UDC 621.311.1.016.352.517.911

論文

53-B44

電力系統の拡張したリアプノフ関数構成の 一方法

正 員 谷 口 経 雄 (大阪府大)

1. ま え が き

先に筆者は、発電機のトルク関係の二階の非線形微分方程式系を本質的に含む電力系統を対象に、ラグランジュの状態関数の理論構成を応用したリアプノフ関数構成の新たな方法論を報告した⁽¹⁾。構成法は n 個の二階の連立常微分方程式系で与えられる系のリアプノフ関数を、この系に n 次の正則な実数行列 Q を乗じた新たな系(原系と解軌道を一にする系であり、本文では以下これを相似な系と呼称する)の一般化エネルギー関数で与えるものであり、 Q はこの相似な系に対して、一般化した運動量ベクトルおよびポテンシャル力の積積分において状態関数を一意的に与えるうずなしの条件を成立させ、かつその散逸関数が非負値となるように選定する。この構成法は電力系統の動特性式を特別に変形する必要はなく、物理的概念に立脚し、かつ系統立った手法で関数構成ができるなどの特長をもつものであるが、発電機の制動力の効果をリアプノフ関数に組入れるまでには至らない。

発電機の制動力は、系のエネルギーの消費要素として系の安定平衡点への収束を促進するものであり、上述の構成法においてもその効果はリアプノフ関数の時間導関数のなかに表現されるが、この制動力が単にこの効果にとどまらず何らかの系の漸近安定領域に影響を及ぼすものと推測することができ、既にこの効果を含めたリアプノフ関数の構成例も報告されている⁽²⁾⁻⁽¹¹⁾。

本論は、この制動効果を含むリアプノフ関数構成について一般化エネルギー関数構成の見地から取上げるものであり、文献(1)の構成法の特長を生かした一つの拡張論である。すなわち、系の制動力が運動に伴い消費エネルギーの形で一つのエネルギー関数を形成することに着目し、原系である n 個の二階の連立常微分方程式系に Q を乗じた相似な系に対して新たに n

次の未定係数行列 α および β を導入し、文献(1)で定義した系本来の一般化運動量ベクトルおよびポテンシャル力に、それぞれ制動力に α を乗じた制動効果と、その見返りとして一般化座標ベクトルに β を乗じたポテンシャル力を付加する形式で、一般化運動量ベクトルおよびポテンシャル力を仮想的に定義し一般化エネルギー関数を導出する。この関数にリアプノフ関数として具備すべき条件を適用して、 Q 、 α および β の係数選定を行ない、原系のリアプノフ関数を得るものである。

簡単な一個の二階常微分方程式系で記述される一機一無限大母線系に関しては既に報告したが⁽¹¹⁾、本構成法によれば、係数 α は系の制動力の効果を関数に導入する割合を示すものと考えることができ、ある許容される α の値の範囲内で、この値に依存したリアプノフ関数を導出することができる。これはまた、同一の系に対して種々異なる漸近安定領域を得ることもなり、それらの安定領域の和集合として得られる領域(以下、この領域を合成安定領域と呼ぶ)は、個々の安定領域よりも広がるため真の漸近安定領域への近似度は高まる。なお、 β はその構成過程で α を用いて消去される。

本文では、この関数を拡張リアプノフ関数と名付けその構成法を一般的に述べるとともに、一次遅れ制御系で近似する調速機の効果を考慮した一機一無限大母線系のリアプノフ関数を導出し、その漸近安定領域についてこれを等価的に評価する系統の故障時における臨界故障除去時間を指標に考察し、その有効性を示している。

2. 拡張したリアプノフ関数構成

〈2.1〉 修正エネルギー関数 系の動特性式が、(1)式に示す自由度 n の一般力学系における特性式で記述されるものとする。

$$M\ddot{x} + D\dot{x} + f(x) = F \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

x : 一般化座標で n 次元列ベクトル

A Method of Constructing a Generalized Lyapunov Function for Power System. By Tsuneo Taniguchi, Member (Faculty of Engineering, University of Osaka Prefecture).
谷口経雄: 正員, 大阪府立大学工学部電気工学科講師

$\dot{x}$: 一般化速度で n 次元列ベクトル

$\ddot{x}$: 一般化された加速度で n 次元列ベクトル

M : 一般化質量を要素とする n 次の正方行列

D : 一般化制動要素からなる n 次の正方行列

$f(x)$: 一般的なポテンシャル力で、 n -次元ベクトル関数であり、一般的に x に関し連続微分可能な非線形関数

F : 一般的な外力で n 次元列ベクトル

この系の一般化したエネルギー関数を得るために、

(1) 式の両辺に正則な n 次の実数行列 Q を乗じた相似な系

$$\left. \begin{aligned} H\ddot{x} + R\dot{x} + G(x) &= E \\ \text{ここに、} \\ H &= QM, \quad R = QD \\ G(x) &= Qf(x), \quad E = QF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

