非線形性を保存した高速潮流計算法

正員 岩本 伸一 (早大)

正員 田村 康男 (早大)

1. ま え が き

現在、交流潮流計算法としては、準最適順序付けとスパース行列テクニック⁽¹⁾を用いたニュートン-ラフソン法⁽²⁾(以下、N-R法と記す)が広く用いられている。この方法は特に、系統が大規模になった場合でも収束回数が増えることがなく、非常に優れた収束特性をもっていることからよく用いられてきた。しかしながら、1回あたりの反復時間がかなりかかるため、系統のオンライン計算に用いることには難があった。

本稿では、上述のN-R法よりも30~118母線系統において、4~8倍速い新しい交流潮流計算法を紹介する。この潮流計算法は、数学的にはN-R法と同じ複雑さと精度を有し、必要記憶容量もN-R法と同じでよいという特色をもっている。本手法は、直角座標系を採用して潮流方程式を表現した場合、その式が一次の項をもたない連立二次代数方程式となることを利用している。この連立二次代数方程式をテラー級数展開した場合、展開式は二次微分の項、すなわち第3項までで原式を完全に表現でき、また第1項と第3項は同形異変数となる。この展開式を用いた計算式はN-R法のような近似式でないため、修正量は常に初期推定値からのものとなり、また反復計算時のヤコビアン行列は定数扱いできる。従って、反復あたりの計算時間が非常に短縮される。

IEEEの標準系統である30, 57, 118母線系統を用いてシミュレーションが行なわれ、非常に良好な結果を得た。

2. 潮流計算問題

電力系統の状態は握にあたっては、系統内の各母線電圧を知ることが必要である。すなわち、すべての母線電圧がわかれば、すべての母線電力、母線電流、線

路潮流および線路電流を求めることができる。

いま、母線 p および母線 $p-q$ 間の諸量を次のように直角座標系を用いて定義すると⁽³⁾,

$$V_p \equiv e_p + j f_p \text{ (母線電圧) } \dots\dots\dots (1)$$

$$S_p \equiv P_p - j Q_p \text{ (母線電力) } \dots\dots\dots (2)$$

$$Y_{pq} \equiv G_{pq} - j B_{pq} \text{ (母線アドミタンス行列の } pq \text{ 要素)} \dots\dots\dots (3)$$

n 母線系統中の母線 p における潮流計算の基本式は次のように書ける。

$$P_p = \sum_{q=1}^n (e_p e_q G_{pq} + e_p f_q B_{pq} + f_p f_q G_{pq} - f_p e_q B_{pq}) \dots\dots\dots (4)$$

$$Q_p = \sum_{q=1}^n (f_p e_q G_{pq} + f_p f_q B_{pq} - e_p f_q G_{pq} + e_p e_q B_{pq}) \dots\dots\dots (5)$$

$$|V_p|^2 = e_p^2 + f_p^2 \dots\dots\dots (6)$$

潮流計算を行なう場合、スラック母線を除く各母線において $P, Q, |V|$ のうち二つの情報、すなわち P と Q か、 P と $|V|$ のいずれかが与えられ、それらが既知量となり、 e と f が未知量となる。また、基準電圧がスラック母線で与えられる。

(4), (5)式および(6)式より、潮流方程式を直角座標系で表現した場合、それらは $e_p e_q, e_p f_q, f_p f_q, f_p e_q, e_p^2, f_p^2$ というように、すべて電圧 e と f の一次項のない二次式で表現されていることがわかる。すなわち、潮流計算問題は一次項をもたない連立二次代数方程式を解くことにほかならない。

3. 潮流方程式に対応する連立二次代数方程式

潮流方程式を直角座標系表示した場合、それらは一次項をもたない連立二次代数方程式で与えられることを前章で示した。本章では、その高速計算アルゴリズムを導入する。

<3-1> 一次項をもたない連立二次代数方程式

潮流方程式は、未知数となる電圧がスラック母線では既知であるような特殊な連立方程式であるが、こ

A Fast Load Flow Method Retaining Nonlinearity. By Shinichi Iwamoto, Member, and Yasuo Tamura, Member (Department of Electrical Engineering, Waseda University).

