間数を構成するモード数が少いほど解析が容易になる。

ところで、誘導機や同期機は速度制御や直流電動機の制御に用いられるサイリスタ回路には対称三相結線のものが多いが、このような回路では「期間」の選び方が特に重要である。この章では誘導機の一次電圧制御回路を例にとってその大要を説明しよう。

第 7 図 $\alpha + \beta > \pi$, $\beta < \pi$ の場合の動作モードFig. 7. Operating mode for $\alpha + \beta > \pi$, $\beta < \pi$.

第 8 図 二相誘導電動機は速度制御回路と動作モード

Fig. 8. Speed control circuit of two phase induction motor and its operating modes.

〈4・1〉一相だけが制御される二相誘導機の動作モード

第8図 (a) は二相サーボモータなどに用いられる速度制御回路で、一次の2巻線のうち β 相のみがサイリスタの制御角 α を変えて制御される。

さて、この回路は前の分類に従えば典型的なⅢ形回路であって、サイリスタのオン、オフに対応して、二相モード、単相モードからなる正負二つの期間が交互にくり返される。

そこで、前章の例にならって期間Ⅰを考慮することとしよう。第8図 (a) の電圧方程式は、

$$\begin{pmatrix} e_\alpha \\ e_\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + L_1 P, & 0, & MP, \\ 0, & R_1 + L_1 P, & 0, \\ MP, & M\omega_m, & R_2 + L_2 P, \\ -M\omega_m, & MP, & -L_2 \omega_m, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_d \\ i_q \end{pmatrix} \quad (19)$$

であるから、いま時間軸を (b) 図のように選ぶと、二相モードでは、

$$\begin{aligned} e_\alpha &= v_\alpha = \sqrt{2} V \cos(\omega_0 \lambda + \alpha) \\ e_\beta &= v_\beta = \sqrt{2} V \sin(\omega_0 \lambda + \alpha) \end{aligned}$$

であり、したがって、状態方程式は次のようになる。

$$P \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ X_1 i_\alpha \\ X_1 i_\beta \\ X_m i_d \\ X_m i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -\omega_0 \\ \omega_0, & 0 \\ \rho \omega_0, & 0, & -\rho x_1, \\ 0, & \rho \omega_0, & (1-\rho)\omega_m, \\ (1-\rho)\omega_0, & 0, & (\rho-1)x_1, \\ 0, & (1-\rho)\omega_0, & (\rho-1)\omega_m, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ X_1 i_\alpha \\ X_1 i_\beta \\ X_m i_d \\ X_m i_q \end{pmatrix} \quad (20)$$

ただし、 $X_1 = \omega_0 L_1$, $X_m = \omega_0 M$, $x_1 = R_1/L_1$, $x_2 = R_2/L_2$, $1/\rho = \sigma = 1 - M^2 L_1/L_2$

また、単相モードでは上式で

$$e_\alpha = v_\alpha = \sqrt{2} V \cos(\omega_0 \lambda + \alpha + \beta), \quad i_\beta = 0$$

とすればよく、状態方程式は次のように記せる。

$$P \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ X_1 i_\alpha \\ X_1 i_\beta \\ X_m i_d \\ X_m i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & -\omega_0 \\ \omega_0, & 0 \\ \rho \omega_0, & 0, & -\rho x_1, \\ 0, & 0, & 0, \\ (1-\rho)\omega_0, & 0, & (\rho-1)x_1, \\ 0, & 0, & (1-\rho^{-1})\omega_m, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \\ X_1 i_\alpha \\ X_1 i_\beta \\ X_m i_d \\ X_m i_q \end{pmatrix} \quad (21)$$

ここで、(20), (21)式を便宜上、次の形で記す。

$$pV = A_1 V, \quad pV = A_2 V = V(m, X)_t$$

$$m = [v_\alpha, v_\beta]_t$$

$$x = [X_1 i_\alpha, X_1 i_\beta, X_m i_d, X_m i_q]_t$$

次に接続行列 B を求める。(20), (21)式は期間Ⅰに対して誘導されたもので、これらを期間Ⅱにおいてもなりたつようにするには、回路の対称性によって状態量 V のとり方(極性)をすべて逆向きにすればよい。このことを示すのが接続行列 B であって、この場合は、 $V(T^+) = -V(T)$ であるから

$$B = -I \quad (22)$$

となる。

モード遷移条件は、この場合 α が与えられるので、

$$i_\beta(\tau_1) = 0 \quad (23)$$

だけでよく、またモード遷移時点での入力量 $m(T)$ および $m(\tau_1)$ は、第8図 (b)により次のようになる。

$$m(T) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} V \cos \alpha \\ -\sqrt{2} V \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$m(\tau_1) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} V \cos(\alpha + \beta) \\ \sqrt{2} V \sin(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