を考え、この系に対して後述の一般化エネルギー関数構成に必要なうずなしの条件を Q とともに満たすような n 次の未定係数行列 α および β を新たに導入して (3) 式のように変形する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(H\dot{x} + HaR\dot{x}) \\ + (I - Ha)R\dot{x} \\ + [\beta x + G(x)] &= \beta x + E \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

I : n 次の単位行列、 α, β : n 次の未定係数行列

なお、 β は後述の理論から α を用いて求められるが、暫時説明の都合上これを用いる。

(3) 式の形式において、一般化運動量ベクトル $P(x, \dot{x})$ および一般化ポテンシャル力 $F(x)$ は見掛け上、

$$\left. \begin{aligned} P(x, \dot{x}) &= H\dot{x} + HaR\dot{x} \\ F(x) &= \beta x + G(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

で定義することができる。

(2) 式より (4) 式に至る過程は状態関数構成の可能性の立場から思考したものであり、従って (4) 式の定義の物理的実在としての意義は全くないが、抽象的または仮想的な思考を許容すれば、(2) 式の系における散逸力 $R\dot{x}$ の消費する非可逆変換形のエネルギーの一部を運動および位置のエネルギーのような可逆変換形エネルギーとして取扱うものであり、そのエネルギー蓄積能力を (3) 式の右辺第 1 項の βx が付与するものと考えることができる。なお、ここで単に $R\dot{x}$ に α を乗じず Ha を乗じているのは、次節で導くリアプノフ関数の時間導関数の導出の容易さのためである。

この思考に基づけば、一般化エネルギー関数構成法⁽¹⁾を準用することにより制動効果に相当する一般化

エネルギーを含む一つの修正エネルギー関数を得ることができる。

すなわち (4) 式より、系の一般化運動エネルギー $T(x, \dot{x})$ および位置エネルギー $U(x)$ は、

$$\left. \begin{aligned} T(x, \dot{x}) &= \int_0^{\dot{x}} [P(x, \dot{x})]^T d\dot{x} \\ &= \int_0^{\dot{x}} [H\dot{x}]^T d\dot{x} + \int_0^{\dot{x}} [HaR\dot{x}]^T d\dot{x} \\ U(x) &= \int_0^x [F(x)]^T dx \\ &= \int_0^x [\beta x]^T dx + \int_0^x [G(x)]^T dx \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

で与えられ、修正エネルギー関数 $V(x, \dot{x})$ は、

$$V(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) + U(x) \dots\dots\dots (6)$$

で記述できる。

さて T および U のいずれもが状態関数を形成するには、(5) 式の積分値が積分路に依存しないことを示す次式の、いわゆるうずなしの条件が満足されなければならない。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_j} &= \frac{\partial P_j(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}_i} \\ \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j} &= \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

($i, j = 1, 2, \dots, n$)

従って、修正エネルギー関数構成の問題は、上述の性質を満たす正則な未定係数行列 Q と、新たに導入した未定係数行列 α および β を見いだすことに集約される。

〈2・2〉 拡張したリアプノフ関数構成 本節では、前節の概念を基盤に Q, α および β などの各係数行列の選定をリアプノフ関数構成の立場で考える。

まず (1) 式の系において、非線形ベクトル関数 $f(x)$ に関して次に示す 1° および 2° の性質を有するものとする。この性質は Desoer-Wu の仮定⁽¹²⁾で知られるものであり、(1) 式の系の安定平衡点 ($x=0, \dot{x}=0$) の近傍の有界な領域 Ω 内において、

$$1^\circ. Qf(x) = \nabla V_1(x) \dots\dots\dots (8)$$

を与える正則な実数行列 Q が存在し、かつ領域 Ω 内で $x \neq 0$ のとき、

$$2^\circ. V_1(x) > 0 \dots\dots\dots (9)$$

である。但し、 $f(0)=0, V_1(0)=0$ とする。

$$x^T Pf(x) \geq 0 \dots\dots\dots (10)$$

となるある実数行列 P が存在する。

このとき (6) 式で記述される $V(x, \dot{x})$ が、この領

域 Ω 内で次の (1)~(5) の条件を満足すれば、この $V(x, \dot{x})$ は (1) 式の系のリアプノフ関数となり、領域 Ω 内で系の漸近安定は保証される。

(1) $x, y(=\dot{x})$ に関して連続な一階偏導関数をもつ連続な実数値スカラ関数

$$(2) \quad V(0, 0) = 0$$

$$(3) \quad x \neq 0, \dot{x} \neq 0 \text{ のとき } V(x, \dot{x}) > 0$$

$$(4) \quad x \neq 0, \dot{x} \neq 0 \text{ のとき } dV(x, \dot{x})/dt (= \dot{V}(x, \dot{x})) \leq 0$$

