UDC 621.314.26.025.3.621.374.4

論文

52-B24

三相回路における分数調波振動

正員 奥村 浩士 (京大)

正員 木嶋 昭 (京大)

1. ま え が き

分数調波振動, 特に変圧器の励磁特性の非線形性に帰因して起る分数調波振動は理論的にも実験的にも数多く検討がなされている⁽¹⁾。しかるに, これらの研究は単相回路を対象としたものであり, 三相回路の場合については, 電力系統で発生した分数調波振動を解析的ならびに実験的に検討したものがわずかに見られる程度である⁽²⁾⁽³⁾。これらの文献では, 理論的には三相回路を単相回路で表現して取扱っている。従って, 三相回路そのままの形で分数調波振動を検討したものは, 筆者らの知る限り, ほとんど皆無に等しく, 三相回路特有の分数調波振動の性質は, 解明されたとは言えない。

本論文は第1図に示す△結線された非線形インダクタとキャパシタ, 抵抗および対称三相電圧源から成る三相直列共振回路(この回路は無負荷変圧器を含む直列コンデンサ補償送電系統で, 変圧器2次側インピーダンスを省略し, 大地還流電流がないものとしたときのモデルである)に発生する分数調波振動, 特に1/3調波振動の性質を理論的, 実験的に考察した結果をまとめたものである。すなわち, まず, アナログ計算機を用い, 1/3調波振動にはビートを伴う1/3調波振動とビートを伴わない振幅一定の1/3調波振動とが存在することを示す。次に Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky 氏の多自由度非線形系の単一周解に対する漸近的方法⁽⁴⁾を系が他励で, しかも複周期解を有する場合に拡張して, これら振動を解析し, △結線内の抵抗がある程度大きくなると振幅一定の1/3調波振動は単相

第1図 三相直列共振回路

Fig. 1. Three-phase series resonance circuit.

化(二相に発生)する場合があることを示す。最後に実験によりこれら三種類の1/3調波振動の存在を確かめる。

2. 回路方程式

非線形インダクタの励磁特性を

$$i' = f(\phi) = c_3 \phi^3 \dots\dots\dots (1)$$

で表わす。ここに, i' , ϕ はそれぞれ励磁電流, 鎖交磁束である。回路方程式は第1図中の記号で,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{u} - (\mathbf{r} + \mathbf{A}^2\mathbf{R})\mathbf{i}' + \mathbf{A}\mathbf{e}(t) \\ \mathbf{C}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{i}' \\ \mathbf{i}' &= \mathbf{f}(\phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

と書くことができる。但し,

 $\phi = (\phi_a, \phi_b, \phi_c)'$; 鎖交磁束ベクトル $\mathbf{u} = (u_a, u_b, u_c)'$; キャパシタの端子電圧ベクトル $\mathbf{i}' = (i_a', i_b', i_c')'$; インダクタの励磁電流ベクトル $\mathbf{f}(\phi) = (f(\phi_a), f(\phi_b), f(\phi_c))'$; インダクタの励磁特性ベクトル $\mathbf{e}(t) = (e_a(t), e_b(t), e_c(t))'$; 対称三相電圧源ベ

Subharmonic Oscillations in Three-Phase Circuit. By Kohshi Okumura, Member & Akira Kishima Member (Department of Electrical Engineering, II of Kyoto University)

奥村浩士: 正員, 京都大学工学部電気工学第二教室
木嶋 昭: 正員, 京都大学工学部電気工学第二教室

クトル

 $\mathbf{R} = \text{diag}(R, R, R)$; 直列抵抗行列 $\mathbf{r} = \text{diag}(r, r, r)$; Δ 結線内の抵抗行列 $\mathbf{C} = \text{diag}(C, C, C)$; キャパシタ行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