岩本伸一: 正員, 早稲田大学電気工学科博士課程
田村康男: 正員, 早稲田大学電気工学科教授

では便宜上、 n 変数で n 本の式をもつ場合を考える。プログラムの際は N-R 法の場合と同じように、スラック母線の扱いに留意する必要があることはいうまでもない。潮流方程式との対応をわかりやすくするため二母線系統の付録(2)の(b)に示す。

いま、解かれるべき未知数(実数)を(7)式のように定義する。

$$\mathbf{x} \equiv \text{col}(x_1, \dots, x_n) \text{ (真値)} \dots\dots\dots (7)$$

これは、(4)~(6)式中の直角座標系表示された電圧 $(e_1, f_1, e_2, f_2, \dots)$ に対応している。

また、与えられる既知量(実数)を、(8)式のように定義する。

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \equiv \text{col}(y_1(\mathbf{x}), \dots, y_n(\mathbf{x})) \dots (8)$$

これらは具体的には(4)~(6)式に対応している。

〈3.2〉 テーラー級数展開 (8)式の解を求めるための第1段階として(8)式をテーラー級数展開する

いま、(7)式で与えられる真値に加えて、推定値および真値からの誤差を次のように定義し、

$$\mathbf{x}_e \equiv \text{col}(x_{e1}, \dots, x_{en}) \text{ (推定値)} \dots\dots (9)$$

$$\Delta \mathbf{x} \equiv \text{col}(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n) \text{ (誤差)} \dots\dots (10)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_e \dots\dots\dots (11)$$

また、ヤコビアン行列 $\mathbf{J}$ を次のように定義すると、

$$\mathbf{J} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_e} \quad (n \times n) \dots\dots (12)$$

付録(1)より(8)式のテーラー級数展開式は打ち切り誤差を含まないで、次式で完全に与えられることがわかる。

$$[\mathbf{y}_s] = [\mathbf{y}(\mathbf{x}_e)] + [\mathbf{J}][\Delta \mathbf{x}] + [\mathbf{y}(\Delta \mathbf{x})] \dots\dots\dots (13)$$

上式で重要なことは、一次項をもたない連立二次代数方程式は、二次微分の項、すなわち第3項までで完全に表現でき、三次微分以上の項は存在しないこと、また第1項と第3項の式の形は全く同一で変数のみが異なっているということである。

〈3.3〉 数値計算式 (13)式を書直すと以下のようになり

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e) - \mathbf{y}(\Delta \mathbf{x}) \dots\dots\dots (14)$$

数値計算式としては、基本的には次のように表わされる。

$$\Delta \mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e) - \mathbf{y}(\Delta \mathbf{x}^{(r)})) \dots\dots\dots (15)$$

ここで、変数右肩の括弧内の数字はその値が変わったときに1ずつ増えていくものとする。(15)式中、値が反

復中変化するのは $\Delta \mathbf{x}$ とその関数 $\mathbf{y}(\Delta \mathbf{x})$ のみである

修正量 $\Delta \mathbf{x}$ は、実際には(14)式中のヤコビアン行列 $\mathbf{J}$ と右辺のベクトルを並べてガウスの消去法で求めるのが得策である。すなわち、(14)式の右辺を下式のように $\Delta \mathbf{y}^{(r)}$ と定義すると、

$$\Delta \mathbf{y}^{(r)} \equiv \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e) - \mathbf{y}(\Delta \mathbf{x}^{(r)}) \dots\dots\dots (16)$$

実際の数値計算式は、最終的に(17)式のように書ける。

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{x}^{(r+1)} = \Delta \mathbf{y}^{(r)} \dots\dots\dots (17)$$

これを三角化⁽⁷⁾すると、三角化行列 $\mathbf{J}'$ とベクトル $\Delta \mathbf{y}^{(r)}$ が(18)式にあるように作成され(以下'は三角化された行列またはベクトルを表わす)、

$$\mathbf{J}' \Delta \mathbf{x}^{(r+1)} = \Delta \mathbf{y}^{(r)} \dots\dots\dots (18)$$

後退代入で $\Delta \mathbf{x}^{(r+1)}$ が求められる。ここで、行列 $\mathbf{J}'$ は一度計算されれば後は一定となるので、最初に $\mathbf{J}$ より $\mathbf{J}'$ を作る際の三角化操作要素を格納し、以後は $\Delta \mathbf{y}^{(r)}$ だけに三角化操作を施すと、かなりの計算時間の短縮が図れる。

