UDC 621.311.16.012.8
518.6:512.83

論 文

47-B 51

電力潮流問題におけるくり返し計算法の収束と誤差修正

東京工業大学 渡 辺 成 良

東京工業大学 深 尾 毅

1. はじめに

電力潮流計算へ線形解法に用いるくり返し計算法を適用した解析法は、従来から広く取り上げられている。これは電力潮流計算が非線形解析であるにもかかわらず、簡単に線形近似の問題へ変換できることと、くり返し計算法が単純でしかも簡便なためである。

電力潮流計算の手法として節点アドミタンス行列を用いたくり返し計算法は、計算が単純で回路網変更に対する適応性が高く計算機内での記憶容量がほぼ最小で済み、しかも反復計算の各ステップに必要な計算量は最小でよいなどの利点を有しており、正しい解への収束が遅いという欠点も本文中で述べる誤差修正法を適用することにより改善できる。

誤差修正法は、絶対値最大の固有値を求める乗べき法（入力条件が異なるだけでくり返し計算法と同一の計算式を用いる）の収束の過程から節点電圧の収束の過程を推測し、真値との誤差を評価してすみやかに正しい解に近づけようとする外そう法である。

線形回路網の問題に対する誤差修正法はすでに述べたが、⁽¹⁾ 本文はこれを拡張し、電力潮流計算においてくり返し計算法が真値へ収束するために必要な条件とその収束の判定法を明白にし、乗べき法の収束と節点電圧の収束との関係および誤差修正法の適用アルゴリズムを述べる。また AEP 模擬 30 節点回路へ適用した結果を示す。

なお本文では既知の線路アドミタンスと節点へ注入される有効および無効電力を用い、未知の節点電圧を算出する。（基準節点を除いて P - Q 指定）この節

点電圧の計算にくり返し計算法が適用される。

2. くり返し計算法による節点電圧の計算

n -節点からなる回路の節点方程式は、

$$\mathbf{Y}\mathbf{E} = \mathbf{F}[\mathbf{E}] \quad \dots\dots\dots (1)$$

により示される。 $\mathbf{F}[\mathbf{E}]$ は n 次元の関数ベクトルで、その p 番目の要素は

$$F_p[\mathbf{E}] = (P_p - jQ_p) / \bar{E}_p \quad p=1, 2, \dots, n$$

である。（ $\bar{E}_p$ は E_p の共役複素数）ここで節点電圧、節点アドミタンス行列、注入有効および無効電力を

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \dots & y_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

とする。以下において電圧が指定された基準節点を n 番目とする。

(1) 式の解は反復計算により求められ、解法として

(i) ニュートン-ラフソン法

(ii) 線形近似解法

(iii) 非線形計画法

などがあげられる。(ii) の反復計算は m -ステップで

$$\mathbf{Y}\mathbf{E}(m+1) = \mathbf{F}[\mathbf{E}(m)] \quad \dots\dots\dots (2)$$

〔 $\mathbf{E}(m)$ は既知〕なる線形方程式を解き、 $\mathbf{E}(m+1)$ が収束するまで反復される。線形解法としてガウス消去法、線形くり返し計算法などが考えられる。

本論文では (ii) において線形くり返し計算法を拡張したくり返し計算法が用いられる。〔文献 (2) を参照〕線形くり返し計算法は、(2) 式において左辺 $\mathbf{E}(m+1)$ を未知とし右辺を既知とした線形方程式をヤコビ法、ガウス-ザイデル法または加速計算法により反復計算すればある l 回の反復で収束し、 $\mathbf{E}(m+1)$ が得られたことになるが（したがって l 回の反復計算中で

Convergence and Error Correction of Iterative Methods for Power Flow Problem. By S. WATANABE, Associate, & T. FUKAO, Member (Tokyo Institute of Technology)
渡辺成良：准員，東京工業大学電気工学科博士課程在学中
深尾 毅：正員，東京工業大学工学部電気工学科教授

右辺の $F(E(m))$ は変更されない、本文のくり返し計算法は、各反復計算（線形方程式をくり返し計算法で解いているときの反復計算）で得られた新しい解を用いて（2）式の右辺を置きかえることになる。すなわち線形くり返し計算法において $l=1$ で打ち切った結果を新しい解 $E(m+1)$ としたことになる。

したがって、ヤコビ法またはガウス-ザイデル法は

$$\dot{E}_p(m+1) = \frac{1}{\dot{y}_{pp}} \left\{ - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^{n-1} \dot{y}_{pq} \dot{E}_q(m) + \frac{P_p - jQ_p}{\dot{E}_p(m)} - \dot{y}_{pn} \dot{E}_n \right\}$$

または

$$\dot{E}_p(m+1) = \frac{1}{\dot{y}_{pp}} \left\{ - \sum_{q=1}^{p-1} \dot{y}_{pq} \dot{E}_q(m+1) - \sum_{q=p+1}^{n-1} \dot{y}_{pq} \dot{E}_q(m) + \frac{P_p - jQ_p}{\dot{E}_p(m)} - \dot{y}_{pn} \dot{E}_n \right\} \quad p=1, 2, \dots, n-1$$

