UDC 621.928.8: 537.636: 621.318.1-492.3

論文

54-B48

大こう配磁気分離における磁性粒子捕獲半径

正員 林 憲一 (愛知工大)
正員 内山 晋 (名大)

1. はじめに

大こう配磁気分離 (HGMS) 技術は、アメリカにおける開発当初から数えて 10 年を経て、我が国でもようやく実用化の気運が高まってきた。HGMS の基礎的ならびに理論的研究は、装置開発よりむしろ遅れて出発し、現在その最盛期に達しているといえよう。この研究の主流をなす粒子軌跡理論⁽¹⁾⁽²⁾のあらましをここに示すと、一様な磁界の中に 1 本の強磁性細線を置き、この空間における磁性粒子の運動方程式を作り、これを電子計算機を用いて種々の条件や近似のもとに解いて粒子軌跡を定め、磁性粒子が磁性線に捕獲されるか否かの限界から捕獲半径を求める。次に、多数の磁性線を含む磁気フィルタを考え、フィルタが磁性粒子を捕える割合、すなわち回収率を捕獲半径の関数として定めるものである。

ところで、このように理論的に定められる捕獲半径は、実験的な回収率から逆算された捕獲半径に比べてはば 1 けた程度大きく、理論の方が正しいものとするれば、HGMS 装置には、更に飛躍的な性能の向上が期待される。この意味で、理論と実験の食違いを究明することは工学的に大きな意義があろう。しかし、現場で実験に携わっている人々にとっては、計算機シミュレーションという手段は手軽に利用できず、たとえ理論で設定された条件と実際のとの相違に気づいても、この適否を理論的に立入って究明することは極めて困難であろう。我々は、HGMS が実用化されているほとんどの場合に対して適用され、電子計算機によらず解析的に捕獲半径を計算する一般的方法を見出したので、具体的な適用例と共にここに報告する。

2. 一般理論

〈2-1〉 磁性粒子の運動方程式 磁性粒子の運動方程式は、ニュートンの法則から

Capture Radius of Magnetic Particle in High Gradient Magnetic Separation. By Ken-ichi Hayashi, Member (Aichi Institute of Technology) & Susumu Uchiyama, Member (Faculty of Engineering, Nagoya University).

林 憲一: 正員, 愛知工業大学電子工学科
内山 晋: 正員, 名古屋大学工学部

$$\vec{F}_I + \vec{F}_D + \vec{F}_M + \vec{F}_G + \vec{F}_L + \dots = 0 \quad \dots\dots (1)$$

から一般に導かれる。ここに、 $\vec{F}_I$, $\vec{F}_D$, $\vec{F}_M$, $\vec{F}_G$, $\vec{F}_L$, …は、それぞれ慣性力、ドラッグ力、磁気力、重力、ロンドン力、…である。HGMS が実用に供されるのは、磁性粒子が水や油などの液体中に懸濁されており、その大きさは比重分離が容易に利用できないほどに微細な場合がほとんどである。このような条件のもとでは、慣性力 $\vec{F}_I$ はドラッグ力 $\vec{F}_D$ に比べて無視できる。これまでの数値計算による研究によれば⁽³⁾、ロンドン力 $\vec{F}_L$ は捕獲半径に影響を与えないのでこれも無視し、以下では $\vec{F}_D$, $\vec{F}_M$, $\vec{F}_G$ の 3 力だけを考察することとする。

磁性粒子に働くドラッグ力 $\vec{F}_D$ は、ストークスの式で与えられるものとする。すなわち、

$$\vec{F}_D = 6\pi\eta b(\vec{v}_f - \vec{v}_p) \quad \dots\dots (2)$$

この式で、 b は球形と仮定された磁性粒子の半径、 η は流体の粘性係数、 $\vec{v}_f$ と $\vec{v}_p$ はそれぞれ流体と磁性粒子の速度ベクトルである。ここで、第 1 図に示すように、強磁性細線は半径が a の無限に長い円柱状であると仮定し、この中心軸を z 軸にとり、印加磁界 $\vec{H}_0$ の方向を基準方向 (x 方向) に選んだ円柱座標系を導入し、磁性粒子の中心座標を (r, θ, z) と表わす。流体が z 方向に流れる場合は、粒子軌跡や捕獲断面積が解析的な式で与えられることを先に報告⁽⁴⁾したので、ここでは $\vec{v}_f$ の z 成分 v_{fz} は 0 とする。そこで $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ を r , θ 方向の単位ベクトルとして、(2) 式は次のように書くことができる。

$$\vec{F}_D = 6\pi\eta b \left\{ \left(v_{fr} - \frac{dr}{dt} \right) \vec{e}_r + \left(v_{f\theta} - r \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta \right\}$$

第 1 図 座標系

Fig. 1. System of coordinates.