なお、' は転置、 diag は対角行列を意味する。(2)式を odq 変換し、更に無次元化して整理すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Psi_d}{d\tau} &= E + \Psi_q - v_d - \xi \Phi_d(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) \\ \frac{d\Psi_q}{d\tau} &= -\Psi_d - v_q - \xi \Phi_q(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) \\ \frac{dv_d}{d\tau} &= v_q + \eta \Phi_d(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) \\ \frac{dv_q}{d\tau} &= -v_d + \eta \Phi_q(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) \\ \frac{d\Psi_0}{d\tau} &= -\zeta \Phi_0(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

但し、

$$\begin{aligned} \Phi_d(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) &= (\Psi_d^2 + \Psi_q^2) \Psi_d + 2\{(\Psi_d^2 - \Psi_q^2) \\ &\quad \times \cos 3\tau - 2\Psi_d \Psi_q \sin 3\tau\} \Psi_0 + 4\Psi_d \Psi_0^2 \\ \Phi_q(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) &= (\Psi_d^2 + \Psi_q^2) \Psi_q - 2\{(\Psi_d^2 - \Psi_q^2) \\ &\quad \times \sin 3\tau + 2\Psi_d \Psi_q \cos 3\tau\} \Psi_0 + 4\Psi_q \Psi_0^2 \\ \Phi_0(\Psi_d, \Psi_q, \Psi_0, \tau) &= (\Psi_d^2 - 3\Psi_q^2) \Psi_d \cos 3\tau \\ &\quad + (\Psi_q^2 - 3\Psi_d^2) \Psi_q \sin 3\tau \\ &\quad + 6(\Psi_d^2 + \Psi_q^2) \Psi_0 + 4\Psi_0^3 \end{aligned}$$

変数 Ψ_d, Ψ_q, Ψ_0 は鎖交磁束の d -, q -, 0 -成分、 v_d, v_q はキャパシタの端子電圧の d -, q -成分である。また、パラメータ ξ, η, ζ は、それぞれ、直列抵抗 R 、直列キャパシタのエラスタンス $1/C$ 、零相抵抗 ($R+r/3$) に対応する値、 E は電源電圧の振幅に対応する値である。

3. 異常振動に対する方程式

次に回路に異常振動が発生する場合、それを記述する方程式を導く。零相磁束 Ψ_0 は Ψ_d, Ψ_q に比べて小さいと考えられるから(3)式の特異点は $\Psi_0 \approx 0$ の場合

$$\begin{aligned} &(\Psi_{d0}, \Psi_{q0}, v_{d0}, v_{q0}) \\ &= (\rho_0 \cos \theta_0, \rho_0 \sin \theta_0, \sigma_0 \sin \theta_0 - \sigma_0 \cos \theta_0) \end{aligned}$$

で表わすことができる。但し、 $\rho_0, \sigma_0, \theta_0$ は次式により決められる。

$$\left. \begin{aligned} &(\xi^2 + \eta^2) \rho_0^6 - 2\eta \rho_0^4 + \rho_0^2 - E^2 = 0 \\ &\theta_0 = \tan^{-1} \{ \eta \rho_0^2 - 1 \} / \xi \rho_0^2 \} \\ &\sigma_0 = \eta \rho_0^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots (4)$$

特異点からの変分を $\Delta\Psi_d, \Delta\Psi_q, \Delta v_d, \Delta v_q$ とし、変数 $x_k (k=1, 2, \dots, 5)$ を

$$\left. \begin{aligned} x_1 + jx_2 &= (\Delta\Psi_d + j\Delta\Psi_q) e^{-j\theta_0} \\ x_3 + jx_4 &= (\Delta v_d + j\Delta v_q) e^{-j\theta_0} \\ x_5 &= \Psi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

で定義する。(5)式を(3)式に代入して整理すれば、異常振動が発生する場合、それを解析するための方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2 - x_3 + \varepsilon X_1(x_1, x_2, x_5, \tau) \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -x_1 - x_4 + \varepsilon X_2(x_1, x_2, x_5, \tau) \\ \frac{dx_3}{d\tau} &= h_3 x_1 + x_4 + \varepsilon X_3(x_1, x_2, x_5, \tau) \\ \frac{dx_4}{d\tau} &= h_1 x_2 - x_3 + \varepsilon X_4(x_1, x_2, x_5, \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)_1$$

$$\frac{dx_5}{d\tau} = \varepsilon X_5(x_1, x_2, x_5, \tau) \dots\dots\dots (6)_2$$