(5) 原点以外の系の任意の解軌道上で $\dot{V}(x, \dot{x})$ は恒等的に 0 でない。

この場合、 $V(x, \dot{x})$ は、

$$0 \leq V(x, \dot{x}) < V_c \dots\dots\dots (11)$$

で示さるようなしきい値 V_c をもつ。

以上を考慮すれば Q, α および β の各係数行列のもつべき性質について以下に示す (a)~(c) を与える。

(1) の条件は次の (a) を与える。

(a) (4) 式に示す一般化運動量ベクトルおよび一般化ポテンシャル力に関して (7) 式のうすなしの条件を満足すること。

これより、1° の性質を満足する Q は、またこれを含む行列 H を対称行列にするものでなければならないことを意味し、また β も対称行列でなければならない。

次に (a) を考慮して (5) 式の積分を行なえば、

$$\begin{aligned} V(x, \dot{x}) = & \{(\dot{x} + \alpha R x)^T H(\dot{x} + \alpha R x) \\ & + x^T [\beta - R^T \alpha^T H \alpha R x]\} / 2 \\ & + \int_0^x [G(x)]^T dx \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

を得る。上式は系の安定平衡点において明らかに (2) の条件を備えている。

(3) の条件は、その成立のための十分条件として次の (b) を与える。

(b) 1° の性質を満足する Q , すなわち、

$$V_1(x) = \int_0^x [G(x)]^T dx > 0 \dots\dots\dots (13)$$

と、 Q を含む行列に関して*

$$H \geq 0 \dots\dots\dots (14)$$

$$[\beta - R^T \alpha^T H \alpha R] \geq 0 \dots\dots\dots (15)$$

次に $\mathcal{F} = 0$ のとき、 $V(x, \dot{x})$ の時間導関数 $\dot{V}(x, \dot{x})$ は付録 I に示すように、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \dot{x}) = & -\dot{x}^T S \dot{x} - x^T [R^T \alpha^T R - \beta] \dot{x} \\ & - [\alpha R x]^T G(x) \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

但し、 S は (付 3) 式に示すように、行列 $(I - H \alpha) R$ の対称部分となり、(5) の条件は (16) 式の導出過程から明らかに満足される。

(4) の条件成立のための十分条件は次の (c) で与えられる。

$$(c) \quad S \geq 0 \dots\dots\dots (17)$$

$$R^T \alpha^T R - \beta = 0 \dots\dots\dots (18)$$

$$[\alpha R x]^T G(x) \geq 0 \dots\dots\dots (19)$$

(17), (18) 式は、(16) 式の右辺第 3 項を除く 2 項の和が x および $\dot{x}$ の値のいかんにかかわらず、半負定値となるための条件から導かれる。

(19) 式は 1° の性質に相当し、このとき、 $R^T \alpha^T Q = P$ である。

以上、(a)~(c) を満足する正則行列 Q と、 α および β を見いだすと、(12) 式の $V(x, \dot{x})$ は (1) 式の系のリアプノフ関数となる。

(18) 式の等式条件により β は消去することができ、(12), (16) 式は整理され最終的に (1) 式の系のリアプノフ関数は特定の行列 α に依存した形式で、

$$\begin{aligned} V(x, \dot{x}; \alpha) = & \{(\dot{x} + \alpha R x)^T H(\dot{x} + \alpha R x) \\ & + x^T R^T (\alpha^T - \alpha^T H \alpha) R x\} / 2 \\ & + \int_0^x [G(x)]^T dx \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

で与えられる。このとき、その時間導関数は、

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, \dot{x}; \alpha) = & -\dot{x}^T S \dot{x} - [\alpha R x]^T G(x) \\ & \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

となる。 $\alpha = 0$ は文献 (1) の結果に一致する。

α の値により、同一の系に対し種々のリアプノフ関数が導出され、その漸近安定領域に関して多くの情報を得ることができるので、本文では (20) 式の形式で与えられる関数を拡張リアプノフ関数と呼称する。

〈2.3〉 漸近安定領域としきい値 系の漸近安定を保証する領域 Ω は (1) 式の系の安定平衡点近傍のあん点における最小の V の値、すなわち、しきい値 V_c を求めることにより得られる。

$\mathcal{F} = 0$ のときあん点は (1) 式の動特性式で、

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 0, \quad x \neq 0 \\ \text{但し,} \\ \ddot{x} &= 0, \quad \dot{x} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

を解いて求められる。いま S 個のあん点 $(x_{ci}, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, S$) が得られたとき、しきい値 V_c は

$$V_c = \min_{1 \leq i \leq S} \{V(x_{ci}, 0; \alpha)\} \dots\dots\dots (23)$$

で与えられる。しきい値を与えるあん点を $(x_c, 0)$ とすれば、(20) 式より V_c は次式で与えられる。

*: 以下、本文においては、ある行列 L が正 (負) 定値行列のとき $L > 0$ ($L < 0$)、半正 (負) 定値行列のとき $L \geq 0$ ($L \leq 0$) で略記する。