..... (3)

(3)式を(1)式に代入し、 r, θ 成分に分けて次の2式が得られる。

$$\frac{dr}{dt} = v_{fr} + (6\pi\eta b)^{-1}(F_{Mr} + F_{Gr}) \quad \dots (4a)$$

$$r \frac{d\theta}{dt} = v_{f\theta} + (6\pi\eta b)^{-1}(F_{M\theta} + F_{G\theta}) \quad \dots (4b)$$

(4a)式を(4b)式で割って時間 t を消去すると、粒子軌跡を与える微分方程式が得られ次式となる。

$$dr_a/d\theta = -Q/P \quad \text{または} \quad P dr_a + Q d\theta = 0 \quad \dots (5)$$

但し $r_a \equiv r/a$ である。 P, Q を具体的に示すと、

$$P \equiv P_D + P_M + P_G, \quad Q \equiv Q_D + Q_M + Q_G \quad (6)$$

と書いて、

$$P_D = v_{f\theta}, \quad Q_D = -r_a v_{fr} \quad \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} P_M &= -v_m r_a^{-3} \sin 2\theta \\ Q_M &= v_m (r_a^{-2} \cos 2\theta + k r_a^{-4}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (8)$$

$$P_G = (v_0/g) g_\theta, \quad Q_G = -r_a (v_0/g) g_r \quad \dots (9)$$

となる⁽¹⁾。これらの式で、 $\vec{g}$ は重力の加速度ベクトルで、 g, g_r, g_θ はその大きさと r, θ 成分である。 v_m と v_0 は定数で磁気速度と重力速度と呼ぶこととし、次式で定義される。

$$v_m \equiv 2\chi_s M_s H_0 b^2 / 9\eta a \quad \dots (10)$$

$$v_0 \equiv 2(\rho_p - \rho_f) g b^2 / 9\eta \quad \dots (11)$$

(10), (11)式では、 M_s は強磁性細線の飽和磁化、 χ_s は磁性粒子の比磁化率、 ρ_p, ρ_f はそれぞれ磁性粒子と流体の密度である。(10)式は磁界 H_0 が磁性線を飽和まで磁化するに十分な大きさをもっている場合に成立し、ここでは(8)式の k は

$$k \equiv M_s / 2\mu_0 H_0 \leq 1 \quad \dots (12)$$

を満たしている。

(5)式は、粒子軌跡を計算機シミュレーションで計算するために従来利用されてきた式である。

〈2.2〉 粒子軌跡の近似解と積分形式 一般的に言って、(5)式の形の微分方程式は

$$\partial P / \partial \theta - \partial Q / \partial r_a = 0 \quad \dots (13)$$

が成立てば全微分方程式であり、

$$U(r_a, \theta) \equiv \int P dr_a + \left[\left(Q - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \int P dr_a \right] d\theta = \text{定数} \quad \dots (14)$$

なる解をもつ。そこで、現在の問題に対して(13)式の左辺を計算してみる。まずドラッグ力に関する項について

$$\begin{aligned} \partial P_D / \partial \theta - \partial Q_D / \partial r_a &= \partial(r_a v_{fr}) / \partial r_a \\ &+ \partial v_{f\theta} / \partial \theta = \nabla \cdot \vec{v}_f \end{aligned}$$

となり、HGMS が適用される大部分の場合のように、流体が液体すなわち非圧縮性のときには $\nabla \cdot \vec{v}_f = 0$ となる。重力項については

$$\partial P_G / \partial \theta - \partial Q_G / \partial r_a = (v_0/g) \nabla \cdot \vec{g} = 0$$

が常に成立する。磁気力に関する項では

$$\partial P_M / \partial \theta - \partial Q_M / \partial r_a = 4k v_m r_a^{-4}$$