但し、

$$\begin{aligned} \varepsilon X_1(x_1, x_2, x_5, \tau) &= -\xi m_3 x_1 \\ &\quad - \xi \{ f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, x_5, \tau) \} \\ \varepsilon X_2(x_1, x_2, x_5, \tau) &= -\xi m_1 x_2 \\ &\quad - \xi \{ f_2(x_1, x_2) - g_2(x_1, x_2, x_5, \tau) \} \\ \varepsilon X_3(x_1, x_2, x_5, \tau) &= (\eta m_3 - h_3) x_1 \\ &\quad + \eta \{ f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2, x_5, \tau) \} \\ \varepsilon X_4(x_1, x_2, x_5, \tau) &= (\eta m_1 - h_1) x_2 \\ &\quad + \eta \{ f_2(x_1, x_2) - g_2(x_1, x_2, x_5, \tau) \} \\ \varepsilon X_5(x_1, x_2, x_5, \tau) &= -\zeta \{ k(x_1, x_2, \tau) \\ &\quad + h(x_1, x_2) x_5 + 4x_5^3 \} \\ f_1(x_1, x_2) &= \rho_0(3x_1^2 + x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ f_2(x_1, x_2) &= 2\rho_0 x_1 x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ g_1(x_1, x_2, x_5, \tau) &= 2\{ (\rho_0 + x_1)^2 \\ &\quad - x_2^2 \} \cos(3\tau + 3\theta_0) - 2(\rho_0 + x_1) x_2 \\ &\quad \times \sin(3\tau + 3\theta_0) \} x_5 + 2(\rho_0 + x_1) x_5^2 \\ g_2(x_1, x_2, x_5, \tau) &= 2\{ (\rho_0 + x_1)^2 - x_2^2 \} \\ &\quad \times \sin(3\tau + 3\theta_0) + 2(\rho_0 + x_1) x_2 \\ &\quad \times \cos(3\tau + 3\theta_0) \} x_5 - 2x_2 x_5^2 \\ k(x_1, x_2, \tau) &= \{ x_2^2 - 3(\rho_0 + x_1)^2 \} x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin(3\tau + 3\theta_0) + \{(\rho_0 + x_1)^2 - 3x_2^2\} \\ & \times (\rho_0 + x_1) \cos(3\tau + 3\theta_0) \\ & h(x_1, x_2) = 6\{(\rho_0 + x_1)^2 + x_2^2\} \\ & 3m_1 = m_3 = 3\rho_0^2 \end{aligned}$$

となる。パラメータ h_1, h_3 を共に $1/9$ とおけば、(6)₁ 式の無摂動系の固有角周波数 $\omega_1, \omega_2 (\omega_1 < \omega_2)$ はそれぞれ $2/3, 4/3$ となる。

4. アナログ計算機による検討

(2) 式を $\alpha\beta$ 変換した式をアナログ計算機で解いた。その結果、第2図のオシログラムが示すように、パラメータの値により A, B 二種類の $1/3$ 調波振動が発生する。すなわち、振動 A はビートを伴う $1/3$ 調波振動、振動 B は振幅一定の $1/3$ 調波振動である。

第2図 1/3調波振動のオシログラム

Fig. 2. Oscillograms of 1/3-harmonic oscillations.

第3図 1/3調波振動の発生領域
(アナログ計算機)

Fig. 3. Regions of 1/3-harmonic oscillations.
(Analog computer)

第3図にはそれぞれの振動の発生域を示す。図中、斜線をほどこした領域では振動 A が、また破線をほどこした領域では振動 B が発生する。

5. 拡張された漸近法による $1/3$ 調波振動の解析

二種類の $1/3$ 調波振動を内部共鳴の条件 $2\omega_1 = \omega_2$ が満足され、外力 $g_i(x_1, x_2, x_5, \tau)$ ($i=1, 2$) に固有振動が共鳴していない場合と共鳴している場合とに分けて解析する。