となり、加速定数を ω とすれば加速計算法は

$$\dot{E}_p(m+1) = \dot{E}_p(m) + \omega \{ [(3) \text{式の右辺}] - \dot{E}_p(m) \} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし m : 反復回数, $E(0)$: 初期想定電圧である。これらのくり返し計算法は、いずれも行列表示によって

$$E(m+1) = \mathbf{M}E(m) + \mathbf{N}^{-1}I(m) \quad \dots\dots (4)$$

と書ける。ここでベクトル $I(m)$ の要素は、

$$I_p(m) = (P_p - jQ_p) / \dot{E}_p(m) - \dot{y}_{pn} \dot{E}_n \quad p=1, 2, \dots, n-1$$

であり、行列 $\mathbf{D}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ をそれぞれ基準節点の行と列を除いた $\mathbf{Y}$ の対角, 下三角, 上三角要素からなるものとすれば（4）式の行列 $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ は各くり返し計算法に対して第1表のように示される。

もし、注入電流が指定されれば、（4）式は線形くり返し計算式となり、真値 E への収束条件は行列 $\mathbf{M}$ のスペクトル半径 $\rho(\mathbf{M})$ が1以下である。ところが $I(m)$ は反復回数 m により変動するから、一般に（4）式の収束条件は $\rho(\mathbf{M})$ で議論できない。そこで各節点電圧の大きさがすべて1.0付近の値であること（以下これを E の望ましい解と呼ぶ）が普通であることから、この望ましい解への収束条件（十分条件）を求めてみる。

3. くり返し計算法の収束条件

（4）式で示された準線形方程式におけるくり返し計算法の収束条件を調べてみる。反復計算の m 回目に

第1表 節点アドミッタンス行列とくり返し行列との関係

Table 1. Relation between admittance matrix and iterative matrix ($\mathbf{Y} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$).

計算法 \ 行列	$\mathbf{M}$	$\mathbf{N}$
ヤコビ法	$-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$	$\mathbf{D}$
ガウス-ザイデル法	$-(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$	$\mathbf{D} + \mathbf{L}$
ガウス-ザイデル加速計算法 ($1 \leq \omega < 2$)	$-(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})^{-1} \times \{\omega\mathbf{U} + (\omega-1)\mathbf{D}\}$	$\frac{1}{\omega}(\mathbf{D} + \omega\mathbf{L})$

($\mathbf{D}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ はそれぞれ $\mathbf{Y}$ の対角, 下三角, 上三角要素からなる行列)

おける真値との誤差を、

$$\Delta(m) \triangleq E - E(m)$$

とすれば、（4）式から

$$\Delta(m) = \mathbf{G}_{m-1}[\Delta(m-1)] \quad \dots\dots\dots (5)$$

と示せる。ただし作用素 G_k はベクトル V に対して

$$G_k[V] = \mathbf{M}V - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}(k)\bar{V} \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり ($\bar{V}$ は V の複素共役ベクトル),

$$\mathbf{R}(k) = \begin{pmatrix} \frac{P_1 - jQ_1}{\dot{E}_1 \dot{E}_1(k)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{P_{n-1} - jQ_{n-1}}{\dot{E}_{n-1} \dot{E}_{n-1}(k)} \end{pmatrix}$$

とする。（5）式から

$$\Delta(m) = \mathbf{G}_{m-1}[\mathbf{G}_{m-2}[\dots[\mathbf{G}_0[\Delta(0)]]\dots]] \quad (7)$$

したがって、有限の要素からなる $\Delta(k)$ に対して

$$\|G_k[\Delta(k)]\| < \infty, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

および、ある p 以上の k に対して

$$\|G_k[\Delta(k)]\| < \|\Delta(k)\|$$

であれば

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Delta(m)\| = 0$$

となる。この収束条件は一般に複雑であるから、次のような解析を行なう。すなわち、ベクトル V を実部と虚部に分解して（6）式を書きかえ

$$\left. \begin{aligned} V &= V_{\text{real}} + jV_{\text{img}} \\ G_k[V] &= \{ \mathbf{M} - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}(k) \} V_{\text{real}} + j \{ \mathbf{M} + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{R}(k) \} V_{\text{img}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

とおく。ここで枝のインピーダンスにおける抵抗分を R , リアクタンス分を X としたとき、すべての枝で R と X の比が等しければ、第1表より加速なしのくり返し行列 $\mathbf{M}$ は非負行列（要素が正または零）となることが示される。⁽¹⁾ 一般に次の性質が導かれる。

性質1 回路を構成する枝のほとんどにおいて、 $0 \leq R/X \ll 1$ か逆に $R/X \gg 1$ の場合、あるいは R/X がほぼ等しい枝が多数を占める場合を仮定すれば、加速なしのくり返し行列 $\mathbf{M}$ の要素はこの条件を満たす

第 2 表 R/X が同一の範囲にある枝が全体の枝に占める割合Table 2. Percentage of branches whose R/X exists in some segment.

