UDC 621.313.2.012.6: 621.311.69.018.752

論文

51-B 15

チョッパ駆動される直流電動機の伝達関数と動特性の評価

名古屋工業大学

東京工業大学

松井 信行

宮入 庄太

1. ま え が き

直流電動機はその優れた制御性がゆえに、古くから可変速駆動源として広範囲に利用されてきた。近年のサイリスタ技術の進展に伴い、位相制御整流回路やチョッパ回路といった、いわゆる可変電圧サイリスタ電源が大容量のものまで比較的簡単に製作できるようになったので、その適用範囲は一層拡がりつつある。

このような動向に伴って、サイリスタ電源で駆動される直流電動機の特性に関する研究も、すでに数多く発表されている。これらの中には場合によっては避けられない電機子電流の不連続モードが、電動機の定常特性や始動特性に及ぼす影響などについての詳細な報告もある⁽¹⁾⁽²⁾。

ところで、直流電動機のなかでも特に高速応答など制御性を重視したものでは、高トルク、低慣性への努力が払われ、その技術的成果として、機械的時定数が10ms程度（たとえば、富士通 Gettys Fanus DC サーボモータ）のものまでが出現している現状である。このような電動機を含む系の動特性を取り扱う場合には、従来無視されていた電氣的時定数も考慮する必要がある。さらに、系の解析や設計に際しては、サイリスタ電源を含めた全体の伝達関数を得ることが重要である。ところで、このような伝達関数を求めようとすれば、サイリスタの非線形性や複雑な回路動作のために、かなり困難な問題に逢着する。

サイリスタ電源のようにその動作が連続系とは異り

一種の繰返し過渡現象を行なう回路を含む系では、各周期ごとの平均値の変化に着目して、その応答あるいは伝達関数を取り扱う。このような手法の一つとしては、サイリスタ電源をサンブラとホールドで近似的に代表させ、Z変換を用いる方法が知られている⁽³⁾。しかし、比較的簡単なモデルについてもその数式的処理はかなり複雑となる上に、電動機負荷に特有の電流不連続モードに対してはそのままの形では適用不可能である。

また、仁田氏は定常状態に対する電圧、電流などの平均値を用いた平衡式をもとに、系を連続系に近似して微少変化入力に対する出力を求めて伝達関数を取り扱っている⁽⁴⁾。この方法は優れた方法であるが、電氣的時定数が考慮されていないし、また、得られた伝達関数の物理的性質があまり明確にされていないように思われる。

本論文では上記のような状況に鑑み、チョッパ駆動される直流電動機の系（以下、記述の簡便さからチョッパ系と略記する）の伝達関数を求める新しい手法と、その結果を明らかにしている。その主たる内容と特徴は、次のようである。

(1) 電算機処理に適した状態推移法により記述される定常状態をもとに、微少振動方程式を一種の差分方程式の形に記す。

(2) 得られた差分方程式を連続系に対する状態方程式

$$P\bar{X} = \bar{A}\bar{X} + \bar{B}\bar{u}$$

の形に書き改め、これから伝達関数を求める。

(3) 電氣的時定数も考慮して、数式的処理を行ない、これを無視することのできる範囲を、伝達関数の極の観点から明白にした。

(4) 電流不連続モードにおける伝達関数の性質を

Transfer Functions and Estimation of Dynamic Behavior of D.C. Separately Excited Motor Controlled by the Thyristor Chopper Circuit. By Nobuyuki Matsui, Member (Nagoya Institute of Technology) & Shota Miyairi, Member (Tokyo Institute of Technology)

松井信行：正員，名古屋工業大学電気工学科講師

宮入庄太：正員，東京工業大学電気工学科教授

明らかにして、応答の悪化を定量的に明確にした。

2. チョップパ系の伝達関数の考え方とその導出法

本章ではチョップパ駆動される直流他励電動機系をとりあげ、系の伝達関数のとらえ方とその導出法につき説明することにしよう。

〈2・1〉 チョップパ系の伝達関数のとらえ方

チョップパ系はもとより、サイリスタ電源を含む系の定常的な動作は、第1図のように記すことができる。そこでいま何らかの微小な外乱が加えられると、その後の

(1) 各モード遷移時点

(2) したがって、モード遷移時点における状態量が、定常状態の値からずれてくる。そこで、周期 T は微小な外乱が入った後も一定であるとし、たとえば $t = nT + \tau_1$ における状態量に着目すれば、

$$\begin{cases} \bar{V}(n+1 \cdot T + \tau_1) = H_V \cdot \bar{V}(nT + \tau_1) + h \cdot \bar{u} \\ \bar{y}(n+1 \cdot T + \tau_1) = \bar{c} \cdot \bar{V}(n+1 \cdot T + \tau_1) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $\bar{V}$: 状態量の微小変動分、 $\bar{u}$: 微小変動入力、 $\bar{y}$: 微小変動出力、 $\bar{c}$: 出力係数行列