以下、解析手順は前章と全く同じ方法で行なうことができるのでここでは省略する。このようにして、回路の状態量 x の1期間内の時間的変化がわかると、発生トルクの時間的変化や制御特性など容易に求めることができる。これについては文献⁽⁹⁾を参照されたい。

〈4・2〉三相誘導電動機の動作モードの簡単化

第9図では、各相のサイリスタが、その制御角 α など (b) 図ないしは (c) 図に示すように対称的に動作すると仮定しよう。

これを見ると、(b)図では三相モード、単相モードから構成される「期間」が電源の1サイクル中に6回現れる。また (c) 図では「期間」が単相モードとオ

第 9 図 三相誘導電動機速度制御回路とその動作モード

Fig. 9. Speed control circuit of three phase induction motor and its operating modes.

モードで構成されている。次に、(b) 図の場合について、この回路が〈4.1〉節で述べた第 8 図の回路と全く同じ方法によって解けることを示そう。

いま、三相機を二相機に変換して考えるため、第 9 図のように $\alpha\beta$ 軸をとると、そのときの変換行列は

$$\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (24)$$

である。そのときは、 e_0 (零相電圧)、 e_α 、 e_β は

$$\begin{bmatrix} e_0 \\ e_\alpha \\ e_\beta \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_C \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \cdot (e_A - e_B) \\ 1/\sqrt{6} \{ (e_B - e_C) - (e_C - e_A) \} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (25)$$

となる。そこで、第 9 図 (b) の期間 I を考えると、三相モードでは、

$$e_A - e_B = v_{AB} = \sqrt{2} V_L \sin(\omega_0 \lambda + \alpha)$$

$$e_B - e_C = v_{BC} = \sqrt{2} V_L \sin(\omega_0 \lambda + \alpha - 2\pi/3)$$

$$e_C - e_A = v_{CA} = \sqrt{2} V_L \sin(\omega_0 \lambda + \alpha + 2\pi/3)$$

であるから、この関係を (25) 式に代入し、

$$e_\alpha = V_L \sin(\omega_0 \lambda + \alpha) = V_L \cos(\omega_0 \lambda + \alpha - \pi/2)$$

$$e_\beta = -V_L \cos(\omega_0 \lambda + \alpha) = V_L \sin(\omega_0 \lambda + \alpha - \pi/2)$$

を得る。一方、単相モードでは、

$$e_A - e_B = v_{AB}, \quad i_A = -i_B, \quad i_C = 0$$

であるから、これを (24)、(25) 式に代入すれば

$$e_\alpha = V_L \cos(\omega_0 \lambda + \alpha + \gamma - \pi/2), \quad \gamma = \omega_0 \tau_1$$

$$i_B = 0$$

となり、これらの結果を前節の二相誘導機の場合と対比すると、形のうえで全く等しく、ただ巻線に加わる電圧の位相や大きさが多少異なるにすぎない。

そして、これはモード切換え時点での入力量を

$$m(T) = \begin{bmatrix} -V_L \cos(\alpha - \pi/6) \\ -V_L \sin(\alpha - \pi/6) \end{bmatrix}$$

$$m(\tau_1) = \begin{bmatrix} V_L \cos(\alpha + \gamma - \pi/6) \\ V_L \sin(\alpha + \gamma - \pi/6) \end{bmatrix}$$

とするだけでじゅうぶんである。

〈4.3〉 接続行列 **B** すでに誘導した関係式が I 以外の期間でもなりたつようにするには、状態量のとり方を期間ごとに変えてゆく必要がある。

これは、 $\alpha\beta$ 軸の取り方にかかっていて、第 10 図に示すようにたとえば期間 II では期間 I における位置から時計方向に $\pi/3$ だけ回転させた $\alpha_{II} - \beta_{II}$ の位置に選べばよい。残りの期間についても同じである。