<5・1> ビートを伴う $1/3$ 調波振動の場合

(6)₁ 式の無摂動系の解を

$$\left. \begin{aligned} x_k^{(0)} &= a\varphi_k^1 e^{j\psi} + a\varphi_k^{1*} e^{-j\psi} \\ &+ (x+jy)\varphi_k^2 e^{j2\psi} + (x-jy)\varphi_k^{2*} e^{-j2\psi} \\ \psi &= \omega_1 \tau, \quad j = \sqrt{-1}, \quad k=1, 2, 3, 4 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、 φ_k^1, φ_k^2 : 無摂動系の固有値 $j\omega_1, j\omega_2$ に対する固有関数、 $*$: 共役値

一方、(6)₂ 式から x_5 は

$$\left. \begin{aligned} x_5 &\simeq x_5^{(0)} = \sum_{l=1}^L (Z_l e^{j\Omega_l \tau} + Z_l^* e^{-j\Omega_l \tau}) \\ z_l &= z_l(a, x, y) \\ &= P_l(a, x, y) + jQ_l(a, x, y) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

とおくことができる。また、 $k(x_1, x_2, \tau), h(x_1, x_2)$ は

$$\left. \begin{aligned} k(x_1, x_2, \tau) &\simeq k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \tau) \\ &= \sum_{n=1}^N \{K_n e^{j\Omega_n \tau} + K_n^* e^{-j\Omega_n \tau}\} \\ h(x_1, x_2) &\simeq h(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \\ &= H_0 + \sum_{m=1}^M \{H_m e^{j\omega_m \tau} + H_m^* e^{-j\omega_m \tau}\} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$K_n = u_n(a, x, y) + jv_n(a, x, y)$$

$$H_m = p_m(a, x, y) + jq_m(a, x, y)$$

$$H_0 = H_0(a, x, y)$$

$$\Omega_n = (2n-1)/3, \quad \omega_m = 2m/3$$

と書くことができる。 $x_5^{(0)}$ は $k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \tau)$ とほぼ同じ角周波数成分を含むと考えられるから、

$$L = N, \quad \Omega_l \simeq (2l-1)/3 \quad (10)$$

とおくことができる。(8), (9) 式を(6)₂ 式に代入し、等しい角周波数成分の項を等置すれば、

$$\Psi(a, x, y)z = u \quad (11)$$

なる関係を得る。但し、 Ψ は $2L \times 2L$ 行列、 z, u はベクトルで

$$z = (P_1, Q_1, \dots, P_L, Q_L)'$$

$$\mathbf{u} = (u_1, v_1, \dots, u_L, v_L)'$$

と表わされる。従って、 $\det \mathbf{\Psi} \neq 0$ ならば

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Psi}^{-1} \mathbf{u} \dots\dots\dots (12)$$

となり、 $x_5^{(0)}$ の角周波数の成分が求められる。詳細は文献(5)参照のこと。 $x_k^{(0)}$ ($k=1, 2, 3, 4$) は(6)₁式に拡張された漸近法を適用して求めることができる。すなわち、(6)₁式の解を

$$\begin{aligned} x_k &= x_k^{(0)}(a, x, y, \phi) \\ &+ \varepsilon x_k^{(1)}(a, x, y, \phi) + \dots\dots\dots (13) \\ k &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

と展開する。但し、 $x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots$ は ϕ の周期関数であり、更に a, x, y 及び ϕ は連立微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1(a, x, y) + \varepsilon^2 A_2(a, x, y) + \dots\dots \\ \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon B_1(a, x, y) + \varepsilon^2 B_2(a, x, y) + \dots\dots \\ \frac{dy}{d\tau} &= \varepsilon C_1(a, x, y) + \varepsilon^2 C_2(a, x, y) + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \omega_1 + \varepsilon D_1(a, x, y) + \varepsilon^2 D_2(a, x, y) + \dots\dots \\ &\dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