なる関係を得る。

ところで、チョップパ系のように電動機を含む系で電動機速度を出力と考えると、その応答はチョップパ周期に比較して一般に緩慢である。制御理論によれば⁽¹²⁾、サンプリング周波数が系の固有周波数の10倍以上の値をとる場合には、連続系として取り扱ってもよいとされているから、上記の条件のもとでは、(1)式で与えられる系の動作を、

$$\begin{cases} P\bar{V} = \bar{A} \cdot \bar{V} + \bar{b} \cdot \bar{u} \\ \bar{y} = \bar{c} \cdot \bar{V} \end{cases} \quad (2)$$

で記される連続系の応答として取り扱うことができよう。(2)式で表現される系は第2図の状態変数図で記すことができるから、この系の伝達関数は、

$$G(S) = \bar{c} \cdot \text{adj} |SI - \bar{A}| \cdot \bar{b} / \det |SI - \bar{A}| \quad (3)$$

という形で求められ、これの極と零点から系の過渡的な問題を議論できる。その場合、

(1) 微小変動時の系を記述する(1)式を導く上で、それぞれ微小に変化するモード遷移時点の計算をどのように処理するか。

(2) 連続系の状態方程式(2)式の係数行列 $\bar{A}$, $\bar{b}$ をもとのチョップパ系との関連でどう定めればよいか、が明確にされなければならない。以下、具体的な例を

第1図 サイリスタ電源を含む系の動作

Fig. 1. Steady state operation of the thyristor system.

第2図 状態変数図

Fig. 2. State variable diagram.

第3図 チョップパ系の定常状態の動作

Fig. 3. Steady state operations of the chopper system.

説明しよう。

〈2・2〉 チョップパ系の定常状態の解析

チョップパ系の解析を簡単に述べる前に、以下のような一般的な仮定をおく⁽¹⁰⁾。

(1) チョップパ回路の動作は理想的で、方向性をもつスイッチとして取り扱えるものとする。

(2) 負荷トルクは一定で、制動係数は無視する。

上記の仮定のもとで、定常状態におけるチョップパ系の動作波形は、第3図に示すように電機子電流が連続する場合と不連続になる場合に分けて考えられる。

(1) 状態方程式 第3図のオンモードに対しては図の記号を用いて,

$$\left. \begin{aligned} e_d &= (R + L P) i + K \omega, \quad e_d = V_s \\ K i &= J P \omega + \tau_l \quad (\tau_l = T_l \text{ 一定}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

なる関係を得る。ここで,

$$\mathbf{X} = [i, \omega]^t, \quad \mathbf{u} = [e_d, \tau_l]^t \dots\dots (5)$$

とするとき, (4) 式を状態方程式,

$$P \mathbf{X} = \mathbf{A}_{on} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B}_{on} \cdot \mathbf{u} \dots\dots (6)$$

に書き改めると, 係数行列は次式で与えられる。

$$\mathbf{A}_{on} = \begin{bmatrix} -R/L & -K/L \\ K/J & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{on} = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} \dots\dots (7)$$

ところで, オンモード以外のモードに対しては(4)式で,

(i) 短絡モード (添字 sh); $e_d = 0$

(ii) オフモード (添字 off); $e_d = K\omega, i = 0$

とすれば良いわけで, それぞれのモードに対する係数行列は次のように決められる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_{sh} &= \mathbf{A}_{on}, \quad \mathbf{B}_{sh} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{off} &= \mathbf{O}, \quad \mathbf{B}_{off} = \mathbf{B}_{sh} \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

ここで, 新たに状態量として,

$$\mathbf{V} = [\mathbf{u}, \mathbf{X}]^t$$

と選び, 仮定より入力 $\mathbf{u}$ は一定 ($P\mathbf{u} = \mathbf{0}$) であるからたとえばオンモードについて,

$$P \mathbf{V} = \mathbf{A}_{on} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{on} & \mathbf{A}_{on} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V} \dots\dots (9)$$