R/X 節点数	0.0~0.1	0.1~0.2	0.2~0.3	0.3~0.4	0.4~0.5	0.5~0.6	0.6~0.7	0.7~0.8	0.8~0.9	0.9~
6	28.6	0.0	42.8	0.0	14.3	0.0	14.3	0.0	0.0	0.0
18	0.0	26.1	17.4	39.1	4.4	13.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30	17.1	2.4	12.2	19.5	24.4	17.1	4.9	0.0	0.0	2.4
57	22.5	6.3	11.2	13.8	3.7	2.5	27.5	7.5	2.5	2.5
118	10.6	6.7	43.0	38.0	1.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.6

(単位: 百分率)

枝に対応する要素と対角要素において、虚部の大きさは実部（すべて非負）に比べ小さくなる。特に R/X がすべて等しい枝からなる回路では $\mathbf{M}$ は非負行列。

性質 2 性質 1 の仮定を満たす回路で加速なしのくり返し行列 $\mathbf{M}$ は実部が正で、虚部の大きさは実部に比べ小さいような絶対値最大の固有値をもつ。特に R/X がすべて等しい枝からなる回路では、虚部は存在しない。

この議論は $\mathbf{M}$ の要素の虚部が実部に比べて小さいという性質を用い、実数（非負）行列に虚部の摂動項が加わったものと考えて、行列 $\mathbf{M}$ を $\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_1 + j\epsilon \mathbf{M}_2$ とおいたとき ($\epsilon \ll 1$)、 $\mathbf{M}$ の固有値 λ は $\mathbf{M}_1$ の固有値 λ_1 と

$$\lambda = \lambda_1 + j\epsilon K_1 - \epsilon^2 K_2 + \dots$$

の関係でおき換えられることを用いている。ここで、 $K_1, K_2, \dots$ は $\mathbf{M}_1$ および $\mathbf{M}_2$ から定まる。〔文献 (3) 参照〕

さて (8) 式で、行列を置き換えて

$$\mathbf{S}_k^- \equiv \mathbf{M} - \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R}(k), \quad \mathbf{S}_k^+ \equiv \mathbf{M} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{R}(k) \quad (9)$$

とし、行列 $\mathbf{S}_k^-$ と $\mathbf{S}_k^+$ の性質を調べる。

性質 3 $\mathbf{S}_k^-$, $\mathbf{S}_k^+$ は、実係数行列にわずかな虚数成分からなる行列が加わった複素係数行列と仮定する。このときある p 以上の全ての k について

$$\rho(\mathbf{S}_k^-) < 1 \quad \text{および} \quad \rho(\mathbf{S}_k^+) < 1$$

であれば、 $\|\mathbf{G}_k[\mathbf{A}(k)]\| < \|\mathbf{A}(k)\|$ が満足される。

いま、回路網が性質 1 の仮定を満たし、ガウス-ザイデル法で計算を行なうとすれば（ヤコビ法も同様）、行列 $\mathbf{S}_k^-$, $\mathbf{S}_k^+$ は第 1 表から

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{S}_k^- &= -\mathbf{N}^{-1} \{ \mathbf{U} + \mathbf{R}(k) \} \\ \mathbf{S}_k^+ &= -\mathbf{N}^{-1} \{ \mathbf{U} - \mathbf{R}(k) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

と書ける。ここで行列 $\mathbf{R}(k)$ は

$r_i(k) \equiv (P_i - jQ_i) / \bar{E}_i \bar{E}_i(k)$ を対角要素にもつ（注入電力がない節点 i は零、虚部はほぼ無効電力に等しい）対角行列であるから、 $\mathbf{S}_k^-$, $\mathbf{S}_k^+$ の要素は $\mathbf{M}$ の要素の中で、対角を含む下三角部分（ヤコビ法では対

角部分だけ）が注入電力によって変化したものとなる。（上三角部分は $\mathbf{M}$ と同一）

したがって、性質 1 を満たすならば、 $\mathbf{S}_k^-$ と $\mathbf{S}_k^+$ は性質 3 の仮定を満足することになり、収束の判定は次のようになる。すなわち

性質 4 電力潮流計算をくり返し計算法で解く場合に、与えられた回路網が性質 1 を満足したとき、ある p 以上の全ての k について

$$\rho(\mathbf{S}_k^-) < 1 \quad \text{および} \quad \rho(\mathbf{S}_k^+) < 1$$

であれば、反復計算は真値へ収束する。

典型的な模擬回路 6, 18, 30, 56, 118 節点について性質 1 および 2 を調べてみる。第 2 表はたとえば、 R/X が 0.0~0.1 の間にある枝が全体の枝に占める割合（百分率）を示したもので、0.1 間隔にまとめて表わした。118 節点では R/X が 0.26~0.36 の間にある枝が 70% 近くを占めている。これらの回路についてガウス-ザイデル法 ($\omega=1.0$) によるくり返し行列の絶対値最大の固有値を第 3 表に示した。6 節点回路を除いて虚部は実部に比べ 1% 以下となっている。

絶対値最大の固有値 λ_1 および $\rho(\mathbf{S}_k^+)$ と $\rho(\mathbf{S}_k^-)$ は、付録 I および II が示すように同一のくり返し計算法から得られる。