(15)式において、右辺を $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(r)})$ と定義すると次式のように書ける。

$$\Delta \mathbf{x}^{(r+1)} = \mathbf{f}(\Delta \mathbf{x}^{(r)}) \dots\dots\dots (19)$$

これは、ヤコビ法の形にほかならない。この方法の収束性の理論については他の文献(4)に譲る。

本手法と N-R 法の比較を簡条書的に記すと以下のとおりである。

(1) 本手法の計算式は、原式のテーラー展開式の全項を考慮しているのに対し、N-R 法の式は展開式を一次微分の項で打切った近似式を用いている。

(2) そのため、本手法では推定値が不変となり、 $\Delta \mathbf{x}^{(r)}$ は常に初期推定値 $\mathbf{x}_e^{(0)}$ からの修正量となるのに対して、N-R 法では推定値が $\mathbf{x}_e^{(0)}, \mathbf{x}_e^{(1)}, \dots$ と反復ごとに変化し、 $\Delta \mathbf{x}^{(r)}$ は r 回目の推定値 $\mathbf{x}_e^{(r)}$ からの修正量となる。この概念図を第1図に示す。

(3) 従ってヤコビアン行列も本手法では1度計算すれば再計算の必要がないのに対して N-R 法では反復ごとにヤコビアン行列を再計算しなければならない

第1図 修正量 $\Delta \mathbf{x}$ の比較

Fig. 1. Comparison of correction value $\Delta \mathbf{x}$.

第2図 フローチャート

Fig. 2. Flowchart.

(4) 本手法における収束までの反復回数は、後の適用例で述べるように N-R 法の約 1.5 倍である。

4. フローチャート

第2図に、本手法と N-R 法のフローチャートを示す。重要点は次の2項目である。

(1) 本手法においては、母線指定条件が変更になっても系統構成に変更がない限りヤコビアン行列要素の再計算は必要ない。

(2) 本手法と N-R 法では推定値 Δx の意味が異なるため、収束条件 ε に対する対応は以下のようになる。

$$|\Delta x_i^{(r+1)} - \Delta x_i^{(r)}| \leq \varepsilon \iff |\Delta x_i^{(r)}| \leq \varepsilon$$

$i=1, \dots, n$ (本手法) $i=1, \dots, n$ (N-R 法)

..... (20)

ここで、修正量 Δx_i は、具体的には電圧の修正量である。(20)式の収束条件の対応を示す簡単な例題を付録(2)の(a)に示す。

5. 適用例

本手法の理解を助けるために、二母線系統での例題

第3図 収束特性の比較

Fig. 3. Comparison of convergence characteristics.

を付録(2)の(b)に示す。

IEEE の標準系統である 30, 57, 118 母線系統を本手法と N-R 法でシミュレーションした結果を第3図(a)~(c)にそれぞれ示す。両手法とも同じ準最適順序付けを施し、また母線アドミタンス行列、ヤコビアン行列、三角化、および後退代入に同じスパース行列テクニックを用いて、非零要素のみの演算を行なった。

スパース行列プログラムとしては、一番基本的なインデックス法⁽⁷⁾を用いた。従って、プログラムの作り方によっては、比較の際の数値が多少異なってくると思われる。

第3図は、系統が大規模になればなるほど、本手法が N-R 法より一層短い時間で収束するということを示すものである。そのため、横軸にはその系統における N-R 法の1反復時間を1単位時間とした目盛を用い、また各系統における本手法の1反復時間を同一幅でとった。縦軸には、(20)式で示される収束判定の基準の最大値を log 目盛でとった。縦軸の対象が、本手法では $\text{Max}(|\Delta x_i^{(r+1)} - \Delta x_i^{(r)}|, i=1, \dots, n)$, N-R 法では $\text{Max}(|\Delta x_i^{(r)}|, i=1, \dots, n)$ と異なっているように見えるが、これらは(19)式で述べたように対応している。

第3図より得られる諸数値を第1表にまとめる。表中の番号(1)~(4)に沿って次の事柄が観察される。

(1) 収束条件 ε までの反復回数 ($\varepsilon=5 \times 10^{-4}$, 電圧偏差の最大許容値) 本手法において、収束に必要な反復回数は系統規模にはさほど影響されず、N-R 法の約1.5倍である。

(2) 1反復あたりの時間 早大電子計算機センターの IBM 370/135 を用いて各法の計算時間を計った。本手法の場合、大規模系統になっても反復あたりの時間は N-R 法ほど増えない。

(3) 反復1回あたりの時間比 反復1回あたりの時間比は、系統規模が大きくなればなるほど本手法の方が有利になる。

第1表 実規模系統における本手法と N-R 法の数値比較

Table 1. Numerical comparison between the proposed & N-R methods.