と記すと, 他のモードについても $\mathbf{A}_{0sh}, \mathbf{A}_{0off}$ を(8)式の係数行列を用いて記すことができる。

なお, 一般の直流電動機では過渡応答に与える電機子インダクタンスの影響は無視し得る場合が多いが, サーボモータなども含めて取り扱う場合には必ずしもそうはならない。したがって, 電機子インダクタンスも考慮した関係式となっている。

(2) 電流不連続時の関係 この場合, チョップパがオフに転ずる時点, すなわち, $t = nT + \tau_1$ における状態量 $\mathbf{V}(nT + \tau_1)$ に着目すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0(n+1 \cdot T + \tau_{10}) \\ &= \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) \cdot \mathbf{V}_0(nT + \tau_{10}) \\ &= \Phi_{on}(\tau_{10}) \cdot \Phi_{off}(T - \tau_{20}) \Phi_{sh}(\tau_{20} \\ &\quad - \tau_{10}) \cdot \mathbf{V}_0(nT + \tau_{10}) \dots\dots (10) \end{aligned}$$

なる関係を得る。ここで, $\Phi_{on}, \Phi_{sh}, \Phi_{off}$ は各モードに対する遷移行列である。また, モード遷移時点 τ_1, τ_2 および状態量 $\mathbf{V}$ に添字 0 を付したのは, それらが定常状態における値であることを区別するためである。

ここで, 定常状態においては, $\mathbf{V}_0(n+1 \cdot T + \tau_{10}) = \mathbf{V}_0(nT + \tau_{10})$ であるから, これを

$$\mathbf{V}_0(n+1 \cdot T + \tau_{10}) = \mathbf{V}_0(nT + \tau_{10}) = \mathbf{V}_0(\tau_{10})$$

と略記し, かつ, $\mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20})$ を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{X}$ に対する小行列に分けて,

$$\mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) = \begin{bmatrix} \alpha_d & \mathbf{0} \\ \gamma_d & \beta_d \end{bmatrix}$$

と記すと, $\mathbf{V}_0(\tau_{10})$ は次式を用いて計算できる⁽⁹⁾。

$$\mathbf{V}_0(\tau_{10}) = [\mathbf{I} - \beta_d]^{-1} \cdot \gamma_d \cdot \mathbf{u}_0(\tau_{10}) \dots\dots (11)$$

(3) モード遷移条件 電流不連続時においてはモード遷移時点 τ_{10} はチョップパの duty factor が与えられると既知量となるが, τ_{20} は状態量相互の関係から決まるもので, この場合 $i(\tau_{20}) = 0$ なる条件が成立する。そこでこれを

$$\mathbf{F}_2^t \mathbf{V}(\tau_{20}) = 0, \quad \mathbf{F}_2^t = [0, 0, 1, 0] \dots\dots (12)$$

と記し, これをモード遷移条件と呼ぶ。

(4) 電流連続時の関係 この場合も<2・2>節(2)と同様の考え方で

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0(\tau_{10}) &= \mathbf{H}_c(\tau_{10}) \cdot \mathbf{V}_0(\tau_{10}) \\ &= \Phi_{on}(\tau_{10}) \cdot \Phi_{sh}(T - \tau_{10}) \cdot \mathbf{V}_0(\tau_{10}) \\ &\dots\dots (13) \end{aligned}$$

と記すことができ, $\mathbf{H}_c(\tau_{10})$ を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{X}$ に対する小行列に分けると,

$$\mathbf{V}_0(\tau_{10}) = [\mathbf{I} - \beta_c]^{-1} \cdot \gamma_c \cdot \mathbf{u}_0(\tau_{10})$$

から, モード遷移時点 τ_{10} における状態量が計算できる。

<2・3> 微少変動時の系の動作 定常状態の動作点近傍における微少変動を考える場合, 電源電圧, 負荷トルク, オン期間 τ_{10} などの微少変化が考えられる。これらが系に及ぼす影響を考えると, 電源電圧の変動はチョップパのオン期間 τ_1 の変動と同等に扱えるし, 負荷トルクの変動も定値制御系では, 結局はオン期間 τ_1 の変動として取り扱うことができる。このような理由から, チョップパのオン期間 τ_1 が定常値 τ_{10} から $\tau_{10} + \tau_1$ (τ_1 : 変化分) に微少変化した場合の系の応答を考えてみよう。