第 1 図の 6 節点回路（第 2 表で用いた 6 節点回路の R/X を 1/3 とし対称容量はない）について、ガウス-ザイデル法 ($\omega=1.0$) の $\rho(\mathbf{M})$ 、および真値 E を用いないで近似的に

$$r_i(k) \approx (P_i - jQ_i) / \{\bar{E}(k)\}^2$$

として求めた $\rho(\mathbf{S}_k^+)$ と $\rho(\mathbf{S}_k^-)$ 、および望ましい解が実部は 1.0 付近で虚部は小なることから

第 3 表 模擬回路におけるガウス-ザイデル法のくり返し行列の絶対値最大固有値 ($\omega=1$)Table 3. Maximal eigenvalue of Gauss-Seidel iterative matrix for test systems. ($\omega=1.0$)

節点数	絶対値最大固有値	節点数	絶対値最大固有値
6	0.783063 - j0.014741	57	0.982868 + j0.003808
18	0.977349 + j0.004999	118	0.997403 - j0.000706
30	0.974201 + j0.004413

(基準接点: 1, 電圧: 1.05 + j0.0)

第 1 図 6 節点回路

Fig. 1. A sample network with 6 busses.

$$r_i^0 \approx P_i - jQ_i$$

と近似して $\rho(S_0^+)$ と $\rho(S_0^-)$ を計算した結果を第 4 表に示す。反復計算は 15 回行なわれた。注入電力は第 5 表にある。これによれば $\rho(S_k^-) > \rho(M)$ であり、線形問題における収束の速さに比べて、潮流計算法では収束が遅くなることがわかる。

4. 誤差の評価と誤差修正法

与えられた回路の条件がくり返し計算法の収束条件を満足していれば、加速法を含めた反復計算が実行できる。このとき (4) 式を変形するために、 p 番目の要素が

$$\dot{I}_p = (P_p - jQ_p) / \bar{E}_p - \dot{y}_{pn} \bar{E}_n$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

であるベクトル I を用い

$$\varepsilon(m) = N^{-1} \{I - I(m)\}$$

とおけば (4) 式は

$$E(m) = ME(m-1) + N^{-1}I - \varepsilon(m-1)$$

$$= M^m E(0) + (I + M + \dots + M^{m-1})N^{-1}I$$

$$- [M^{m-1}\varepsilon(0) + \dots + M\varepsilon(m-2) + \varepsilon(m-1)] \dots (11)$$

ここで I : 単位行列

となる。

反復計算を実行すれば (11) 式の右辺第二項が真値の電圧へ、他の項はすべてある誤差範囲に収束する。また反復計算の m 回目における真値との誤差は、(11)式を用いて

$$\Delta(m) = \sum_{i=m}^{\infty} M^i N^{-1}I + \sum_{i=0}^{m-1} M^{m-1-i} \varepsilon(i)$$

$$- M^m E(0) \dots (12)$$

と示される。これを Z -変換およびその逆変換によって、くり返し行列 M の異なる固有値 λ_k , $k=1, 2,$

第 4 表 6 節点回路における種々のスペクトル半径 (ガウス-ザイデル法)

Table 4. Various spectral radii for 6 busses system.

加速定数 ω	1.0	加速定数 ω	1.0
$\rho(M)$	0.7118 - j0.0	$\rho(S_0^+)$	0.66916 + j0.00807
$\rho(S_k^+)$	0.61921 - j0.00705	$\rho(S_0^-)$	0.72523 + j0.04572
$\rho(S_k^-)$	0.76504 + j0.03314		

第 5 表 6 節点回路の注入電力

Table 5. Injection power for 6 busses system.

節点番号	注入電力 (単位法)	節点番号	注入電力 (単位法)
2	0.5 - j0.185	5	-0.3 + j0.18
3	-0.55 + j0.13	6	-0.5 + j0.05
4	0.0		

..., r を用いて表現すれば [収束の条件から $\rho(M) = \max_k |\lambda_k| < 1$],

$$\Delta(m) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{mk} A_{kl} \left\{ \frac{1}{(1-\lambda_k)^l} \sum_{i=0}^{l-1} m C_i \lambda_k^{m-i} (1 - \lambda_k)^i N^{-1} I - m C_{l-1} \lambda_k^{m+1-l} E(0) \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{m-2} m_{-1-i} C_{l-1} \lambda_k^{m-l-i} \varepsilon(i) \right\} + \varepsilon(m-1)$$

$$\dots (13)$$

ただし、 m_k : M の最小多項式における λ_k

の次数、 A_{kl} : 文献 (5) で示される行列

と書ける。また

$$m C_i = m! / \{i!(m-i)!\} \quad m < i \text{ で } m C_i = 0$$

とする。

(13) 式で示される誤差は M の固有値がすべて単根であれば、反復計算の各ステップごとに λ_k 倍ずつ規則的に減少していくのがわかるが、多重根をもつ場合 (特に絶対値最大の固有値の場合) には、係数 $m C_i$ の影響により規則性が失われ、ステップの増加につれて振動をもつ減少パターンとなる。