となるので、 H_0 が十分に大きくて $k \approx 0$ と近似できるときには、全体として(13)式が満たされることがわかる。つまり強磁界近似 ($k=0$) では、粒子軌跡は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U(r_a, \theta) &\equiv U_D(r_a, \theta) + U_M(r_a, \theta) + U_G(r_a, \theta) \\ &= \text{定数} \quad \dots (15) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} U_D(r_a, \theta) &\equiv \int v_{f\theta} dr_a - \int \left(r_a v_{fr} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \int v_{f\theta} dr_a \right) d\theta \quad \dots (16a) \end{aligned}$$

$$U_M(r_a, \theta) \equiv \frac{1}{2} v_m r_a^{-2} \sin 2\theta \quad \dots (16b)$$

$$U_G(r_a, \theta) \equiv -v_0 r_a \sin(\theta - \beta) \quad \dots (16c)$$

β は第1図に示すように $\vec{g}$ と $\vec{H}_0$ のなす角度である。以上のことをまとめると、流体の流れの場合 $\vec{v}_f$ をどのように仮定しても、それが非圧縮性であり、かつ磁界が十分に大きければ、もっと正確には磁気力の短範囲作用項が無視できれば、粒子軌跡は(15)式の形の解を必ずもつことになる。 $k \neq 0$ の場合に対しては、形式的に(14)式を適用して示唆される次の式

$$\begin{aligned} U^*(r_a, \theta) &\equiv U(r_a, \theta) + k v_m \int r_a^{-4}(\theta) d\theta \\ &= K(\text{定数}) \quad \dots (17) \end{aligned}$$

が(5)式を満たすことは容易に証明されよう。この式は積分項を含むので解と呼ぶことはできないが、後述するように捕獲半径の計算に極めて有用であり、今後、積分形式の粒子軌跡方程式と呼ぶこととする。(17)式の積分項は、 $r_a \approx 1$ となる磁性線表面近傍を除くと U_M に比べて十分小さな値となり、 $r_a \geq 3$ での粒子軌跡は $k=0$ の場合とほとんど変わらない。

〈2.3〉 捕獲半径 捕獲半径の定義をわかりやすく説明するためにしばらく問題を限定し、 $x \rightarrow \infty$ で $y = y^*$ なる位置より $-x$ 方向に磁性粒子が流入する場合を考える。第2図に示す粒子軌跡の計算例からわかるように、 $y_a^* \equiv y^*/a$ が小さいときは粒子は、磁性線に達して捕獲されるが、 y_a^* がある臨界値 y_{ac}^* を越えて大きくなると磁性線に達せず、そのまま $x = -\infty$ に流る去る。この臨界値 y_{ac}^* を通常比捕獲半径

第2図 ポテンシャル流における粒子軌跡
Fig. 2. Particle trajectories in potential flow approx.

と呼んで、 ζ で表わしている。

一般的な場合にもどり、粒子座標の初期値を (r_{ai}, θ_i) または $(x_{ai} \equiv x_i/a, y_{ai} \equiv y_i/a)$ と書き、 $\vec{v}_0$ と $\vec{H}_0$ のなす角を α とする。すると、臨界値に対する流入点座標に添字 c を付して、比捕獲半径 ζ は

$$\zeta = r_{aci} |\sin(\theta_{ci} - \alpha)| \quad (18)$$

と表わされる。

さて、この臨界条件は静電集じんの問題において Zebel⁽⁶⁾ が考察を行ない、粒子軌跡上に特異点の生ずることで特徴づけられることを明らかにしている。この事情は、第2図に破線で模式的に示す臨界軌跡に示されている。臨界初期値 (x_{aci}, y_{aci}) をもって流入した粒子は、点 S に至って磁性線に向かうか離れるかが全く不定となる。 y_{ai} の値が y_{aci} より少しでも小さいときは粒子は磁性線に近づくし、逆の場合には遠ざかって、特異点の生じないことは明りょうであろう。特異点では、 $dr_a/d\theta$ が不定となることから

$$P=Q=0 \quad \text{または} \quad \partial U^*/\partial r_a = \partial U^*/\partial \theta = 0 \quad (19)$$