系 統	(1) ε までの反復回数		(2) 1反復あたりの時間($\times 10^{-4}$ s)		(3) 1反復あたりの時間比		(4) ε までの時間比	
	本手法	N-R法	本手法	N-R法	本手法	N-R法	本手法	N-R法
30 母線	4	3	17	95	1/5.5	1	1/4.1	1
57 母線	6	4	35	263	1/7.6	1	1/5.1	1
118 母線	6	4	70	833	1/11.9	1	1/7.9	1

($\varepsilon=5.0 \times 10^{-4}$, IBM 370/135 使用)

(4) 収束条件 ε までの計算時間比 本手法の N-R 法に対する収束への計算時間比は 30, 57, 118 母線系統で、それぞれ4分の1, 5分の1, 8分の1であり、N-R 法に比べてはるかに速く、また系統が大規模になればなるほど本手法の方が N-R 法に比べて早く収束する。これは、系統が大規模になればなるほど行列 J の列数 n とベクトル Δy の比である n 分の1の値が小さくなっていくことに対応している。

6. 考 察

(1) N-R 法では、行列 J の要素格納に常時記憶容量を必要とするが、本手法では、いったん三角化行列 J' ができてしまえばヤコビアン行列の要素は必要なく、代りに、三角化操作要素のための記憶容量が必要となる。従って、不要になったヤコビアン行列要素の格納場所に、三角化の際できてくる三角化操作要素を順次格納していけば、三角化操作要素のために記憶容量を設ける必要はなく、結局、本手法の必要記憶容量は N-R 法のそれと同じですむ。例え、まだ必要なヤコビアン行列要素がある格納場所に三角化操作要素が入ってくる場合でも、これは、準最適順序付け⁽¹⁾を行なうことによって解決される。

(2) Ward, Hale 氏らが、1956 年に出した初期の潮流計算法⁽⁵⁾, Tinney 氏らが 1967 年に出し、現在広く用いられている N-R 法、そして本手法を比較すると、それらは一つの流れをもっている。すなわち、母線1がスラック母線、母線2が P-Q 指定母線、母線3が P-V 指定母線であるような三母線系統を考えた場合、 $P_s, Q_s, |V_s|$ を $P, Q, |V|$ の指定値とし、また、諸量を次のように定義すると、

$$x_e = \text{col}(e_{e1}, f_{e1}, e_{e2}, f_{e2}, e_{e3}, f_{e3}) \dots (21)$$

$$\Delta x = \text{col}(\Delta e_1, \Delta f_1, \Delta e_2, \Delta f_2, \Delta e_3, \Delta f_3)$$

$$\dots (22)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{ij} &\equiv \frac{\partial P_i}{\partial e_j}, & F_{ij} &\equiv \frac{\partial P_i}{\partial f_j} \\ K_{ij} &\equiv \frac{\partial Q_i}{\partial e_j}, & L_{ij} &\equiv \frac{\partial Q_i}{\partial f_j} \\ M_{ij} &\equiv \frac{\partial |V_i|^2}{\partial e_j}, & N_{ij} &\equiv \frac{\partial |V_i|^2}{\partial f_j} \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

Ward & Hale 法, N-R 法および本手法の原式は、それぞれ(24)~(26)式のようになる。

(a) Ward & Hale 法

$$\begin{bmatrix} P_{s2} \\ Q_{s2} \\ P_{s3} \\ |V_{s3}|^2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} P_2(x_e) \\ Q_2(x_e) \\ P_3(x_e) \\ |V_3(x_e)|^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{22} F_{22} & \mathbf{0} \\ K_{22} L_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_{33} F_{33} \\ \mathbf{0} & M_{33} N_{33} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

(b) N-R 法

$$\begin{pmatrix} P_{s2} \\ Q_{s2} \\ P_{s3} \\ |V_{s3}|^2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} P_2(x_e) \\ Q_2(x_e) \\ P_3(x_e) \\ |V_3(x_e)|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{22} & F_{22} & D_{23} & F_{23} \\ K_{22} & L_{22} & K_{23} & L_{23} \\ D_{32} & F_{32} & D_{33} & F_{33} \\ M_{32} & N_{32} & M_{33} & N_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