第 1 図 調速機を含む例題系統

Fig. 1. Sample system with velocity governor.

$$V_c = V(x_c, 0; \alpha) = x_c^T (R^T \alpha^T R) x_c / 2 + \int_0^{x_c} [G(x)]^T dx \quad (24)$$

3. 電力系統への適用

第 1 図に示すような一機-無限大母線系において、一次遅れ制御系で近似する調速機の効果を考慮した場合の拡張リアプノフ関数を導出する。なお本例題系統においては、発電機の過渡リアクタンス背後の電圧一定、発電機の制動係数一定、更に線路および機器の抵抗分無視の仮定の下に論を進める。以下、本文で使用する諸記号はまとめて第 1 表に示す。

(3・1) 動特性式 本例題系統の動特性式は⁽⁴⁾、

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 \delta}{dt^2} + D \frac{d \delta}{dt} &= P_i - P_e \\ \Delta P_i &= K_p \frac{p \delta}{\omega_0 (1 + T_g p)} \\ P_e &= P_M \sin \delta, \quad P_M = E_A E_B / (x_e + x_d') \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \delta - \delta^s \\ x_2 &= \Delta P_i = P_M \sin \delta^s - P_i \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

に示す系統の安定平衡点 $(\delta^s, P_M \sin \delta^s)$ からの変化量

第 1 表 諸 記 号

Table 1. List of symbols.

x_d'	発電機の過渡リアクタンス (p.u.)
x_e	発電機端子と無限大母線間の伝達リアクタンス (p.u.)
x_t	変圧リアクタンス (p.u.)
x_l	線路リアクタンス/1 回線 (p.u.)
E_A	発電機の過渡リアクタンス背後の電圧 (p.u.)
E_B	無限大母線-電圧 (p.u.)
δ	E_A と E_B 間の相角 (rad)
δ^s	安定平衡状態における δ (rad)
D	発電機の制動係数 (s/rad)
M	(単位慣性定数)/ ω_0 (s ² /rad)
K_p	調速機制御系の利得
T_g	調速機時定数 (s)
ω_0	$2\pi f_0$ ($f_0=60$ Hz)
p	微分演算子

$x = [x_1, x_2]^T$ を変数として (25) 式を書換えると (1) 式の形式で動特性式が記述でき、各係数行列 M , D , ベクトル関数 $f(x)$ および一般的外力 $\mathcal{F}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} D/M & 0 \\ -K_p/(\omega_0 T_g) & 1 \end{bmatrix} \\ f(x) &= \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 + P_M [\sin(x_1 + \delta^s) - \sin \delta^s] / M \\ x_2 / T_g \end{bmatrix} \\ \mathcal{F} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

(3・2) Q , α および β の選定 二次の正則な未定係数行列 $Q (= (q_{ij}))$, 未定係数行列 $\alpha (= (\alpha_{ij}))$, $\beta (= (\beta_{ij}))$ ($i, j=1, 2$) を用い前章 (a) ~ (c) に基づき各係数行列の要素の値を選定する。

まず、前章 (a) で述べたうずなしの条件の成立すべきことから、

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ 0 & q_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

となり、要素間に存在すべき関係は正則行列になるべきことも考慮して

$$q_{12} = -q_{11} T_g / M, \quad q_{11} \neq 0, \quad q_{22} \neq 0 \quad (29)$$

を得る。このとき (2) 式で示す相似な系の係数行列 H , R およびベクトル関数 $G(x)$ はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} H &= \begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} q_{11}(D + K_p/\omega_0)/M & -q_{11} T_g / M \\ -q_{22} K_p / (\omega_0 T_g) & q_{22} \end{bmatrix} \\ G(x) &= \begin{bmatrix} q_{11} P_M [\sin(x_1 + \delta^s) - \sin \delta^s] / M \\ q_{22} x_2 / T_g \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

となる。

次に (a) の結果を考慮の下に (b) および (c) について調べる。(13) 式の積分は、

$$V_1(x) = q_{11} \frac{P_M}{M} [\cos \delta^s - \cos(x_1 + \delta^s) - x_1 \sin \delta^s] + q_{22} \cdot \frac{x_2^2}{2 T_g} \quad (31)$$

となり、系の安定平衡点近傍において x_1 の変動域が

$$-(\pi + 2\delta^s) < x_1 < \pi - 2\delta^s \quad (32)$$

であり、かつ、

$$q_{11} > 0, \quad q_{22} > 0 \quad (33)$$

のとき $V_1(\mathbf{x})$ は正值となり (13) 式の関係満足する。言換えれば、1° の性質を有することになる。このとき、(14) 式の $\mathbf{H}$ の半正定値もまた満足する。