(1) 電流不連続時の微少変動 電流不連続時にチョップパのオン期間が上記のように変化すると, 他の諸量もそれぞれ次のように変化する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_2 &= \tau_{20} + \tau_2 \\ \mathbf{V}(nT + \tau_1) &= \mathbf{V}_0(\tau_{10}) + \bar{\mathbf{V}}(nT + \tau_1) \\ \mathbf{V}(n+1 \cdot T + \tau_1) &= \mathbf{V}_0(\tau_{10}) + \bar{\mathbf{V}}(n+1 \cdot T + \tau_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (14)$$

ここで, バーを冠した諸量は定常値からの変化分である。

一方、行列 $\mathbf{H}_d(\tau_1, \tau_2)$ も第1次近似を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_d(\tau_1, \tau_2) &\doteq \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) \\ &+ \partial/\partial\tau_1 \cdot \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) \cdot \bar{\tau}_1 \\ &+ \partial/\partial\tau_2 \cdot \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) \cdot \bar{\tau}_2 \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

と記すことができる。上式で右辺第2項と第3項は、遷移行列の性質⁽⁶⁾と(10)式の関係を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \partial/\partial\tau_1 \cdot \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) &= \mathbf{H}_1^* \\ &= \mathbf{A}_{0on} \cdot \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) - \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) \cdot \mathbf{A}_{0sh} \\ \partial/\partial\tau_2 \cdot \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) &= \mathbf{H}_2^* \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{on}(\tau_{10}) \cdot \boldsymbol{\Phi}_{off}(T - \tau_{20}) [\mathbf{A}_{0sh} \\ &\quad - \mathbf{A}_{0off}] \boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_{20} - \tau_{10}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

と記せるので、定常状態の値を用いて取り扱うことができる。

ところで、微小変動時にも $\mathbf{V}(\overline{n+1} \cdot T + \tau_1)$ と $\mathbf{V}(nT + \tau_1)$ の間には

$$\mathbf{V}(\overline{n+1} \cdot T + \tau_1) = \mathbf{H}_d(\tau_1, \tau_2) \cdot \mathbf{V}(nT + \tau_1) \dots\dots\dots (17)$$

が成立するから、上式に(14)、(15)両式を代入して整理すると、次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\overline{n+1} \cdot T + \tau_1) &\doteq \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) \cdot \bar{\mathbf{V}}(nT + \tau_1) \\ &+ [\mathbf{H}_1^* \cdot \bar{\tau}_1 + \mathbf{H}_2^* \cdot \bar{\tau}_2] \cdot \mathbf{V}_0(\tau_{10}) \dots\dots (18) \end{aligned}$$

(18)式において、 $\bar{\tau}_2$ は未知量である。そこで、 $\bar{\tau}_2$ を定常状態の諸量で記述し、既知量として取り扱うための数式的処理を以下に示す。

(2) $\bar{\tau}_2$ の数式的処理 すでに(12)式で説明したモード遷移条件は $t = nT + \tau_2$ においても成立する。したがって、

$$\mathbf{I}_2^t \cdot \mathbf{V}(nT + \tau_2) = 0 \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 $\mathbf{V}(nT + \tau_2)$ については第1次近似を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(nT + \tau_2) &= \boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_2 - \tau_1) \cdot \mathbf{V}(nT + \tau_1) \\ &\doteq [\boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_{20} - \tau_{10}) + \partial/\partial\tau_1 \cdot \boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_{20} \\ &\quad - \tau_{10}) \cdot \bar{\tau}_1 + \partial/\partial\tau_2 \cdot \boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_{20} - \tau_{10}) \bar{\tau}_2] \\ &\quad \times [\mathbf{V}_0(\tau_{10}) + \bar{\mathbf{V}}(nT + \tau_1)] \\ &\doteq \mathbf{V}_0(\tau_{20}) + \mathbf{A}_{0sh} \cdot \mathbf{V}_0(\tau_{20}) \cdot (\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1) \\ &\quad + \boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_{20} - \tau_{10}) \cdot \bar{\mathbf{V}}(nT + \tau_1) \dots\dots (20) \end{aligned}$$

と記せるので、(19)、(20)式から $\bar{\tau}_2$ に関して次の簡単な関係を導くことができる。

$$\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_1 + \boldsymbol{\eta}_2^t \cdot \bar{\mathbf{V}}(nT + \tau_1) \dots\dots\dots (21)$$

ただし、

$$\boldsymbol{\eta}_2^t = -\mathbf{I}_2^t \cdot \boldsymbol{\Phi}_{sh}(\tau_{20} - \tau_{10}) / \mathbf{I}_2^t \cdot \mathbf{A}_{0sh} \mathbf{V}_0(\tau_{20}) \dots\dots\dots (22)$$