(c) 本手法

$$\begin{pmatrix} P_{s2} \\ Q_{s2} \\ P_{s3} \\ |V_{s3}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_2(x_e) \\ Q_2(x_e) \\ P_3(x_e) \\ |V_3(x_e)|^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{22} & F_{22} & D_{23} & F_{23} \\ K_{22} & L_{22} & K_{23} & L_{23} \\ D_{32} & F_{32} & D_{33} & F_{33} \\ M_{32} & N_{32} & M_{33} & N_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_2(\Delta x) \\ Q_2(\Delta x) \\ P_3(\Delta x) \\ |V_3(\Delta x)|^2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

これら3式より, Ward & Hale 法の原式は潮流方程式のテラー級数展開式の最終項を無視し, ヤコビアン行列の対角行列のみをとった近似式であり, N-R 法原式は一次微分の項までとった近似式であるのに対し, 本手法の原式は最終項まで考慮し非線形性を保在した等号をもつ完全式であることがわかる。

(3) N-R 法の一つに Zangwill 流の定ヤコビアン法がある。この方法は, N-R 法の繰返し過程で, いちいちヤコビアン行列を変えずに, 最初に計算したヤコビアン行列を継続して用いる方法である⁽⁷⁾。これは潮流方程式のテラー展開が(13)式の右辺第3項で終了するという事実に気が付かないまま, 単に収束点の近くではヤコビアン行列の要素はさほど変わらないという近似の概念に基づいて考案された方法であるが, 付録(3)に示すように, 直角座標系を採用した場合, 潮流方程式は一次項をもたない連立二次代数方程式となるため, 定ヤコビアン法の結果は(付23)式の条件の下で本手法の結果と一致する。従って, N-R 法の近似手法と考えられていた定ヤコビアン法は, 座標系の選び方によっては正解を与えることが明らかになった。事実, 直角座標系を用いた両法のシミュレーションは同一結果を与えている。

7. 結 論

本手法では, 特に母線指定値 ($P_s, Q_s, |V_s|$) がどのように変わろうと, 母線アドミタンス行列さえ変らなければヤコビアン行列の再計算は必要ないため, 指定値のみが変わっていく連続的な潮流計算, 例えばオンライン潮流計算や経済負荷配分問題のときの潮流計算などには非常に有効であると考えられる。また本手法は, 系統が大規模になればなるほどその長所が発揮されるため, 特に大規模電力系統の潮流計算に適している。

末筆ながら, 本論文作成にあたり貴重な御助言を賜りました早稲田大学 成田誠之助教授に深謝の意を表すると共に, プログラム作成および討論に非常な御協力を頂きました早稲田大学修士課程 土井 淳君(現在三菱電機(株)勤務)に厚く御礼申し上げます。また, いつもご協力頂いている, 埼玉工業大学 小林伸史助教授に感謝致します。

(昭和51年12月14日受付, 同52年6月21日再受付)

文 献

- (1) W. Tinney & J. Walker: Proc. IEEE 55, 1801 (1967)
- (2) W. Tinney & C. Hart: IEEE Trans. Power Apparatus Syst. PAS-88, 1449 (1967)
- (3) G. Stagg & A. El-Abiad: Computer Method in Power Systems Analysis, McGraw-Hill
- (4) 例えば, 深尾・豊田: 電力系統へのコンピュータ応用(昭47) 産業図書
- (5) J. Ward & H. Hale: Trans AIEE. Part III, Power Apparatus Syst. 75, 398 (1956)
- (6) 岩本・土井: 昭51電気学会全大 No. 837
- (7) 例えば, 高橋: 電力システム工学(昭51) コロナ社

付 録

(1) (13)式の導入 定数行列(実数)を

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n^2} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n^2 1} & a_{n^2 2} & \dots & a_{n^2 n^2} \end{pmatrix} \quad (n \times n^2) \dots \text{(付1)}$$

とすると, 潮流方程式に対応する式は, 次のようになる。

$$[\mathbf{y}_s] = [\mathbf{A}] \begin{pmatrix} x_1 x_1 \\ x_1 x_2 \\ \vdots \\ x_i x_j \\ \vdots \\ x_n x_n \end{pmatrix} \dots\dots\dots \text{(付2)}$$