さて、(19) 式の関係であるが、これを満足する α についての系統立った解析手法はない。

しかしながら、本例の (30) 式の $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ にみられるように、一般的に $\mathbf{Q}$ を乗じた系のベクトル関数の各要素 $G_i(\mathbf{x}) (i=1, 2, \dots)$ が $G_i(x_i)$ となる場合には、行列 $[\alpha \mathbf{R}]$ を対角行列に選ぶことが一つの解決法となる。この観点で α を求めれば、

$$\alpha = \alpha_{11} \begin{bmatrix} 1 & q_{11} T_\theta / (q_{22} M) \\ q_{11} T_\theta / (q_{22} M) & \frac{q_{11}^2 (D + K_\theta / \omega_0) T_\theta^2}{q_{22}^2 K_\theta M^2} \omega_0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

が得られる。このとき (19) 式は、

$$\begin{aligned} & [\alpha \mathbf{R} \mathbf{x}]^T \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{q_{11}^2 \alpha_{11} D}{M^2} \left\{ P_M x_1 [\sin(x_1 + \delta^s) - \sin \delta^s] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\omega_0 T_\theta}{K_\theta} x_2^2 \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

となり、 $V_1(\mathbf{x})$ の場合と同じ x_1 の変動域で

$$\alpha_{11} \geq 0 \quad (36)$$

のとき、2° の性質を満足する。

(17) 式の関係は、

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{q_{11}}{M} \left\{ D(1 - q_{11} \alpha_{11}) + \frac{K_\theta}{\omega_0} \right\} \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{q_{11} T_\theta}{M} + \frac{q_{22} K_\theta}{\omega_0 T_\theta} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{q_{11} T_\theta}{M} + \frac{q_{22} K_\theta}{\omega_0 T_\theta} \right) \\ q_{22} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (37)$$

で示され、便宜上、

$$q_{11} \alpha_{11} = \alpha \quad (38)$$

とおき、行列 $\mathbf{S}$ にシルベスタの半正定値性の定理を適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} & (D + K_\theta / \omega_0) / D \geq \alpha \\ & q_{22}^2 - 2(l + m) q_{11} q_{22} + (l - m)^2 q_{11}^2 \leq 0 \\ & l = \frac{\omega_0^2 T_\theta^2}{M K_\theta^2} \{ D(1 - \alpha) + K_\theta / \omega_0 \} \\ & m = \frac{\omega_0^2 T_\theta^2}{M K_\theta^2} D(1 - \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

を満足する q_{11} , q_{22} および α の選定になる。そこで α が非負なることを考慮して、 q_{11} をパラメータに

(39) 式の第 2 式を解けば、

$$1 \geq \alpha \geq 0 \quad (40)$$

の制約を得る。これは自動的に (39) 式の第 1 式の関係満足する。(40) 式の制約下で、 q_{22} を

$$(\sqrt{l} - \sqrt{m})^2 q_{11} \leq q_{22} \leq (\sqrt{l} + \sqrt{m})^2 q_{11} \quad (41)$$

の範囲内に選べば、 $\mathbf{S}$ の半正定値性は満足される。

最後に (15) 式の半正定値性は、

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}^T \{ \alpha^T - \alpha^T \mathbf{H} \alpha \} \mathbf{R} \\ &= \frac{q_{11} \alpha D}{M} \begin{bmatrix} \{ D(1 - \alpha) + K_\theta / \omega_0 \} / M & -T_\theta / M \\ -T_\theta / M & \frac{\omega_0 T_\theta^2}{M K_\theta} \end{bmatrix} \\ & \geq 0 \quad (42) \end{aligned}$$

より、

$$\left. \begin{aligned} & (D + K_\theta / \omega_0) / D \geq \alpha \\ & \frac{D \omega_0 T_\theta^2}{M^2 K_\theta} (1 - \alpha) \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

を得るが、この関係は (40) 式に示す α において必然的に満足される。

〈3・3〉 例題系統の拡張リアプノフ関数 前節で選定した $\mathbf{Q}$, α および β (これは α を用いて置換えられる) を用いて、(20) 式から例題系統の拡張リアプノフ関数を導出すれば、

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; \alpha) &= q_{11} \left\{ \frac{(\dot{x}_1 + \alpha D x_1 / M)^2}{2} \right. \\ & \quad + \frac{\alpha D}{2 M^2} \left\{ [D(1 - \alpha) + K_\theta / \omega_0] x_1^2 - 2 T_\theta x_1 x_2 \right. \\ & \quad + \frac{\omega_0 T_\theta^2}{K_\theta} x_2^2 \left. \right\} + \frac{P_M}{M} \{ \cos \delta^s - \cos(x_1 + \delta^s) \\ & \quad - x_1 \sin \delta^s \} + \frac{q_{22}}{2 q_{11} T_\theta} x_2^2 \left. \right\} \quad (44) \end{aligned}$$