と与えられる。この式を満たす特異点の座標を r_{ac} , θ_c と書くと、臨界条件に対する(17)式の定数 $K^{(c)}$ は $U^*(r_{ac}, \theta_c)$ と与えられる。これより、臨界の初期座標 r_{aci} , θ_{ci} に対して

$$U^*(r_{aci}, \theta_{ci}) = K^{(c)} = U^*(r_{ac}, \theta_c) \quad (20)$$

なる関係式が得られる。入力座標の一つ、一般的には $r_{aci} |\cos(\theta_{ci} - \alpha)|$ を与えて、(20)式から r_{aci} , θ_{ci} が計算され、これらを(18)式に代入して ζ を定めることができる。このように一般化するとやや難解となるが、後述の具体例をみれば容易に理解されよう。

ところで、 v_m の大きさや流れの場をどのように近似するかによって、(19)式で与えられる r_{ac} の値が1

より小さくなることがある。ここでは粒子軌跡上に特異点が現われないので、別途に考察する必要がある。この一般論は未完成であるので、第3章で具体例について考察を行なうにとどめる。

3. ポテンシャル流近似による捕獲半径

〈3.1〉 磁界と反平行流れの場合 ここでは簡単のために重力の影響を無視し、磁性粒子は $x=\infty$ より $-x$ 方向に流される ($\alpha=\pi$) ものとする。しかし、 $x=-\infty$ より $+x$ 方向に粒子を流しても、捕獲半径の大きさに変わりはない。流れの場にポテンシャル流近似を用いると

$$\left. \begin{aligned} v_{fr} &= -v_0(1-r_a^{-2})\cos\theta \\ v_{f\theta} &= v_0(1+r_a^{-2})\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。ここに v_0 は $r_a \rightarrow \infty$ における流速である。

この式を(16a)式に代入して

$$U_D(r_a, \theta) = v_0(r_a - r_a^{-1})\sin\theta \quad (22)$$

が得られる。積分形式の粒子軌跡方程式は

$$\begin{aligned} U^*(r_a, \theta) &\equiv v_0(r_a - r_a^{-1})\sin\theta \\ &+ \frac{1}{2} v_m r_a^{-2} \sin 2\theta \\ &+ k v_m \int_0^\theta \{r_a(\theta')\}^{-4} d\theta' = K_{pH} \quad (\text{定数}) \end{aligned} \quad (23)$$

となる。積分の下限は、 $r_a \rightarrow \infty$ のとき積分値が0となるようにしておくと、 K_{pH} は y_{ac} に比例し捕獲半径の計算に便利である。(23)式と(19)式から特異点は

$$r_{ac}^6 + r_{ac}^6 - (v_m/v_0)^2(r_{ac}^2 - k) = 0 \quad (24)$$

$$\cos\theta_c = (v_0/2v_m)r_{ac}(r_{ac}^2 + 1) \quad (25)$$

から与えられる。 $x_{ai} = r_{ai} \cos\theta_i \rightarrow \infty$ とすると(18), (23)の両式から

$$\begin{aligned} \zeta &= \lim_{r_{aci} \rightarrow \infty} r_{aci} |\sin\theta_i| = K_{pH}^{(c)}/v_0 \\ &= (r_{ac} - r_{ac}^{-1})\sin\theta_c + \frac{1}{2} \left(\frac{v_m}{v_0} \right) r_{ac}^{-2} \sin 2\theta_c \\ &+ k \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \int_0^{\theta_c} r_a^{-4} d\theta \quad (26) \end{aligned}$$

として比捕獲半径が計算される。但し $r_{ac} \geq 1$ の条件から、(24)式を用いて

$$v_m/v_0 \geq \sqrt{2/(1-k)} \quad (27)$$

が成立しなければならない。

(26)式を用いて ζ を求める場合の最も困難な問題は、積分計算をどのように遂行するかである。幸いなことに、第2図にみられるように $r_a > r_{ac} (\theta < \theta_c)$ では軌跡は単調な曲線となり、(23)式で $r_a^{-n} \rightarrow 0 (n=1, 2, 4)$ として得られる関数

$$r_a(\theta) \cong \zeta / \sin \theta, \quad (r_a > r_{ac}) \dots\dots\dots (28)$$

で近似されよう。この式を用いると

$$\int_0^{\theta_c} r_a^{-4} d\theta \cong \zeta^{-4} \left(\frac{3}{8} \theta_c - \frac{1}{4} \sin 2\theta_c + \frac{1}{32} \sin 4\theta_c \right) \dots\dots\dots (29)$$