上式を具体的に潮流方程式に対応させると, $\mathbf{y}_s$ は P と Q または P と $|V|^2$ の指定値から成り, $\mathbf{A}$ は母線アドミタンス G と B から成り, $\mathbf{x}$ は電圧 e と f

から成っている。具体例として、二母線系統における式を付録(2)の(b)に示す。

(付2)式をテーラー展開すると、原式が二次式であるので二次微分の項まで完全に展開できる。

$$[y_s] = [y(x_e)] + [J][\Delta x] + \frac{1}{2} [H] \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta x_1 \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_i & \Delta x_j \\ \vdots & \vdots \\ \Delta x_n & \Delta x_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (付3)$$

ここで J は(12)式で、定数行列 H は下式で与えられる。

$$H \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_j} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_1 \partial x_j} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_2} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_j} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_i \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_n \partial x_2} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_n \partial x_j} & \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (付4)$$

次に、(付3)式の第3項が、結局は $y(\Delta x)$ であることを示す。

いま、真値 x を推定値 x_e と誤差 Δx で書直すと

$$x_i x_j = (x_{ei} + \Delta x_i)(x_{ej} + \Delta x_j) = x_{ei} x_{ej} + x_{ei} \Delta x_j + \Delta x_i x_{ej} + \Delta x_i \Delta x_j \dots\dots\dots (付5)$$

すると、(付2)式は次のように書ける。

$$[y_s] = [A] \begin{bmatrix} x_{e1} x_{e1} \\ x_{e1} x_{e2} \\ \vdots \\ x_{ei} x_{ej} \\ \vdots \\ x_{en} x_{en} \end{bmatrix} + [A] \begin{bmatrix} x_{e1} \Delta x_1 \\ x_{e1} \Delta x_2 \\ \vdots \\ x_{ei} \Delta x_j \\ \vdots \\ x_{en} \Delta x_n \end{bmatrix} + [A] \begin{bmatrix} \Delta x_1 x_{e1} \\ \Delta x_1 x_{e2} \\ \vdots \\ \Delta x_i x_{ej} \\ \vdots \\ \Delta x_n x_{en} \end{bmatrix} + [A] \begin{bmatrix} \Delta x_1 \Delta x_1 \\ \Delta x_1 \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_i \Delta x_j \\ \vdots \\ \Delta x_n \Delta x_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots (付6)$$

上式で、右辺第1項は $y(x_e)$ 、第2項と第3項を加え合えると $J\Delta x$ 、第4項(最終項)が $y(\Delta x)$ となり、この項は第1項と同一形式異変数であることがわかる。従って、(13)式が得られる。

$$y_s = y(x_e) + J\Delta x + y(\Delta x) \dots\dots\dots (付7), (13)$$

(2) 例題

(a) 一元二次方程式 いま、次式のスカラー式を考える。

$$y_s = y(x) = x^2 \dots\dots\dots (付8)$$

ここで、 $y_s = 1.44$ 、初期推定値 $x_e^{(0)} = 1.0$ とする。

(付8)式をテーラー級数展開すると、

付第1表 数値例

app. Table 1. Numerical example.

反復回数	本手法		N-R法	
	推定値 x_e	修正値 Δx	推定値 x_e	修正値 Δx
0	1.0	0.0	1.0	0.22
1		0.22	1.22	-0.0198
2		0.1958	1.2002	-0.0002
3		0.2008	1.2000	0.0000
4		0.1998	—	—
5		0.2000	—	—

$$1.44 = x_e^2 + 2x_e \Delta x + \Delta x^2 \dots\dots\dots (付9)$$

(13)式でも述べたように、(付9)式において右辺第1項と第3項は同形異変数である。

x_e に値を入れて(付9)式を数値計算式に書くと、

$$\Delta x^{(r+1)} = \frac{1}{2} (0.44 - \Delta x^{(r)}) \dots\dots\dots (付10)$$

この式より、(付8)式の問題が、結局は初期推定値から真値までの誤差 Δx を求める式に変わったことがわかる。

一方、N-R法の場合、その数値計算式は下式のようになり、反復ごとに Δx と x_e が変化していく。

$$\Delta x^{(r)} = \frac{1}{2x_e^{(r)}} \{1.44 - (x_e^{(r)})^2\} \dots\dots\dots (付11)$$

$$x_e^{(r+1)} = x_e^{(r)} + \Delta x^{(r)} \dots\dots\dots (付12)$$

付第1表に、初期修正値 $\Delta x^{(0)} = 0.0$ として数値計算した結果を示す。

この表から、本手法では推定値 x_e は一定であり、修正値 Δx はその推定値からの値であるのに対し、N-R法では推定値が反復ごとに変わり、修正値も最新の推定値からのものであることが明らかにわかる。