(3) 電流不連続時の微小変動時の差分方程式

(18)式に(22)式を代入し、かつ $\bar{\tau}_2$ はスカラー量であ

ることを考慮して変形すると、

$$\bar{\mathbf{V}}(\overline{n+1} \cdot T + \tau_1) = \mathbf{H}_V \cdot \bar{\mathbf{V}}(nT + \tau_1) + \mathbf{H}_U \bar{\tau}_1 \dots\dots\dots (23)$$

という差分関係を得る。ここで、係数行列 $\mathbf{H}_V, \mathbf{H}_U$ はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_V &= \mathbf{H}_d(\tau_{10}, \tau_{20}) + \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{V}_0(\tau_{10}) \cdot \boldsymbol{\eta}_2^t \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_V & 0 \\ \gamma_V & \mathbf{H}_X \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_U &= [\mathbf{H}_1^* + \mathbf{H}_2^*] \cdot \mathbf{V}_0(\tau_{10}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{h}_U \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

と、定常状態における値を用いて記すことができる。

ここで、 $\alpha_V, \gamma_V, \dots$ などは $\mathbf{V}$ を $\mathbf{u}$ と $\mathbf{X}$ に分けた場合にそれぞれに対応する小行列である。

ところで、 τ_1 が微小変化した場合、 $\mathbf{V}$ の要素 $\mathbf{u}$ は

$$\bar{\mathbf{u}} = 0$$

であるから、これを考慮して(23)式を変動分だけについて書き改めると(24)式の記号を用いて

$$\bar{\mathbf{X}}(\overline{n+1} \cdot T + \tau_1) = \mathbf{H}_X \cdot \bar{\mathbf{X}}(nT + \tau_1) + \mathbf{h}_U \cdot \bar{\tau}_1 \dots\dots\dots (25)$$

と記せる。

(4) 電流連続時の微小変動時の差分方程式 電流連続時にはモード遷移時点は τ_1 だけなので、数式的処理は極めて簡単となり、(23)式で

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_V &= \mathbf{H}_c(\tau_{10}) \\ \mathbf{H}_U &= \mathbf{A}_{0on} \cdot \mathbf{H}_c(\tau_{10}) - \mathbf{H}_c(\tau_{10}) \cdot \mathbf{A}_{0sh} \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

とするだけでよい。

<2・4> 連続系への近似と係数行列 すでに<2・1>

節でも述べたように、(25)式で与えられる系の動作を連続系の状態方程式

$$P \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\tau}_1 \dots\dots\dots (27)$$

で近似する場合、 $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}$ とともに系の諸定数との関係を明確にする必要がある。

一般に(25)式の代数的漸化関係と(27)式の係数行列の間には、次の関係が成立する⁽⁶⁾。

$$\exp(\bar{\mathbf{A}} \cdot T) = \mathbf{H}_X, \quad \mathbf{h}_U = \int_0^T \mathbf{H}_X(\lambda) \cdot \bar{\mathbf{b}} \cdot d\lambda \dots\dots\dots (28)$$

上の関係から、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= (1/T) \cdot \log \cdot \mathbf{H}_X \\ \bar{\mathbf{b}} &= [\mathbf{H}_X - \mathbf{I}]^{-1} \cdot \bar{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{h}_U \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

また、チョップ系の出力として電動機速度を考える場合、 $\bar{\mathbf{c}}$ 行列は、 $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{X}}$ として、

$$\bar{\mathbf{c}} = [0, 1] \dots\dots\dots (30)$$

とすればよい。

3. チョップパ系の伝達関数⁽⁷⁾

前章で説明した方法で求めたチョップパ系の伝達関数について、ここでは幾つかの検討を加えよう。対象とするチョップパ系の細目は第1表に示してある。ここで特性の異なる2種の電動機を用いたのは、後節で電気的時定数の影響を論ずるためである。また、(1)式から(2)式への過程での仮定を満足させるために、チョップパ周期が電動機の機械的時定数の1/10以下になるように選定している。

第1表 チョップパ系の仕様

Table 1. Specifications of the chopper system.