から決定されるものとする。

(7), (8), (13), (14), (15) 式を (6)₁式に代入し、 ε の等巾の項を等置すれば、 $x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots$ に関する一連の微分方程式が得られ、 $x_k^{(1)}$ が周期的であるための必要十分条件は、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1 + j a \varepsilon D_1 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{1*} \right. \\ &\times \int_0^{2\pi} \varepsilon X_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_5^{(0)}) e^{-j\psi} d\psi \left. \right\} \\ &\left/ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{1*} \varphi_k^1 \right. \\ \varepsilon B_1 - 2y \varepsilon D_1 + j(\varepsilon C_1 + 2x \varepsilon D_1) &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{2*} \int_0^{2\pi} \varepsilon X_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_5^{(0)}) \right. \\ &\times e^{-j2\psi} d\psi \left. \right\} \left/ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{2*} \varphi_k^2 \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

となる。ここに φ_k^l ($l=1, 2$) は(6)式の無振動系の随伴系の固有関数である。(16)式の実部虚部を等置することにより、 $\varepsilon A_1, \dots, \varepsilon D_1$ を得る。従って、(14), (15)式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \varepsilon A_1(a, x, y) \\ &= -a_{11}a - \xi \{ a_{13}a^2 + a_{14}(x^2 + y^2) \} a \end{aligned} \right\}$$

$$- \rho_0 (\xi a_{12}x - \eta b_{12}y) + Re(U)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon B_1(a, x, y) \\ &= -a_{21}x - (b_{21} + 2b_{11})y - 2\rho_0 (\xi a_{12}y \\ &\quad + \eta b_{12}x)y - \{ \xi a_{23}x + \eta (b_{23} \\ &\quad + 2b_{14})y \} (x^2 + y^2) - \{ \xi (a_{22}\rho_0 \\ &\quad + a_{24}x) + \eta (b_{24} + 2b_{13})y \} a^2 \\ &\quad + Re(V) + 2y I_m(U)/a \\ \frac{dy}{d\tau} &= \varepsilon C_1(a, x, y) \\ &= -a_{21}y + (b_{21} + 2b_{11})x + 2\rho_0 (\xi a_{12}y \\ &\quad + \eta b_{12}x)x - \{ \xi a_{23}y - \eta (b_{23} \\ &\quad + 2b_{14})x \} (x^2 + y^2) - \{ \xi (a_{24}y \\ &\quad - b_{22}\rho_0) - \eta (b_{24} + 2b_{13})x \} a^2 \\ &\quad + I_m(V) - 2x I_m(U)/a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \omega_1 + \varepsilon D_1(a, x, y) \\ &= \omega_1 - b_{11} - \eta b_{13}a^2 - \eta b_{14}(x^2 + y^2) \\ &\quad - \rho_0 (\xi a_{12}y + \eta b_{12}x) + I_m(U)/a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

となる。但し、係数 $a_{11}, b_{11}, \dots$ については文献(6)参照のこと。また、 U, V は複素関数で、 $\mathbf{z}$ の成分を用いて、

$$\left. \begin{aligned} U &= U(a, x, y) \\ &= -(\xi + j3\eta)(Z_1 S_0 + Z_1^* S_1 + Z_2^* S_2 \\ &\quad + Z_3^* S_3 + Z_4^* S_4) \\ V &= V(a, x, y) \\ &= -(\xi - j3\eta)(Z_1 S_1 + Z_2 S_0 + Z_1^* S_2 \\ &\quad + Z_2^* S_3 + Z_3^* S_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

と書くことができる。但し、 S_i ($i=0, \dots, 4$) は a, x, y の複素関数で詳細は文献(5)参照のこと。(17)式の特異点 (a_0, x_0, y_0) から位相角 ψ は

$$\psi = \int \{ \omega_1 + \varepsilon D_1(a_0, x_0, y_0) \} d\tau + \psi_0 \dots (20)$$

で与えられる。但し、 ψ_0 は初期位相角である。特異点の安定判別は Routh-Hurwitz 法で行なう。詳細は文献(7)参照のこと。

第4図は(17)式の安定特異点の存在領域を E - η 平面上に求めたものであり、理論上、振幅一定の 1/3 調波振動の領域を含んでいる。第3図の領域と比較するとかなりよく一致していることがわかる。