が得られるが、この項は ζ に対する小さな補正項であることに注意し、(26)式で $k=0$ としてまず ζ の近似値 ζ_0 を求め、この ζ_0 を (29) 式の ζ に代用する。このように計算された積分項を (26) 式に代入し、最終的に ζ を定め得る。ところで、(24)、(25) 式の両式を解くと、 $v_m/v_0 \gtrsim 3$ では

$$r_{ac} \cong (v_m/v_0)^{1/3} \left\{ 1 - \frac{1}{6} (1+k) (v_m/v_0)^{-2/3} \right\} \quad (30)$$

$$\cos \theta_c \cong \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} (1-k) (v_m/v_0)^{-2/3} \right\} \dots (31)$$

が極めて良い近似式となることがわかる。

(29)~(31) 式を (26) 式に代入して

$$\begin{aligned} \zeta \cong & \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{1/3} - \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3\sqrt{3}} \right\}^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{9\sqrt{3}}{64} k \right) \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-1/3} \\ & \cong 1.30 (v_m/v_0)^{1/3} - (0.87 - 0.05k) (v_m/v_0)^{-1/3} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

但し $(v_m/v_0) \gtrsim \sqrt{2/(1-k)}$ および 3

次に $v_m/v_0 < \sqrt{2/(1-k)}$ 、すなわち $r_{ac} < 1$ の場合を考える。いま $(r_a=1, \theta=\theta_1)$ なる点で磁性線に捕獲された粒子を考えると、(23) 式から

$$\begin{aligned} y_a^\infty = \lim_{r_a \rightarrow \infty} r_a \sin \theta = & \frac{1}{2} \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \sin 2\theta_1 \\ & + k \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \int_0^{\theta_1} r_a^{-4} d\theta \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

なる関係が得られる。 ζ は y_a^∞ の最大値であるので、この条件から θ_1 の臨界値 θ_{1c} を定める。 y_a^∞ を Δy_a^∞ だけ変えると、 $r_a(\theta)$ も変化することに注意して次式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta y_a^\infty = & \left(\frac{v_m}{v_0} \right) (\cos 2\theta_1 + k) \Delta \theta_1 \left\{ 1 + 4k \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \int_0^{\theta_1} r_a^{-5} \frac{\partial r_a}{\partial y_a^\infty} d\theta \right\} \dots\dots (34) \end{aligned}$$

これより

$$\theta_{1c} = \frac{1}{2} \cos^{-1}(-k) = \frac{1}{2} (\pi - \cos^{-1} k) \dots (35)$$

となる。この θ_{1c} を (33) 式に代入して比捕獲半径 ζ を求められるが、解析表現を得るには再び積分の計算が問題となる。 $v_m/v_0 \sim 1$ の場合には、 $r_a(\theta)$ の良い近

第3図 ポテンシャル流における捕獲半径

Fig. 3. Relative capture radius in potential flow approx.

似式を見出すことがむずかしいが、 v_m/v_0 の小さいときには次のように近似できる。

$$r_a(\theta) \cong \begin{cases} y_a^\infty / \sin \theta & \text{但し } 0 < \theta < \theta_0 \\ 1 & \text{但し } \theta_0 < \theta < \theta_1 \end{cases} \dots\dots\dots (36)$$

ここで $\sin \theta_0 = y_a^\infty$ である。この近似では、

$$\zeta \cong \left(\frac{v_m}{2v_0} \right) \frac{(1-k^2)^{1/2} + k(\pi - \cos^{-1} k)}{\{1 + (4k/5)(v_m/v_0)\}} \dots (37)$$

となる。(32)、(37) 式の両近似式から計算された捕獲半径は、第3図に実線で示されている。(37) 式の適用範囲は k の値に依存し、 $k=0$ では $(v_m/v_0) \lesssim 1$ 、 $k=1$ では $(v_m/v_0) \lesssim 0.1$ であることがシミュレーション結果との比較からわかる。適用範囲についての理論的考察は、ポテンシャル流近似に関してはすでに多くの数値計算が行なわれていて、結果自体についての工学的価値は少ないため、これを割愛した。