ここで M の固有値の分布が $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_{n-1}|$ の場合を考える。(以下で説明するが誤差評価のアルゴリズムは $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$ であればよい) このとき (13) 式は

$$\Delta(m) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left\{ \frac{\lambda_k^m}{1-\lambda_k} N^{-1} I + \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_k^{m-1-i} \varepsilon(i) - \lambda_k^m E(0) \right\} + \varepsilon(m-1) \dots (14)$$

となり、反復計算結果の 1 ステップ差は

$$\delta(m) \triangleq E(m+1) - E(m) = \Delta(m) - \Delta(m+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} A_k (1-\lambda_k) \left\{ \frac{\lambda_k^m}{1-\lambda_k} N^{-1} I \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{m-2} \lambda_k^{m-1-i} \varepsilon(i) - \lambda_k^m E(0) \right\}$$

$$+(\mathbf{I}-\mathbf{M})\varepsilon(m-1)-\varepsilon(m) \dots\dots\dots (15)$$

と書ける。ここで、ある $p(m > p)$ において $|\lambda_2/\lambda_1|^p$ が無視できる場合には

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{A}_k(1-\lambda_k) \left\{ \frac{\lambda_k^m}{1-\lambda_k} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{I} + \sum_{i=0}^{m-1-p} \lambda_k^{m-1-i} \varepsilon(i) - \lambda_k^m \mathbf{E}(0) \right\}$$

の項を $k=1$ だけで近似できるから、(14) と (15) 式を用いて

$$\Delta(m) = \frac{\delta(m)}{1-\lambda_1} - \frac{1}{1-\lambda_1} \left\{ \sum_{k=2}^{n-1} \mathbf{A}_k(\lambda_1 - \lambda_k) \sum_{i=m-p}^{m-2} \lambda_k^{m-1-i} \varepsilon(i) - (\lambda_1 \mathbf{I} - \mathbf{M}) \varepsilon(m-1) + \varepsilon(m) \right\} \dots\dots\dots (16)$$

が得られる。

線形方程式では (16) 式の右辺第二項は存在しないから、 $|\lambda_2/\lambda_1|^m$ が無視できれば、すぐに右辺第一項の $\delta(m)/(1-\lambda_1)$ によって誤差評価ができる。⁽¹⁾したがって、くり返し計算法の収束の早さが $|\lambda_1|^m$ に依存するのに比べ、誤差修正法では $|\lambda_2|^{m'}$ によって収束の早さが決まる。 $1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ から

$$m/m' \approx \log |\lambda_2| / \log |\lambda_1| \geq 1 \dots\dots\dots (17)$$

となって、一般に誤差修正法は有効なことがわかる。

準線形方程式では (16) 式の右辺第二項の誤差分が存在し、これは評価できない。しかし反復の $p+1$ -ステップで第一項が評価できれば、このぶんだけ誤差修正を行なう〔すなわち反復計算をここで打ち切り、新しい初期想定値を $E(p) + \delta(p)/(1-\lambda_1)$ とする〕ことによって新しく出発した反復計算では $\varepsilon(i)$, $i=0, 1, 2, \dots$ を著るしく減少させることができる。このような過程をくり返せば収束を早められる。

さて、初期想定値の変更を決める反復計算の打ち切り回数 p は、乗べき法の収束に要したステップ数を用いればよい。実行中のくり返し計算法におけるくり返し行列の最大固有値 λ_1 は、たとえば加速ガウス-ザイデル法の λ_1 は、(3) 式での ω を用い次式のベクトル $V(m)$ から得られるレイリー商の収束値により決まる。(付1)式参照)

$$\begin{aligned} \dot{V}_i' &= \frac{1}{\dot{y}_{ii}} \left\{ - \sum_{j=1}^{i-1} \dot{y}_{ij} \dot{V}_j(m+1) - \sum_{j=i+1}^{n-1} \dot{y}_{ij} \dot{V}_j(m) \right\} \\ \dot{V}_i(m+1) &= \dot{V}_i(m) + \omega \{ \dot{V}_i' - \dot{V}_i(m) \} \\ i &= 1, 2, \dots, n-1 \dots\dots (3') \end{aligned}$$

これは、(3) 式で $\dot{E}_n$, P , $Q=0$ とした加速計算式と同一である。誤差修正法を第2図に示す。アルゴリ

†: $\|\lambda(m) - \lambda(m-1)\| < \varepsilon_1$ とあれば不要

*: p は $\lambda(m)$ の収束ステップ数

$\lambda(m)$ の収束以前のステップでは No へ向う。 $\tau=1, 2, 3, \dots$

第2図 誤差修正法のフローチャート

Fig. 2. Algorithm of error correction method.