となり、その時間導関数は (21) 式より、

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}; \alpha) &= -q_{11} \left\{ [D(1 - \alpha) + K_\theta / \omega_0] \dot{x}_1^2 / M \right. \\ & \quad - \left(\frac{T_\theta}{M} + \frac{q_{22} K_\theta}{q_{11} \omega_0 T_\theta} \right) \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{q_{22}}{q_{11}} \dot{x}_2^2 \\ & \quad + \frac{\alpha D}{M^2} \left\{ P_M x_1 [\sin(x_1 + \delta^s) - \sin \delta^s] \right. \\ & \quad \left. + \frac{\omega_0 T_\theta}{K_\theta} x_2^2 \right\} \left. \right\} \quad (45) \end{aligned}$$

となる。〈2・3〉節を参照にあん点 $(x_c, 0)$ を求め、次いでしきい値を求めれば、

$$x_c = [\pi - 2 \delta^s, 0]^T \quad (46)$$

$$V_c = V(x_c, 0; \alpha)$$

$$\begin{aligned}
&= q_{11} \left\{ \frac{\alpha D'^2}{2M^2} (\pi - 2\delta^s)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{P_M}{M} \{ 2 \cos \delta^s - (\pi - 2\delta^s) \sin \delta^s \} \right\} \\
&\text{ここに,} \\
&D' = \sqrt{D(D + K_g/\omega_0)} \\
&\dots\dots\dots (47)
\end{aligned}$$

を得る。上式より、しきい値は α の値によって異なるが、 q_{22} の値には依存しないことがわかる。いま、 $\alpha = \alpha_0$ 、 $q_{22} = q$ におけるしきい値を $V_c(x_c, 0; \alpha_0)$ 、系の解軌道 $x, \dot{x}$ における V を $V(x, \dot{x}; \alpha_0, q)$ で示すと、しきい値内、すなわち領域 Ω 内においては、

$$\begin{aligned}
&V(x, \dot{x}; \alpha_0, q_{\min}) < V(x, \dot{x}; \alpha_0, q) \\
&\quad < V_c(x_c, 0; \alpha_0) \\
&\text{ここに, } \alpha_0: (40) \text{ 式の制約下の一つの特定の値} \\
&q_{\min} = (\sqrt{l} - \sqrt{m})^2 q_{11} < q \leq (\sqrt{l} \\
&\quad + \sqrt{m})^2 q_{11} \\
&\dots\dots\dots (48)
\end{aligned}$$

となるので、(44)式中の q_{22} を $q_{\min}$ に選べば $x, \dot{x}$ 座標系の位相空間において広い漸近安定領域が得られる。なお q_{11} は任意の正値を選ぶことができる。また、導出した(44)式のリアプノフ関数は既出のリアプノフ関数⁽⁷⁾⁽⁸⁾を含むものである。

ここで、(47)式の V_c の右辺の構成をみれば、

$$M \ddot{x}_1 + D' \dot{x}_1 + P_M [\sin(x_1 + \delta^s) - \sin \delta^s] = 0 \dots\dots\dots (49)$$

で記述される簡単な一機-無限大母線系の拡張リアプノフ関数のしきい値と等価になる⁽¹¹⁾。この系の制動係数 D' と本例題システムの制動係数 D を比較すれば、 $D' > D$ であり調速機の利得 K_g が発電機の制動力の強化に寄与することがわかる。また、 α (一般的には α) はこの制動力の効果をリアプノフ関数に導入する割合を示すものと考えられる。

なお、本構成法は系の非線形ベクトル関数に関して 1° および 2° の性質 (Desoer-Wu の仮定) を有することを前提としており、特に 2° の性質は 1° より厳しい制約である。このため、発電機の鎖交磁束変化を考慮した文献(1)の例題システムなどに対しては、 2° の制約のため $\alpha = 0$ を選ばざるを得ない。

この点、本法に対し今後更に検討すべき余地を残すものである。

〈3・4〉 漸近安定領域についての考察 拡張リアプノフ関数の保証する漸近安定領域を調べるため、第1図のシステムの1回線に3相短絡故障を想定し、故障除去後のシステムが安定を保つための故障回線の臨界故障除

第2表 例題システムの平衡点、しきい値および諸定数
Table 2. Equilibrium points, stability limits and parameters of sample system.

初期の発電機入出力 P_i			1.0	0.9	0.8
項 目					
初期の安定平衡点 δ^s ($dP_i=0$, 2 回線送電)			0.6126	0.5439	0.4780
最終形態の安定平衡点 δ^s ($dP_i=0$, 1 回線送電)			0.9000	0.7824	0.6772
最終形態の不安定平衡点 ($=\pi-2\delta^s$, $dP_i=0$, 1 回線送電)			1.342	1.577	1.787
しきい値 V_C ($q_{11}=1$)	α	0	24.55	39.17	56.00
		0.2	25.21	40.08	57.17
		0.4	25.86	40.98	58.34
		0.6	26.52	41.89	59.50
		0.8	27.18	42.80	60.67
		1.0	27.84	43.71	61.83
系統の諸定数			$x_d'=0.2$, $x_t=0.12$, $x_l=0.5$, $T_g=0.1$, $K_g=10.0$, $M=0.01$, $E_A=1.2$, $E_B=1.0$, $D=0.01$		

第3表 臨界故障除去時間

Table 3. Critical switching time for various values of α .