供試電動機	A	B
電動機出力	500 W	600 W
チョップパ周波数	100 Hz	400 Hz
電機子インダクタンス	55 mH	1.04 mH
電機子抵抗	2.7 Ω	1.05 Ω
起電力係数	0.572 VS/rad	0.222 VS/rad
慣性モーメント	0.085 kg·m ²	2.2×10 ⁻⁴ kg·m ²

第4図 伝達関数の極と零点(供試電動機A)

Fig. 4. Poles and zero of the transfer function. (motor A)

第5図 伝達関数の極と零点(供試電動機B)

Fig. 5. Poles and zero of the transfer function. (motor B)

〈3・1〉 チョップパ系の伝達関数の極と零点

前章の理論からもわかるように、チョップパ系の伝達関数の極や零点を論ずる場合、ある特定の回路動作に基づく議論とならざるを得ない。すなわち、微小変動前のある動作点が問題になる。そこで、第4図および第5図では供試電動機AとBを用いたチョップパ系の伝達関数の極と零点を、電動機の負荷トルクに対して示している。ここで、電動機の負荷トルクの大きさはチョップパ系の動作点を代表するもので、各動作点に対して極を×印、零点を○印でプロットしている。

これらの例では、チョップパの duty factor の異なる二つの場合を示したにすぎないが、他の場合も傾向はここに掲げたものと同様である。これらの結果からチョップパ系の伝達関数は2個の極と1個の零点を持つ2次形で表わすことができること、また、電流が不連続になると2個の極のうち一つは極端に小さな値となり他方は逆に極めて大きな値となることがわかる。ここで、以後の説明のためにチョップパ系の伝達関数を次の形で記すことにする。

$$G_{ch}(S) = K_M(S - Z_0) / (S - \mu_1)(S - \mu_2) \quad (31)$$

上式で K_M は利得、 Z_0 は零点、また μ_1, μ_2 は極であって、これらは一般には定常状態における状態量の

第 2 表 電流連続時の利得と零点

Table 2. Gain and Zero of the chopper system in the current continuous region.

duty factor	0.2	0.4	0.6	0.8
零 点	-337	-856	-1,230	-333
利 得	-3,626	-1,429	-995	-3,670

(供試電動機 A)

関数である。

〈3・2〉 電流連続時の伝達関数の性質 電流が連続する場合は、動作状態とは無関係に伝達関数の極は一定値をとり、その値は電動機単体の伝達関数の極⁽⁸⁾と一致する。また、利得 K_M と零点 Z_0 は第2表に示すように動作点により異なる値となるが、いわゆる直流利得は一定で、やはり電動機単体の伝達関数の利得と一致する。そこで、電動機単体の伝達関数を

$$G_M(S) = K_M \cdot Z_0 / (S - \mu_{m1})(S - \mu_{m2}) \dots (32)$$

と記し、その出力を $f_m(t)$ と書くことにすれば、電流連続時のチョップ系の出力 $f_{ch}(t)$ は、

$$f_{ch}(t) = f_m(t) + (1/Z_0) \cdot d/dt \cdot f_m(t) \dots (33)$$

と記せる。上式で第1項は電池などの直流に対する項、第2項はチョップ駆動により表われてくる項と考えることができる。

〈3・3〉 電流不連続時の伝達関数の性質 電流不連続時には、前述したように伝達関数の一つの極 μ_2 は極端に大きな値になってしまう。したがって、この場合の応答を考える場合には、(31)式の μ_1 が支配的となることがわかる。そこで、電流不連続時の伝達関数の極については、以下に説明するような方法で整理すると興味深い。

すなわち、電流不連続時における極 μ_2 の過渡応答に与える影響を無視すると、 K_1, K_2 を定数として速度 ω は次式のように記せる。

$$\omega(t) = K_1 + K_2 \cdot \exp(-\mu_1 \cdot t) \dots (34)$$

そこで、時間としてチョップの1周期ごとを考えると、

$$\lambda = t/T$$

とすれば、(34)式は λ を用いて次の形に記せる。

$$\omega(\lambda) = K_1 + K_2 \cdot \exp(-\mu_1/T \cdot \lambda T) \dots (35)$$

すなわち、系の応答は μ_1/T に支配される。いま、電流不連続時におけるオフモードの期間を $T_{off}(=T - t_2)$ とするとき、 μ_1/T を T_{off}/T に対してプロットすると、供試電動機Aについては第6図、また、供試電動機Bについては第7図に示す結果が得られる。

両者の傾向は同じであるから第6図に示す供試電動

第 6 図 不連続電流時の規格化した極 (供試電動機 A)

Fig. 6. Normalized poles in the current discontinuous mode. (motor A)

第 7 図 不連続電流時の規格化した極 (供試電動機 B)

Fig. 7. Normalized poles in the current discontinuous mode. (motor B)

機Aの場合について検討すると、 μ_1/T は周波数やチョップの duty factor とは無関係に一本の線上に並ぶことがわかる。したがって、電流不連続時のチョップ系の応答は、オフ期間の周期に対する比で完全に規定されるといってよい。