ズムは

(i) 初期想定値 $E(0)$, $V(0)$ を与え $m=0$ とする。

(ii) $m=m+1$ とし、(3) および (3') 式から新しい反復解 $E(m)$, $V(m)$ を求める。

(iii) 推定最大固有値 λ_1 を $\lambda_1(m)$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \dot{V}_i(m) \bar{V}_i(m-1)}{\sum_{i=1}^{n-1} \dot{V}_i(m-1) \bar{V}_i(m-1)}$$

より求める。 $\|\lambda_1(m) - \lambda_1(m-1)\| < \varepsilon_1$ ならば $p=m$ とおき、以後 (ii) の $V(m)$ の計算および (iii) を止める。

$$(iv) \quad \hat{E}(m) = E(m-1) + \frac{1}{1-\lambda_1} [E(m) - E(m-1)]$$

を求め、 $\|\hat{E}(m) - \hat{E}(m-1)\| < \varepsilon_2$ ならば、(vi) へいく。

(v) $m \neq p$, $\tau=1, 2, \dots$ ならば (ii) へ、 $m = \tau p$ ならば $E(m) = \hat{E}(m)$ として (ii) へもどる。

(vi) $\hat{E}(m)$ を用いて潮流計算を行なう。

以上は絶対値最大の固有値が唯一の場合のアルゴリズムである。これは $|\lambda_2/\lambda_1|^p$ の項が無視できるステップまで反復され、(16) 式の右辺第二項の誤差は評価しないから $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}|$ の場合にも適用できる。

なお、誤差修正法は $1/(1-\lambda_1)$ および $\{E(t) - E(t$

—1)の精度に大きく依存し、このため次元が増大し λ_1 の実部が1に近づくと、この両者のけた落ちに影響される。したがって、回路網の分割やインピーダンス負荷法(負荷をインピーダンスで表現する)などを適用して、これらの欠点を改善する方法が考えられる。

5. くり返し行列の固有値について

くり返し行列 $\mathbf{M}$ の絶対値最大の固有値 λ_1 とアドミッタンス行列 $\mathbf{Y}$ とは密切に関係する。収束条件として

性質5 $\rho(\mathbf{M}) < 1$ なるための十分条件は、基準節点を n としたとき $|\dot{y}_{ii}| \geq \sum_{j \neq i}^{n-1} |\dot{y}_{ij}|$, $i=1, 2, \dots, n-1$ が満足され1節点以上で不等号が成立すればよい。この性質5は対地キャパシタンスや基準外巻線比変圧器、あるいは枝のリアクタンス分が容量性となる位に大きな直列キャパシタが存在しない回路網では、基準節点に隣接した節点で性質5の不等号が成立し、したがって、 $\rho(\mathbf{M}) < 1$ となる。一般にこれらが存在する回路網では λ_1 および第3章で示した $\rho(\mathbf{S}_0^+)$ と $\rho(\mathbf{S}_0^-)$ を計算し、収束の判定を行なう必要がある。

次に λ_1 が唯一である条件を、加速なしのガウス-ザイデル法について考える。節点サセプタンス行列の場合については論文⁽¹⁾で述べたが、一般に節点アドミッタンス行列の場合にも番号順の若い節点と必ず隣接するように番号づけを行えば⁽¹⁾第3章の性質1を満足する回路では $\mathbf{M}$ の実部が分解不可能な非負行列(節点1を除く)となり、固有値の虚部は実部に比べて小さいことを考えれば λ_1 は唯一といえる。加速定数が増せば、 λ_1 の実部は減り虚部は増える。

さて、 $|\lambda_1|=1$ であったり $\rho(\mathbf{S}_0^+)$, $\rho(\mathbf{S}_0^-) < 1$ が満足されない回路条件では、回路の分割かインピーダンス負荷法がくり返し計算法には適当である。

インピーダンス負荷法はよく知られているように負荷節点 p をインピーダンスに表現し、

$$1/\dot{z}_{p0} = \dot{y}_{p0} = -(P_p - jQ_p)/|\dot{E}_p(0)|^2 \dots (18)$$

を用いて($\dot{E}_p(0)$ は推定された節点 p の電圧)、節点 p の駆動点アドミッタンス $\dot{y}_{pp}$ を

$$\dot{y}_{pp}' = \dot{y}_{pp} + \dot{y}_{p0} \dots (19)$$

に変える。負荷節点を選ばれるのは(18)および(19)式が示すように、 $\dot{y}_{pp}$ と $\dot{y}_{p0}$ の実部と虚部の付号が一致するためであり、このとき $|\dot{y}_{pp}'| > |\dot{y}_{pp}|$ となつて $\rho(\mathbf{M})$ は小さくなる。

たとえば118節点回路において、大きな負荷をもつ5個の節点をインピーダンスで表現した場合、ガウス-ザイデル法における絶対値最大の固有値は0.997403

— $j0.000706$ から $0.963703 - j0.003674$ に減少するしたがって、収束は早くなる。ただし、インピーダンスで表現された節点の推定電圧の大きさ $|\dot{E}_p(0)|$ か真の電圧の大きさ $|\dot{E}_p|$ に近くなければ、収束しない場合も生じるがこれについては別文にて論ずる。