〈5・2〉 振幅一定の 1/3 調波振動の場合

(6)₁式の無振動系の解を

第4図 ビートを伴う 1/3 調波振動の発生領域
(拡張された漸近法)

Fig. 4. Region of 1/3-harmonic oscillation with beat. (Extended asymptotic method).

$$\left. \begin{aligned} x_k^{(0)} = & (u + jv) \varphi_k^1 e^{j\omega_1 \tau} \\ & + (u - jv) \varphi_k^{1*} e^{-j\omega_1 \tau} \\ & + (x + jy) \varphi_k^2 e^{j\omega_2 \tau} \\ & + (x - jy) \varphi_k^{2*} e^{-j\omega_2 \tau} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

$$k=1, 2, 3, 4$$

とおく。〈5・1〉節で述べた方法と同じ方法で $x_s^{(0)}$ を求める。この場合には、(8), (9)式の Z_l, K_n, H_m はすべて u, v, x, y の複素関数となる。また、 $\omega_m = 2m/3$, $\Omega_l = (2l-1)/3$ とおく。零相磁束の角周波数 5/3 以上の成分を省略すれば、(11)式の Ψ, z, u はそれぞれ 4×4 行列、4次元ベクトルになる。詳細は文献(5)参照のこと。

さて、(6)₁ 式の解を拡張された漸近法により求める。(6)₁ 式の解を

$$\begin{aligned} x_k = & x_k^{(0)}(u, v, x, y) \\ & + \varepsilon x_k^{(1)}(u, v, x, y) + \dots \quad (k=1, 2, 3, 4) \end{aligned} \dots\dots\dots (22)$$

と展開する。但し、 $x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots$ は周期関数であり更に u, v, x, y は連立微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} = & \varepsilon A_1(u, v, x, y) \\ & + \varepsilon^2 A_2(u, v, x, y) + \dots\dots\dots \\ \frac{dv}{d\tau} = & \varepsilon B_1(u, v, x, y) \\ & + \varepsilon^2 B_2(u, v, x, y) + \dots\dots\dots \\ \frac{dx}{d\tau} = & \varepsilon C_1(u, v, x, y) \\ & + \varepsilon^2 C_2(u, v, x, y) + \dots\dots\dots \\ \frac{dy}{d\tau} = & \varepsilon D_1(u, v, x, y) \\ & + \varepsilon^2 D_2(u, v, x, y) + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

から決定されるものとする。(21)~(23)式および(8)式を(6)₁ 式に代入し、 ε の等巾の項を等置すれば、 $x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \dots$ に関する一連の微分方程式が得られ、 $x_k^{(1)}$ が周期的であるための必要十分条件は次のよう

になる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon A_1 + j\varepsilon B_1 = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{1*} \right. \\ & \times \int_0^{2\pi} \varepsilon X_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_5^{(0)}) e^{-j\omega_1 \tau} d\tau \left. \right\} \\ & \left/ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{1*} \varphi_k^1 \right. \\ \varepsilon C_1 + j\varepsilon D_1 = & \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{2*} \right. \\ & \times \int_0^{2\pi} \varepsilon X_k(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_5^{(0)}) e^{-j\omega_2 \tau} d\tau \left. \right\} \\ & \left/ \sum_{k=1}^4 \bar{\varphi}_k^{2*} \varphi_k^2 \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(24)式の左右両辺の実部虚部を等置することにより $\varepsilon A_1, \dots, \varepsilon D_1$ が求められる。従って、