このように期間が切り換る時点で座標軸が $\pi/3$ 移動すると考えているので、この切り換りの直前、直後で状態量は次のように変化する。(第 10 図参照)

$$\begin{bmatrix} i_\alpha(T^+) \\ i_\beta(T^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) \cdot \sin(\pi/3) \\ -\sin(\pi/3) \cdot \cos(\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(T) \\ i_\beta(T) \end{bmatrix}$$

v_α 、 v_β についても全く同じ関係式が成立する。また i_d 、 i_q については、 $d-q$ 軸が $\alpha\beta$ 軸に一致してとられているので、これも同じ接続行列になる。

したがって、この場合の接続行列 **B** は、**V** を

$$\mathbf{V} = [v_\alpha, v_\beta, X_{11}i_\alpha, X_{11}i_\beta, X_m i_d, X_m i_q]t$$

とすれば、次式のようにになる。

第 10 図 α 、 β 軸のとり方を示す図

Fig. 10. Arrangement of α and β axes.

$$B_s = \begin{bmatrix} 1/2, & \sqrt{3}/2, \\ -\sqrt{3}/2, & 1/2, \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} B_s, & 0, & 0 \\ 0, & B_s, & 0 \\ 0, & 0, & B_s \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

5. モードの省略と接続行列 B の選び方

「期間」を構成するモードの一つが他のモードに比べて時間的に無視できる場合には、それを無視して動作モードの簡略化を図ることが、解析を簡単にするという観点からきわめて重要である。この章では第 11 図の電流制御形インバータを例にとり、モードの省略とそれに関連する問題につき説明することにする。

〈5・1〉 転流モードの省略 第 11 図の 120° 通電形三相インバータによる誘導機の特性を解析するうえで、いま入力電流 i の脈動が無視できるほどに直流リアクトル L_d が大きいとする。その場合、回路は単流期間と転流期間で一つの「期間」を構成することになり、Ⅲ形回路として取り扱うべきものである。

ところで、転流期間 τ_1 は一般に「期間」 T に比してじゅうぶん小さいので、これを無視すると「期間」が一つのモードで構成されることになり、Ⅱ形回路として定常状態だけでなく、過渡状態の解析も可能となる。その場合の状態方程式は前章で述べた方法を適用すると、次のようになる。

期間Ⅰについて考えると、第 11 図で

$$i_A = -i_B = i (=I: \text{一定直流}), i_C = 0$$

したがって、(24)式から

$$i_\alpha = \sqrt{2/3}(\sqrt{3}/2 \cdot i_A - \sqrt{3}/2 \cdot i_B) = \sqrt{2} i$$

$$i_\beta = 0$$

となり、 i_α は一定直流 ($P i_\alpha = 0$) として取り扱える。そこで、これらの関係を (19)式に代入し整理すると、

$$P \begin{bmatrix} i \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & -\omega_m \\ \sqrt{2} \omega_m M/L_2 & \omega_m & -x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $i = I$, $x_2 = R_2/L_2$

となり、入力電流 i を入力量として取り扱える。インバータ入力電圧を求める場合には、 $e = \sqrt{2} e_\alpha$ から

$$e = 2 R_1 i - \sqrt{2} M(x_2 i_d + \omega_m i_q) \dots\dots (28)$$

として、状態量 i , i_d , i_q から求めることができる。

〈5・2〉 モードの省略と接続行列 B 転流モードを無視する場合には (27) 式を解けばよいようであるが、それは正しくない。すなわち、一次電流 i_α , i_β の 1 期間中の時間的変化は第 12 図のようになることに注意する必要がある。ここで、転流直前 $t=0$ にお

第 11 図 電流制御形インバータによる誘導電動機の手動制御回路

Fig. 11. Speed control circuit of the induction motor by current impressed type inverter.

いては前節の理論から $i_\alpha(0) = \sqrt{2} i$, $i_\beta(0) = 0$ であるが前章で述べたように期間が切り換える時点で α , β 軸が $\pi/3$ だけ回転することに注意すると、

$$\begin{bmatrix} i_\alpha(0^+) \\ i_\beta(0^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2, & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2, & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha(0) \\ i_\beta(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} i \\ -\sqrt{3}/2 i \end{bmatrix}$$

である。そして転流時間 τ_1 を経た時点では、 $i_\alpha(\tau_1^+) = \sqrt{2} i$, $i_\beta(\tau_1^+) = 0$ に変化している。(27) 式が成立するのは $\tau_1^+ \leq t \leq T$ の範囲であるから、転流モード時間がたとえ無視できるほど小さいとしてもその間の

第 12 図 1 周期における i_α , i_β の時間的変化
Fig. 12. Behavior of i_α and i_β during one period.