ところで、 $T_{off}/T = 0$ 、すなわち、電流連続時には、 $\mu_1/T = 146$ となることを考えると、不連続時の応答をその時定数でみると 10 倍以上長くなるわけで、それも連続から不連続へ移行すると急激に応答が低下することを第6図は示唆している。この点については後章で詳しく述べるので、ここでは現象の指摘だけに留め

ておこう。

なお、第6図との関連で電機子回路に外部インダクタンスをそう入する効果について、少し説明を加えておこう。第6図には電機子インダクタンスを供試系の1.5倍にした場合の特性根も併記してあるが、この結果をみると、インダクタンスの増加は同一の T_{off}/T に対しては時定数を大きくする結果になるが、負荷トルクを示す点線からわかるように、比較的低い負荷レベルで電流連続となる。したがって、結局は不連続域の縮小による系の応答の改善という効果をもっと考えてよい。なお、供試電動機Bについても第6図と同様の特性が得られるが、傾向は同じであるのでその詳細は割愛する。

〈3・4〉 電気的時定数の影響 従来、電動機の過渡応答を取り扱う場合、電気的時定数を無視する場合が多かったが、サーボモータを用いる場合などでは、これは必ずしも妥当ではない。ここでは伝達関数の極の観点から電気的時定数の影響を簡単に論じておこう。

第4図、あるいは第5図の結果からわかるように電流が不連続となると、伝達関数の極は互に大きく離れる。したがって、両者が最も近接するのは電流連続時である。そして、この場合の極は電動機単体の伝達関数の極と一致することは、すでに説明した。一方、制御理論によれば、制御極の実数部が他のその6倍以上の値をとるときは、その極が過渡応答に与える影響は事実上、無視することができる。そこで、いま

$$\tau_e = L/R, \tau_m = K^2/J \cdot R \dots\dots\dots (36)$$

と電気的時定数 τ_e 、および機械的時定数を定義し、かつ、両者の比を、

$$m = \tau_e/\tau_m \dots\dots\dots (37)$$

とするとき、電流連続時の極（＝電動機単体の伝達関数の極 μ_{m1}, μ_{m2} ）は次式のようになる。

$$\mu_{m1}, \mu_{m2} = 1/2 \tau_e \cdot (-1 \pm \sqrt{1-4m}) \dots\dots (38)$$

そこで、 $\mu_{m1}/\mu_{m2} = 1/6$ なる関係から、

$$m = \tau_e/\tau_m = 0.122$$

となる。すなわち、電動機の電気的時定数が機械的時定数のおよそ12%以下なら、これを無視することができる。この意味から第1表の供試機Bについては、電気的時定数は無視できない。

4. 根軌跡法による動特性の評価⁽⁹⁾

サイリスタ系が開ループ制御されることは実際上は極めてまれで、通常は何んらかの形で閉ループ制御を用いる。このような場合の系の動特性を、特に電流不

連続時に焦点を向けて考察する。

〈4・1〉 チョップパ系の根軌跡と問題点 いま、第8図に示すようなチョップパ系を含む閉ループ系を取りあげ、電流連続時に対する特性と対比させて不連続時の動特性を検討してみよう。

この閉ループ系では、フィルタ時定数をどう選択するか等、一般的な制御上の問題もあるが、いま、問題とするのは連続時と不連続時の特性の対比であるから、ここではそういった問題への深入りを避け、 $T_1 = 10T$ として話を進めよう。

チョップパ周波数 100 Hz, duty factor $\alpha = 0.4$ の場合について供試電動機Aに関して根軌跡を描いた結果を第9図に示している。この場合の特性方程式、

$$1 + K_V \cdot K_T \cdot G_{ch}(S)/S T_1 \cdot (1 + T_1 \cdot S) = 0 \dots\dots\dots (39)$$

の4つの根のうち、原点近傍の制御極について根軌跡を描いたが、図中の利得 K は次式で与えられる。

第8図 チョップパ系を含む閉ループ

Fig. 8. Closed loop of the chopper system.

第9図 チョップパ系の根軌跡の1例

Fig. 9. An example of the root locus of the chopper system.