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} = & \varepsilon A_1(u, v, x, y) \\ = & -a_{11}u - \left(\omega_1 - \frac{2}{3} - b_{11}\right)v - (\xi a_{13}u \\ & - \eta b_{13}v)(u^2 + v^2) - (\xi a_{14}u \\ & - \eta b_{14}v)(x^2 + y^2) - \{\xi a_{12}\rho_0(u x \\ & + v y) + \eta b_{12}\rho_0(v x - u y)\} + R_e(U) \\ \frac{dv}{d\tau} = & \varepsilon B_1(u, v, x, y) \\ = & -a_{11}v + \left(\omega_1 - \frac{2}{3} - b_{11}\right)u - (\xi a_{13}v \\ & + \eta b_{13}u)(u^2 + v^2) - (\xi a_{14}v \\ & + \eta b_{14}u)(x^2 + y^2) - \{\xi a_{12}\rho_0(u y \\ & - v x) + \eta b_{12}\rho_0(u x + v y) + I_m(U) \\ \frac{dx}{d\tau} = & \varepsilon C_1(u, v, x, y) \\ = & -a_{21}x - \left(\omega_2 - \frac{4}{3} + b_{12}\right)y - (\xi a_{23}x \\ & + \eta b_{23}y)(x^2 + y^2) - (\xi a_{24}x \\ & + \eta b_{24}y)(u^2 + v^2) - \{\xi a_{22}\rho_0(u^2 \\ & - v^2) + 2\eta b_{22}\rho_0 uv\} + R_e(V) \\ \frac{dy}{d\tau} = & \varepsilon D_1(u, v, x, y) \\ = & -a_{21}y + \left(\omega_2 - \frac{4}{3} + b_{12}\right)x - (\xi a_{23}y \\ & - \eta b_{23}x)(x^2 + y^2) - (\xi a_{24}y \\ & - \eta b_{24}x)(u^2 + v^2) - \{2\xi a_{22}\rho_0 uv \\ & - \eta b_{22}\rho_0(u^2 - v^2)\} + I_m(V) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

を得る。但し、 U, V は

第 5 図 振幅一定の 1/3 調波振動の発生領域 (拡張された漸近法)

Fig. 5. Region of pure 1/3-harmonic oscillation (Extended asymptotic method).

$$\begin{aligned}
 U &= U(u, v, x, y) \\
 &= -(\xi + j3\eta)(S_0 Z_1 + S_1 Z_1^* + S_2 Z_2^*) \\
 V &= V(u, v, x, y) \\
 &= -(\xi - j3\eta)(S_1 Z_1 + S_0 Z_2 + S_2 Z_1^* \\
 &\quad + S_0 Z_2^*)
 \end{aligned}$$

で与えられ、 $S_i (i=0, 1, 2, 3)$ は u, v, x, y の複素関数である。詳細は文献(5)参照のこと。

第 5 図は (25) 式の安定特異点の存在領域を破線で示しており、第 3 図の破線領域と比較するとかなりよく一致していることがわかる。

〈5・3〉 単相化する 1/3 調波振動 零相抵抗 ζ の変化に対して振幅一定の 1/3 調波振動の姿態がどのように変化するかを調べる。第 6 図はその様子を示しており、 ζ がある程度大きくなると角周波数 ω_1 の成分 $\psi_1 (= \sqrt{u_0^2 + v_0^2})$ と角周波数 ω_2 の成分 $\psi_2 (= \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ とがほぼ等しくなる。このことはもとの三相回路では次のことを意味している。キャパシタの端子電圧の値を

$$\left. \begin{aligned}
 V_a &= \sigma_0 \sin(\tau - \theta_0) + A_a \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \delta_a\right) \\
 V_b &= \sigma_0 \sin\left(\tau - \theta_0 - \frac{2}{3}\pi\right) + A_b \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \delta_b\right) \\
 V_c &= \sigma_0 \sin\left(\tau - \theta_0 + \frac{2}{3}\pi\right) + A_c \sin\left(\frac{1}{3}\tau + \delta_c\right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

のように書けば、例えば $\zeta=1.40$ に対して、 $A_a, \delta_a, \dots$ は第 1 表の値になる。この表に示すように、モード M_1 と M_4 の 1/3 調波振動は a 相にはほとんど出現せず、 b, c 相に優勢に出現することがわかる。すなわち、零相抵抗がある程度大きくなると、1/3 調波振動は単相化することがあると言える。なお第 6 図 r_1, r_2 の値はそれぞれ零相磁束の 1/3 調波、基本調波成分である。

第 6 図 零相抵抗 ζ の影響

Fig. 6. Effect of zero-phase-sequence resistance ζ .