P_i		1.0		0.9		0.8	
		F_1	F_2	F_1	F_2	F_1	F_2
α	0	73.8	114.8	103.9	165.5	135.2	224.7
	0.2	74.9	115.9	104.5	165.5	135.3	223.9
	0.4	75.9	116.8	105.0	165.5	135.4	223.0
	0.6	76.8	117.7	105.5	165.4	135.4	222.0
	0.8	77.6	118.3	105.8	165.1	135.4	220.7
	1.0	78.1	118.1	105.7	163.3	134.6	217.5
	真の臨界故障除去時間	102.0	153.5	130.0	200.5	158.5	257.0

去時間 τ について種々の α (本例では α) に対するリアプノフ関数のしきい値を指標に求め、これと(25)式に示すシステムの動特性式の数値解析から求まる真の臨界故障除去時間との対比を行なう。

計算方法については文献(1)の第5章に述べた手法に従うが、システムの最終形態は1回線送電である。

本例題システムの初期および最終形態における安定平衡点、あん点、リアプノフ関数のしきい値およびシステムの諸定数などは一括して第2表に示した。

第3表は、故障前の発電機の入出力 P_i 、未定係数 α をパラメータに、故障点を送電端母線近傍の F_1 、線路の中央 F_2 (第1図参照)に想定したそれぞれの場合における臨界故障除去時間の計算結果を示す。同表より真の臨界故障除去時間に対して最良の評価を与える α の値は、システムの初期の入出力の値あるいは故障条件により異なるが(第3表中に示す矢印は評価の高まる方向を示す)、概して最良の評価を与える α の値は初期の入出力 P_i の増加に伴い、また故障のか

こくさに伴い0から1へ移行する傾向がみられる。なお、最良の α を解析的に求める方法はなく、ここでは0.2刻みの値で求めた結果を用いて考察した。

このような傾向を示すことについて、更に位相面を用いて考察する。なお、以下で述べる漸近安定領域とは本法で構成したリアプノフ関数の保証する領域を指すものとする。

第2図は $P_1=1.0$ で運転中、 F_1 点に3相短絡故障発生、故障回線除去を70ms後に行なった瞬時における漸近安定領域の $x_1, \dot{x}_1$ 座標系(但し $x_2=0.0504$, これは故障回線除去瞬時の値である)の断面の一例で、 $\alpha=0, 0.6, 1$ の3例について描いている。同図中、曲線 SBC はこのときの解軌道の $x_1, \dot{x}_1$ 座標系への投影、また曲線 $SB B'$ は故障継続時の解軌道の投影をそれぞれ示し、 B は故障回線除去点である。本例における漸近安定領域は本来 $\dot{x}_1, x_1$ および x_2 の三次元空間で示されるべきものであり、同図は単にその一断面を示したにすぎず、これと解軌道とは B 点においてしか直接対応することはできないが、 $x_2=0.0504$ の断面は解軌道の接近する安定領域限界近傍の様相をほぼ示し、限界値に到達したときの限界曲線群の α の値によるならば、同図に示すそれと同様の傾向にある。従って、解軌道の進行状況からみて、臨界故障除去時間に対して最良の評価を与える α の値は1となることが推測できる。

第3図は $P_1=0.8$, F_2 点3相短絡の場合について同様に示したものであり、故障回線除去は215ms, $x_2=0.136$ における断面を示す。同図より、最良の α の値は0と推測できる。このように最良の α の値に差異の生じるのは、解軌道の径路により接近する限界曲線群の α によるならびに差異があるためで、 P_1 の増加および故障程度のかくさにつれ解軌道の x_1 軸に対する傾きが急しゅんとなり、第3図に示す様相から第2図の様相に移行していく。

以上、例題システムに対する考察から、拡張リアプノフ関数を用いて臨界故障除去時間の評価を行なう場合、実用的にはシステムの構成、運転条件などを考慮して α の値の異なる幾組かのリアプノフ関数を用いて検証することが望ましい。また本関数を用いることにより、 α (一般的には α) の値により異なる個々の漸近安定領域を重ねた合成安定領域を求め、これと解軌道の各瞬時における状態点と照合して安定判別を行なうことも可能であろう。

4. むすび

ラグランジェの状態関数の理論構成に若干の修正手

($P_1=1.0$, F_1 点3相短絡)

第2図 故障除去後の漸近安定領域と故障時の解軌道

Fig. 2. Regions of asymptotic stability for post-fault system and phase trajectories under fault.