(b) 二母線系統 母線1がスラック母線、母線2がP-Q指定母線であるような二母線系統を考える。

問題となる潮流方程式は、下式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} P_{s2} \\ Q_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{21} & B_{21} & G_{21} & -B_{21} & G_{22} & B_{22} \\ B_{21} & -G_{21} & B_{21} & G_{21} & B_{22} & -G_{22} \end{bmatrix}^* \dots\dots\dots$$

$$* \begin{bmatrix} G_{22} & -B_{22} \\ B_{22} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 & e_1 \\ e_2 & f_1 \\ f_2 & f_1 \\ f_2 & e_1 \\ e_2 & e_2 \\ e_2 & f_2 \\ f_2 & f_2 \\ f_2 & e_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (付13)$$

諸量を次のように定義し、

$$x = \text{col}(e_1, f_1, e_2, f_2) \dots\dots\dots (付14)$$

$$x_e = \text{col}(e_{e1}, f_{e1}, e_{e2}, f_{e2}) \dots\dots\dots (付15)$$

$$\Delta \mathbf{x} = \text{col}(\Delta e_1, \Delta f_1, \Delta e_2, \Delta f_2) \quad \dots\dots\dots (\text{付16})$$

$$\mathbf{y}_s = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \text{col}(P_{s2}, Q_{s2}) \quad \dots\dots\dots (\text{付17})$$

下式の点で線形化すると,

$$\mathbf{x}_e = \text{col}(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad \dots\dots\dots (\text{付18})$$

(付13)式のテーラー展開式は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{y}_s} &= \boxed{\mathbf{y}(\mathbf{x}_e)} + \begin{bmatrix} 2G_{22} + G_{21} & -B_{21} \\ 2B_{22} + B_{21} & G_{21} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{bmatrix} + \boxed{\mathbf{y}(\Delta \mathbf{x})} \quad \dots\dots\dots (\text{付19}) \end{aligned}$$

上式より, 第2項の行列を三角化して Δe_2 と Δf_2 を求める。この行列は, 明らかに定数であるので常に一定である。母線1はスラック母線であるので e_1, f_1 は既知であり解く必要はない。従って, 反復の際 $\Delta e_1, \Delta f_1$ にはいつも零が入る。

(3) 定ヤコビアンを用いた N-R 法との関係
本手法における推定値を $\mathbf{x}_e$, 修正量を $\Delta \mathbf{x}$ で表わし定ヤコビアン N-R 法の推定値を $\mathbf{X}_e$, 修正量を $\Delta \mathbf{X}$ で表わすと, 本手法の数値計算式は

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \Delta \mathbf{x}^{(r+1)} &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)}) - \mathbf{y}(\Delta \mathbf{x}^{(r)}) \\ &\dots\dots\dots (\text{付20}) \end{aligned}$$

定ヤコビアン N-R 法の式は

$$\begin{cases} \mathbf{J} \Delta \mathbf{X}^{(r)} = \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{X}_e^{(r)}) & \dots\dots\dots (\text{付21}) \\ \mathbf{X}_e^{(r+1)} = \mathbf{X}_e^{(r)} + \Delta \mathbf{X}^{(r)} & \dots\dots\dots (\text{付22}) \end{cases}$$

となる。

ここで, 同じ推定値からスタートするものとして,

$$\Delta \mathbf{x}^{(0)} = 0.0 \quad \dots\dots\dots (\text{付23})$$

$$\mathbf{x}_e^{(0)} = \mathbf{X}_e^{(0)} \quad \dots\dots\dots (\text{付24})$$

とおく。

(a) 第1ステップ ($r=0$)

本手法では

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)}) \quad \dots\dots\dots (\text{付25})$$

ここでの解は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_e^{(1)} = \mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (\text{付26})$$