6. 計算例

AEP 模擬回路である30節点回路についての適用例を述べる。ここでは基準外巻線比変圧器は考えず、基準節点を除いた全ての節点で、注入電力は指定される。

誤差修正法とガウス-ザイデル法の比較 第3図で第1節点の実部について、両者の収束の早さを比較し図示した。 λ_1 の収束は1ステップ差が 10^{-5} 以下になるのに $\omega=1.0$ では29ステップ、 $\omega=1.4$ では17ステップを要した。このため誤差修正法の収束曲線はこのステップの整数倍付近で不安定となる。なお、真値は注入電力の絶対値が 10^{-4} 以下となったときの値を用いた。第4図は加速定数を変えて計算したときの電圧の絶対値の1ステップ差が 10^{-5} 以下となるまでに要した反復計算回数を示している。この例でわかるように誤差修正法は加速計算法に比べ早いステップで収束し、加速定数 ω への依存度は小さいことがわかる。ただし、最適な ω に近づくほど収束の早さの差は小さくなっていく。これは第5図が示すように ω の増加によって λ_1 の大きさが減少し、 λ_2 の大きさが

第3図 30節点回路の第1節点(実部)の収束の比較

Fig. 3. Convergence for gauss-seidel iterative method and error correction method.(30 buses test system)

第4図 30 節点回路において収束に要する反復回数の比較 ($|1 \text{ ステップ差}| < 10^{-5}$)

Fig. 4. Effect of error correction method on the rate of convergence for Gauss-Seidel iterative method. (30 busses test system)

$|\lambda_1|$ に近づいて乗べき法が収束しないためと考えられる。よって (17) 式から両者の収束の早さは接近したものとなった。以上のことから誤差修正法における加速定数は、乗べき法が早く収束する ($|\lambda_2|/|\lambda_1|$ が小さくなる) ように選ばねばいことがわかる。

収束の判定 第3図で $\omega=1.4$ のときのガウス・ザイデル法における実数部の収束の早さを示す係数 (傾き) γ_{real} は平均して 0.9460, 虚数部の γ_{img} は平均して 0.9342 である。すなわち1回の反復ごとに実部の誤差は γ_{real} 倍に減少していく。第3章で述べた収束の判定に用いるスペクトル半径を乗べき法により計算した結果を第6表に示す。この表から

$$\rho(M) \leq \gamma_{\text{real}} < \rho(S_k^-)$$

の関係が得られる。また近似計算 $\rho(S_0^-)$ および $\rho(S_0^+)$ は収束判定に便利な指標であることがわかる。

第6表 30 節点回路における種々なスペクトル半径
Table 6. Various spectral radii for 30 busses test system.

	加速定数 $\omega=1.4$
$\rho(M)$	$ 0.942023 + j0.011206 $
$\rho(S_k^-)$	$ 0.957716 + j0.018065 $
$\rho(S_k^+)$	$ 0.926218 + j0.004468 $
$\rho(S_0^-)$	$ 0.951087 + j0.025022 $
$\rho(S_0^+)$	$ 0.932784 - j0.002603 $
$\frac{ E_1 - E_1(70) _{\text{real}}}{ E_1 - E_1(69) _{\text{real}}}$	0.9464
$\frac{ E_1 - E_1(70) _{\text{img}}}{ E_1 - E_1(69) _{\text{img}}}$	0.9345

第5図 30 節点回路の絶対値最大固有値 (ガウス・ザイデル法)

Fig. 5. Relation between maximal eigenvalue of M and acceleration factor for 30 busses test system.

なお (8), (9) 式が示すように $\rho(S_0^-)$ は電圧の実部の収束に関係する。

7. むすび

本論文でくり返し計算法を線形方程式ではない電力潮流計算に適用した場合の収束の判定および真値との誤差の関係が導かれ、この誤差解析からくり返し計算法の収束を早める誤差修正法を準線形問題へ適用するアルゴリズムが得られた。

誤差修正法はくり返し計算法の利点を保持でき、加速計算法よりも収束は早いなどの利点を有する。また、本文で得られた収束の判定法は従来明白でなかった潮流計算の収束を判定するのに役だつと考えられる。これによってくり返し計算法および誤差修正法が適用可能ないくつかの回路条件が得られたが、また、適用不可能な場合も明らかになった。この中で回路網の次元の増大はくり返し計算法の収束を可能にする基準節点に隣接した枝のインピーダンス効果を小さくすることや、誤差修正法の精度を悪くすることになり、数百次元の回路では解析できなくなると考えられる。

現在、Tinney 氏らの最適順序づけ消去法を用いて大次元回路をニュートン・ラフソン法で解く方法⁽⁴⁾と、回路網を分割して、従来の方式を適用する考えがあるが、オンライン潮流計算と信頼度制御において回路変更や入力処理を含む計算時間を考慮すれば後者が有力である。しかし、分割の方式や潮流計算の収束の議論

はいまだ明白でなく、今後に残された問題である。

なお、本論文では基準節点を除いてすべて P - Q 指定としたが、一般に P - V 指定の節点が存在する。これは収束の議論を複雑にするが、インピーダンス負荷法の収束とともに今後論ずる必要があろう。

また、誤差修正法における加速定数の選択の問題も今後議論していきたい。

(昭和46年11月27日受付, 同47年3月29日再受付)