($P_1=0.8$, F_2 点3相短絡)

第3図 故障除去後の漸近安定領域と故障時の解軌道

Fig. 3. Regions of asymptotic stability for post-fault system and phase trajectories under fault.

法を用いて一つの拡張したリアプノフ関数の構成が可能となった。構成されたリアプノフ関数はなお安定に対する十分条件を与えるにすぎないが、制動効果の加味する割合を変えることにより広い安定領域を把握することができ、よりきめ細い過渡安定度評価を可能とする。

本構成法は二階の常微分方程式系を直接取扱うので、Popovの系を応用した関数構成の場合に比べて未定係数行列の次数は低く行列演算も軽減できるなどの特長をもつので、未定係数選定は容易である。

この点、多機系統への適用に際して本構成法は有利となるが、係数行列の次数の増加に伴い、本例に示すような系統立てて係数を選び α に依存する最良のリアプノフ関数群を見いだすという解析過程は極めて煩雑かつ困難なものとなる。これは本構成法に限らず他の構成法にもいえる共通の問題点であり、最良係数選定のための系統立った手法の開発が必要である。

その他、発電機の鎖交磁束変化を考慮し AVR 系を含む系統に対して何らか発電機の制動力の効果を含む拡張形のリアプノフ関数を導く手法の開発、制御系のパラメータと漸近安定領域の広さとの関係などの問題もあるが、これらについて今後更に考究したいと考えている。最後に、計算にあたって協力していただいた当学大学院工学研究科の馬野義雄、宮城隼夫（現、琉球大学助手）両君に紙面を借りて謝意を表する。なお、数値計算は大阪府立大学計算センター TOSBAC-5600 による。

（昭和 52 年 2 月 21 日受付）

文 献

- (1) 谷口・宮城：「電力系統のリアプノフ関数構成の方法」電学論 B, 52, 271 (昭 52-5)
- (2) J. L. Willems: Improved Lyapunov function for transient power-system stability. *Proc. IEE*, 115, 9, 1315 (1968)
- (3) J. L. Willems: Generalization of the equal-area criterion for synchronous machines. *ibid.* 116, 8, 1431 (1969)
- (4) N. Dharma Rao: Routh-Hurwitz conditions and Lyapunov methods for the transient-stability problem. *ibid.* 116, 4, 539 (1969)
- (5) M. A. Pai, et al.: Power System Transient Stability Regions using Popov's Method. *IEEE Trans. Power*

Apparatus Syst. PAS-89, 5/6, 788 (1970)

- (6) J. L. Willems: Direct Methods for Transient Stability Studies in Power System Analysis. *IEEE Trans. Automatic Control* AC-16, 4, 332 (1971)
- (7) J. L. Willems, et al.: The Application of Lyapunov Method to the Computation of Transient Stability Regions for Multimachine Power Systems. *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.* PAS-89, 5/6, 795 (1970)
- (8) T. K. Mukherjee, et al.: Transient stability of a power system by the second of Lyapunov. *INT. J. SYSTEMS SCI.* 3, 4, 439 (1972)
- (9) M. Mansour: Real Time Control of Electric Power Systems, edited by E. Handschin. 169 (1972) Elsevier
- (10) 高橋：電力システム工学 170 (昭 52) コロナ社
- (11) 谷口・宮城：「エネルギー概念を基盤とした電力系統のリアプノフ関数の一構成法」電学論 B, 52, 55 (昭 52-2)
- (12) C. A. Desoer, et al.: Stability of a Nonlinear Time-invariant. *Automatica* 5, 2, 231 (1969)

付 録

I $\dot{V}(x, \dot{x})$ の導出

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, \dot{x}) &= (\partial V / \partial \dot{x})^T \ddot{x} + (\partial V / \partial x)^T \dot{x} \\ &= (H \dot{x} + H a R x)^T \ddot{x} \\ &\quad + [(H a R)^T \dot{x} + \beta x + G(x)]^T \dot{x} \\ &\quad \dots\dots\dots (付 1)\end{aligned}$$

上式において、 H および β は対称行列であることを考慮すれば、

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, \dot{x}) &= (\dot{x} + a R x)^T H \ddot{x} \\ &\quad + [(H a R)^T \dot{x} + \beta x + G(x)]^T \dot{x} \\ &= (\dot{x} + a R x)^T [-R \dot{x} - G(x)] \\ &\quad + [(H a R)^T \dot{x} + \beta x + G(x)]^T \dot{x} \\ &= -\dot{x}^T S \dot{x} - x^T [R^T a^T R - \beta] \dot{x} \\ &\quad - [a R x]^T G(x) \dots\dots\dots (付 2)\end{aligned}$$

ここに、

$$S = [(I - H a) R + R^T (I - H a)^T] / 2 \dots\dots\dots (付 3)$$

但し I : 単位行列である。