第 10 図 チョップ系の固有角周波数

Fig. 10. Natural angular frequency of the chopper system.

$$K = K_V \cdot K_T \cdot K_M \dots\dots\dots (40)$$

この根軌跡を用いると、系の減衰係数 ζ と固有振動数 ω_n を用いて動特性を評価することができる。減衰係数 ζ の値は制御系の用途により異なるが、一般のサーボ系にならって $\zeta=0.5$ とすると、各動作点に対して系の利得を調整できるものとして、速応性の目安となる固有振動数を求めた結果を第 10 図に示す。

第 10 図をみるとたとえ可変利得フィードバック制御を行なっても、電流不連続時にはオフ期間が長くなるほど速応性が低下することがわかる。しかし、この結果でむしろ重要な点は、わずかでも電流が不連続となると連続時に比べて速応性が 1/10 程度に急激に悪化するという点である。これは、チョップ系の伝達関数の性質に起因する現象で、例えばサンプル値フィードバック系を構成して応答時間そのものの短縮を図ってみたところで、電流不連続時の応答の低下を免がれることはできない。

〈4・2〉 動特性の改善 前節までで、電流不連続時のチョップ系の伝達関数の問題点が明らかになった。この結果、電流が連続することが系の動特性の上からは不可欠で、この観点から従来

(1) 電機子回路リアクトルを入れる

(2) チョップ周波数を高い値に選ぶ

などの方法がとられた。

ところで、前者の方法ではすでに説明したように、連続時の伝達関数の固有値が変わってしまい応答の悪化につながるため、その点からは後者の方が有利ではある。しかし、後者も転流損の増加など、問題は残る。

筆者らが先に発表したチョップ回路⁽¹⁰⁾や、ブリッジ形 DC-DC コンバータ⁽¹¹⁾回路は、電動機の負荷レベルに無関係に常に電流を連続にすることができるものであるから、速応性を重視するチョップ系ではこの種の DC-DC 変換器を用いる必要がある。

5. あとがき

本論文では、チョップ回路で制御される直流他励電動機の伝達関数を求める手法と、得られた伝達関数と系の動特性との間の関係、および問題点につき検討を加えた。本論文の成果を要約すると、およそ次のようにまとめることができる。

(1) 伝達関数の導出にあたっては、定常状態の系の動作を離散的に記述する状態推移式をもとにして、微小振動の考え方を適用した。この手法は単にチョップ電源に限らず、被制御対象を断続制御するといった形の系の取り扱いに広く応用できるものである。

(2) 本論文では、チョップ制御される電動機系の伝達関数を 1 例として考察した。その結果、この系の伝達関数は、動作状態の関数として表わされる 2 個の極、1 個の零点、および利得で与えられることを明らかにした。

(3) 伝達関数の極は、電流連続時には電動機単体の伝達関数の極と一致する。しかし、電流不連続時には 2 個の極の一つは急激に大きくなり、他方は逆に小さくなって、後者が応答に対して支配的となる。

(4) 従来、過渡応答を扱う場合、機械的時定数に対し電気的時定数を見捨てる場合が多いが、伝達関数の極の観点からこの近似の適用限界を明確にした。

(5) 根軌跡法による動特性の評価を行なった。その結果、たとえ可変利得フィードバックを行なっても電流連続時に比べ不連続時には応答はおおよそ 1/5~1/10 に低下することを明らかにした。こういった点から、筆者らの先に発表したチョップ回路、あるいはブリッジ形 DC-DC コンバータ回路の有用性を明らかにした。

なお、本研究に関する数値計算は東工大情報処理センタで行なったことを付記し、関係者各位に紙面を借りて謝意を表す。

(昭和 49 年 12 月 19 日受付、同 50 年 10 月 27 日再受付)

文 献

- (1) 入江, 他: 電学誌 87, 942 (昭 12)
- (2) 松井・足立: 電学誌 89, 2406 (昭 44-12)
- (3) E. A. Parrish, et al.: IEEE Trans. Automatic Control AC-12, 5 (1967)
- (4) 仁田, 他: 電学誌 89, 2133 (昭 44-11)
- (5) 松井, 他: 電学誌 92-B, 531 (昭 47-10)
- (6) Shultz & Melsa: State Functions and Linear Control Systems (McGraw Hill)
- (7) 松井・宮入: 昭 49 電気四学会東海支連大 No. 3a-B-8
- (8) 松井, 他: 電学誌 94-B, 123 (昭 49-3)
- (9) 松井・宮入: 昭 50 年電気学会全国大会 No. 794
- (10) 松井, 他: 電学誌 93-B, 121 (昭 48-3)
- (11) 山村, 他: 電学誌 94-B, 255 (昭 49-5)
- (12) J. E. Gibson: Nonlinear Automatic Control (McGraw Hill)