第 1 表 キャパシタの端子電圧の 1/3 調波成分

Table 1. 1/3-harmonic components of capacitor voltages.

	A_a	A_b	A_c	δ_a	δ_b	δ_c
M_1	0.0000	-0.2485	0.2485	/	-1.233	-1.233
M_2	-0.1430	-0.2869	-0.1457	0.637	0.637	0.637
M_3	-0.1461	-0.1409	0.0287	0.986	0.986	0.986
M_4	0.0000	-0.2485	0.2485	/	0.812	0.812

6. 実験による検討

非線形インダクタとして、可飽和リアクトルを用いたとき、上記三種類の 1/3 調波振動が発生するか否かを確かめるため実験を行なった。使用した可飽和リアクトルの交流磁化特性を第 7 図に示す。2 台の特性はほぼ同じで、飽和に達する電流は 3 台ともほぼ一致している。可飽和リアクトルの直流抵抗は 3 台とも 1.61Ω である。第 1 図に示した回路を構成し、1/3 調波振動

第 7 図 可飽和リアクトルの交流磁化特性 (60 Hz)

Fig. 7. Magnetizing characteristics of saturable reactors (60 Hz).

第 8 図 1/3 調波振動の発生領域

Fig. 8. Regions of 1/3-harmonic oscillations.

の発生域を求めた。その結果第 8 図に示す。図の斜線をほどこした領域ではビートを伴う 1/3 調波振動、破線をほどこした領域では振幅一定の 1/3 調波振動、水平にハッチした領域では、単相化した 1/3 調波振動が発生する。それぞれの振動のオシログラムと周波数スペクトルを第 9 図に示す。

この実験により理論的に考察された 1/3 調波振動の三つのタイプの存在が確かめられた。

7. む す び

以上の検討を総合すれば次のようになる。

三相回路に発生する 1/3 調波振動には、ビートを伴う 1/3 調波振動、振幅一定の 1/3 調波振動、単相化する 1/3 調波振動の三種類があることを拡張された漸近

(a) ビートを伴う 1/3 調波振動

(b) 振幅一定の 1/3 調波振動

(c) 単相化した 1/3 調波振動

V_a, V_b, V_c : リアクトル L_a, L_b, L_c の端子電圧, U_a, U_b, U_c : キャパシタの端子電圧, E : 電源の相電圧

第 9 図 1/3 調波振動のオシログラムと周波数スペクトル

Fig. 9. Oscillograms and frequency spectra of 1/3-harmonic oscillations.

法を用いて理論的に示し、実験によりこれら三種類の振動が発生することを確めた。

文末ながら、アナログ計算機を借用させていただいた、京都大学原子エネルギー研究所の若林研究室の各位に感謝致します。また、実験に協力された本学学生 嶋 好博君(現、日立製作所)、丹羽 影君(現、近畿日本鉄道)、松本正夫君(本学大学院生)に深謝致します。

(昭和 50 年 11 月 25 日受付, 同51年 9 月13日再受付)

文 献

- (1) 例えば, C. Hayashi: "Nonlinear Oscillations in Physical Systems," (1964) McGraw Hill Co.
- (2) 永村: 電気試験所研究報告 No. 603 (1961)
- (3) G. C. Kothari, et al.: "Analysis of ferro oscillations in power systems," Proc. Inst. Elect Engrs, **121**, No 7, p. 616 (1974)
- (4) ミトロポリスキー・クリロフ・ポゴリェボフ, 益子正教訳: "非線形振動論" (昭 33) 共立出版
- (5) 奥村・木嶋: 非線形問題研究会資料 NLP 75-2 (昭 50)
- (6) 奥村・木嶋: 非線形問題研究会資料 NLP 74-22 (昭 49)
- (7) 奥村・木嶋: 非線形問題研究会資料 NLP 70-18 (昭 45)