状態量の変化を何か特別の形で考慮しなければならない。ここでは、これを接続行列 $\mathbf{B}$ に考慮しようとするものである。

そこで、 i_α, i_β を第 12 図で $\tau_1 \rightarrow 0$ とした形に考えて、(19)式にラプラス変換を施すと

$$\begin{aligned} M \begin{bmatrix} s, & \omega_m \\ -\omega_m, & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\alpha(s) \\ I_\beta(s) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} s+x_2, & \omega_m \\ -\omega_m, & s+x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d(s) \\ I_q(s) \end{bmatrix} \\ = M \begin{bmatrix} i_\alpha(0^+) \\ i_\beta(0^+) \end{bmatrix} + L_2 \begin{bmatrix} i_d(0^+) \\ i_q(0^+) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式で、 $I_\alpha(s) = \sqrt{2}i/s$, $I_\beta(s) = 0$ とし、すでに述べた関係式を用いて整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s+x_2, & \omega_m \\ -\omega_m, & s+x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d(s) \\ I_q(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_m \end{bmatrix} \frac{M\sqrt{2}i}{L_2 s} \\ &- \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \frac{M}{L_2} i(0) + \begin{bmatrix} 1/2, & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2, & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d(0) \\ i_q(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

この関係式から転流モードを無視した場合の i_d, i_q の第 2 種初期値は、本来の右辺第 3 項のほか右辺第 2 項を含めて考える必要があることがわかる。したがって、この場合の接続行列 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -1/\sqrt{2} \cdot M/L_2, & 1/2, & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 \cdot M/L_2, & -\sqrt{3}/2, & 1/2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29)$$

となり、(27), (27)両式を用いて第 11 図を II 形回路として解析することができる。

最後に第 1 図の回路とこの場合の相異について述べておかなければならない。つまり前者では $\mathbf{B}$ に対する上記のような考慮は特別必要ではない。その差は回路動作によっていて、第 11 図の回路ではサイリスタの代りにそれ自身オフ能力のある素子（たとえばトランジスタ）を用いたとしても、巻線電流の連続性を保証する何んらかの回路が必要である。したがって、転流モードは動作のうえからも不可欠であって、このような回路では接続行列に上記のような配慮が必要とな

るのである。

6. あとがき

本論文では、従来、個別に論じられていた整流器を含む電気機械の解析をできるだけ統一的に取り扱うことを目的として、状態変数と α 変換を用いる解析法を論じた。

状態変数を用いることによって、整流器を含む電気機械の動作は状態方程式の形で記述でき基本的には制御理論という離散値系として取り扱える。しかしながら、転流を境に順次切り換えていくこの種の回路の特徴的な現象を考慮することが必要であり、本論文ではこれを状態推移方程式にどう考慮するかという点につき詳しく説明した。さらに本法を実際に用いるうえで、整流器を含む電気機械を動作のうえから分類して、本法の適用範囲を明確にし、定常状態や過渡状態の計算の可能な範囲と具体的な計算法を明らかにした。

また解析法の実用性から、モードの省略や座標変換の導入による解析の簡単化を図る方法を説明するとともに、その場合に考慮すべき問題点を論じた。

本論文では紙面のつごう上解析手法に重点をおき、その実際の系への適用と成果については稿をあらためて報告するつもりである。

(昭和 46 年 2 月 26 日受付, 同 47 年 1 月 13 日再受付)

文 献

- (1) 村上, 他: 電学誌 **91**, 1301 (昭 46-7)
- (2) 熊野, 他: 昭 46 電気学会全国大会 No. 495
- (3) 林: Periodically Interrupted Circuits (電気書院)
- (4) 竹内: SCR 回路理論と電動機制御への応用 (オーム社)
- (5) 原島・内田: 電学誌 **89**, 2369 (昭 44-12)
- (6) D. Novotny & A. F. Fath: IEEE Trans. Power Apparatus & Syst **87**, 597 (1968)
- (7) J. T. Tou: Modern Control Theory
- (8) 松井・松村・足立: 昭 46 電気四学会東海支部大会 14a-B:-11
- (9) 木寺・萩野・常広: 昭 46 電気四学会東海支部大会 14a-B:-7