定ヤコビアン N-R 法では

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \Delta \mathbf{X}^{(0)} &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{X}_e^{(0)}) \quad \dots\dots\dots (\text{付27}) \\ &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)}) \quad [(\text{付24})式より] \\ &\dots\dots\dots (\text{付28}) \end{aligned}$$

(付25)式と(付28)式の右辺は等しいので,

$$\Delta \mathbf{X}^{(0)} = \Delta \mathbf{x}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (\text{付29})$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_e^{(1)} &= \mathbf{X}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{X}^{(0)} \quad [(\text{付22})より] \\ &\dots\dots\dots (\text{付30}) \end{aligned}$$

$$= \mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)}$$

$$[(\text{付24})式と(\text{付29})式より] \dots (\text{付31})$$

(付26)式と(付31)式の右辺は等しいので,

$$\mathbf{X}_e^{(1)} = \mathbf{x}_e^{(1)} \quad \dots\dots\dots (\text{付32})$$

となり, 結局, 本手法と定ヤコビアンの N-R 法の第1ステップでの解は等しくなる。

(b) 第2ステップ ($r=1$)

本手法では

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \Delta \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)}) - \mathbf{y}(\Delta \mathbf{x}^{(1)}) \\ &\dots\dots\dots (\text{付33}) \end{aligned}$$

ここでの解は次式で与えられる。

$$\mathbf{x}_e^{(2)} = \mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(2)} \quad \dots\dots\dots (\text{付34})$$

(付33)式において $\mathbf{J} \Delta \mathbf{x}^{(1)}$ を両辺より引くと,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}^{(2)} - \Delta \mathbf{x}^{(1)}) &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)}) - \mathbf{y}(\Delta \mathbf{x}^{(1)}) - \mathbf{J} \Delta \mathbf{x}^{(1)} \\ &\dots\dots\dots (\text{付35}) \end{aligned}$$

右辺第2項～第4項の和は, (付6)式下の説明と同様に $\mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)})$ にほかならない。従って,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\Delta \mathbf{x}^{(2)} - \Delta \mathbf{x}^{(1)}) &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)}) \\ &\dots\dots\dots (\text{付36}) \\ &= \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{X}_e^{(1)}) \quad [(\text{付31})式より] \dots (\text{付37}) \end{aligned}$$

定ヤコビアンの N-R 法では

$$\mathbf{J} \Delta \mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{y}_s - \mathbf{y}(\mathbf{X}_e^{(1)}) \quad \dots\dots\dots (\text{付38})$$

(付37)式と(付38)式の右辺は等しいので,

$$\Delta \mathbf{X}^{(1)} = \Delta \mathbf{x}^{(2)} - \Delta \mathbf{x}^{(1)} \quad \dots\dots\dots (\text{付39})$$

また,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_e^{(2)} &= \mathbf{X}_e^{(1)} + \Delta \mathbf{X}^{(1)} \\ &= (\mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(1)}) + (\Delta \mathbf{x}^{(2)} - \Delta \mathbf{x}^{(1)}) \\ &\quad [(\text{付31})式と(\text{付39})式より] \dots (\text{付40}) \\ &= \mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(2)} \quad \dots\dots\dots (\text{付41}) \end{aligned}$$

(付34)式と(付41)式の右辺は等しいので,

$$\mathbf{X}_e^{(2)} = \mathbf{x}_e^{(2)} \quad \dots\dots\dots (\text{付42})$$

となり, 結局, 本手法と定ヤコビアンの N-R 法の第2ステップでの解も等しくなる。

以上のことを $r=3, 4, \dots$ と続けていくと, 本手法と定ヤコビアンの N-R 法との間に次のような関係が導かれる。

$$\Delta \mathbf{X}^{(r)} = \Delta \mathbf{x}^{(r+1)} - \Delta \mathbf{x}^{(r)} \quad \dots\dots\dots (\text{付43})$$

$$\mathbf{X}_e^{(r+1)} = \mathbf{x}_e^{(0)} + \Delta \mathbf{x}^{(r+1)} \quad \dots\dots\dots (\text{付44})$$

$$= \mathbf{x}_e^{(r+1)} \quad \dots\dots\dots (\text{付45})$$

すなわち, 一次項をもたない, 連立二次代数方程式を $\Delta \mathbf{x}^{(0)} = 0.0$ で解く場合, 両法は各ステップで同じ解を与える。