文 献

- (1) 深尾・渡辺: 電学誌 90, 1975 (45-10)
- (2) G. W. Stagg: Computer Methods in Power System Analysis (1968) McGraw-Hill,
- (3) J. H. Wilkinson: The Algebraic Eigenvalue Problem, (1965) Clarendon Press. Oxford,
- (4) W. F. Tinney & C. E. Hart: IEEE Trans. Power Apparatus Syst., PAS-86, No. 11 p. 1449 (1967)
- (5) T. Fukao & S. Watanabe: "Error and Limitation of Network Size in Iterative Method for Large Scale Power System Network," presented at the IEEE Winter Power Meeting, (1971) New York, N. Y.,
- (6) R. S. Varga: Matrix Iterative Analysis, (1962) Prentice-Hall
- (7) E. Isaacson & H. B. Keller: Analysis of Numerical Methods (1966) John Wiley & Sons

付 録

(I) 絶対値最大の固有値の計算 乗べき法は行列 M の絶対値最大の固有値 λ_1 に対応する固有ベクトル V を反復計算により求める方法である。すなわち零でない初期ベクトル $V(0)$ から出発して

$$V(m) = MV(m-1) \dots \dots \dots (\text{付1})$$

を反復計算していけばよい。(付1)式は(4)式において、 $I(m)=0$ としたことに他ならないから、基準節点の行と列を除いた節点アドミッタンス行列を用い

$$YV=0 \dots \dots \dots (\text{付2})$$

をヤコビ法、ガウス-ザイデル法または加速計算法で反復計算すれば、収束したベクトル V がそれぞれの計算法に対応したくり返し行列の λ_1 の固有ベクトルになる。このとき λ_1 はレイリー商(ベクトルの内積の比)により精度よく計算され

$$\lambda_1 = \frac{\sum_i V_i(m+1) \cdot \bar{V}_i(m)}{\sum_i V_i(m) \cdot \bar{V}_i(m)} \dots \dots \dots (\text{付3})$$

となる。このことは(13)式の導出と同様に(付1)式の x -変換およびその逆変換から〔係数は(13)式参照〕

$$V(m) = \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^{m_k} A_{Klm} C_{l-1} \lambda_K^{m+1-l} V(0) \dots \dots \dots (\text{付4})$$

が得られ、したがって λ_1 が単根で $|\lambda_2/\lambda_1|^m$ が無視できる m ステップ以後では、(付3)式から λ_1 が求められる。また λ_1 の収束過程から、 λ_2 以下の固有値が無視できる計算回数が定められる。なお $V(m)$ は、 $\lambda_1 < 1$ であることから零ベクトルに収束するので、たとえば(付1)式で

$$V'(m) = MV(m-1) \\ V(m) = V'(m) / \sum_i V_i'(m) \cdot \bar{V}_i'(m)$$

と正規化して反復計算する。このとき(付3)式は、

$$\lambda_1 = \sum_i \bar{V}_i(m) V_i'(m+1) \dots \dots \dots (\text{付5})$$

ここで $\bar{V}_i(m) : V_i(m)$ の共役複素数となる。⁽⁷⁾

(II) $\rho(S_k^-)$ および $\rho(S_k^+)$ の計算 加速定数 ω のガウス-ザイデル法の乗べき計算は、(付1)式を各要素に書きなおせば(基準節点は n 番目)

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_i' &= -\frac{1}{\dot{y}_{ii}} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \dot{y}_{ij} \dot{V}_j(m) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i+1}^{n-1} \dot{y}_{ij} \dot{V}_j(m-1) \right\} \\ \dot{V}_i(m) &= \dot{V}_i(m-1) + \omega \{ \dot{V}_i' - \dot{V}_i(m-1) \} \\ &\quad i=1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (\text{付6})$$

と示される。このとき(付3)式によって $\rho(M)$ に絶対値が等しい λ_1 が求められる。しかるに $\rho(S_k^-)$ および $\rho(S_k^+)$ は(9)および(10)式が示すように(付6)式の $\dot{V}_i'$ の右辺へそれぞれ、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\dot{y}_{ii}} \frac{P_i - jQ_i}{\bar{E}_i \bar{E}_i(k)} \dot{V}_i(m-1) \text{ および} \\ & \frac{1}{\dot{y}_{ii}} \frac{P_i - jQ_i}{\bar{E}_i \bar{E}_i(k)} \dot{V}_i(m-1) \dots \dots \dots (\text{付7}) \end{aligned}$$

を加えて反復計算し、(付3)式を計算することにより求められる。

近似計算では個々の k (ステップ数) における $\rho(S_k^-)$ と $\rho(S_k^+)$ を求めず、(付7)式の代わりに

$$\mp \frac{1}{\dot{y}_{ii}} \frac{P_i - jQ_i}{\{\bar{E}_i(m-1)\}^2} \dot{V}_i(m-1)$$

を用いる。 $\dot{E}(m-1)$ は $m=1$ から同時にはじまりくり返し計算法により得られる。また、この $\dot{E}(m-1)$ を用いずに近似した $\rho(S_0^-)$ と $\rho(S_0^+)$ は、(付7)式の代わりに

$$\mp \frac{1}{\dot{y}_{ii}} (P_i - jQ_i) \dot{V}_i(m-1)$$

を(付6)式の $\dot{V}_i'$ の右辺へ加え、反復計算される。