〈3・2〉 磁界と直交する流れの場合 スラリーが

磁界および磁性線の双方に直交して流れる場合には、積分形式の粒子軌跡方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} U^*(r_a, \theta) \equiv & v_0 (r_a - r_a^{-1}) \cos \theta \\ & - \frac{1}{2} v_m r_a^{-2} \sin 2\theta \\ & + k v_m \int_0^{\pi/2} r_a^{-4} d\theta = K_{\perp} (\text{定数}) \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

特異点の座標 r_{ac} 、 θ_c は (19)、(38) 式から

$$r_{ac}^8 + r_{ac}^6 - (v_m/v_0)^2 (r_{ac}^2 + k) = 0 \dots\dots (39)$$

$$\sin \theta_c = - (v_0/2v_m) r_{ac} (r_{ac}^2 + 1) \dots\dots (40)$$

から決定される。 $r_{ac} \geq 1$ の条件は (39) 式から

$$(v_m/v_0) \geq [2/(1+k)]^{1/2} \dots\dots\dots (41)$$

となる。前項同様に(39)式を解いて $(v_m/v_0) \geq 3$ では

$$r_{ac} \cong (v_m/v_0)^{1/3} \left\{ 1 - \frac{1}{6}(1-k) \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-2/3} \right\} \quad (42)$$

$$\sin \theta_c \cong - \left(\frac{1}{2} \right) \left\{ 1 + \frac{1}{2}(1+k) \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-2/3} \right\} \quad (43)$$

が得られる。 $r_a(\theta)$ として、(38)式で $r_a \rightarrow \infty$ の場合の近似式

$$r_a(\theta) \cong \xi / \cos \theta \quad (\text{但し, } r_a > r_{ac}) \dots\dots\dots (44)$$

を用いて積分計算を遂行して、結局

$$\xi \cong 1.30 \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{1/3} - (0.87 - 0.36k) \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-1/3} \dots\dots\dots (45)$$

但し、 $v_m/v_0 \geq 3$

が得られる。 $r_{ac} < 1$ の場合には

$$r_a(\theta) \cong \begin{cases} \xi / \cos \theta & \text{但し, } (\pi/2) > \theta > (\pi/2) \\ 1 & (\pi/2) - \sin^{-1} \xi > \theta \\ & - \sin^{-1} \xi > -(\pi/2) \end{cases} \dots\dots\dots (46)$$

なる近似を用い、〈3・1〉節の場合と同様の考察から

$$\xi \cong \frac{1}{2} \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \frac{(1-k^2)^{1/2} + k(2\pi - \cos^{-1} k)}{\{1 + (4k/5)(v_m/v_0)\}} \quad (47)$$

が得られる。(47)式の適用範囲も(37)式と同様で、 $k=0$ では $v_m/v_0 \leq 1$ 、 $k=1$ では $(v_m/v_0) \leq 0.1$ である。(45)、(47)式から計算された ξ と (v_m/v_0) の関係は、第3図に一点鎖線で示されている。この図中に黒丸で示す点は、シミュレーション結果⁽⁶⁾を引用したもので、ここで示した近似式と非常によく一致していることがわかる。

〈3・3〉 重力の捕獲半径に及ぼす影響 実用的なほとんどの場合、スラリーの流れ方向は重力と逆方向であるので、ここでは $\alpha = \pi$ 、 $\beta = 0$ の場合だけを考察しよう。すると、積分形式の軌跡方程式は

$$U^*(r_a, \theta) \equiv v_0 \left\{ \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right) r_a - r_a^{-1} \right\} \sin \theta + \frac{1}{2} v_m r_a^{-2} \sin 2\theta + k v_m \int_0^\theta r_a^{-4} d\theta = \text{定数} \dots\dots\dots (48)$$

と求められる。特異点の座標は

$$\left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^2 r_{ac}^3 + \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right) r_{ac}^6 - \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^2 (r_{ac}^2 - k) = 0 \dots\dots\dots (49)$$

$$\cos \theta_c = \left(\frac{v_0}{2v_m} \right) r_{ac}^3 \left(1 - \frac{v_0}{v_0} + r_{ac}^{-2} \right) \dots\dots\dots (50)$$

の両式から定められる。 $(v_m/v_0)/(1-v_0/v_0) \geq 3$ では、(49)、(50)式の両式の近似解は

$$r_{ac} \cong \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^{-1/3} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right) k \right\} \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-2/3} \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^{-1/3} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

$$\cos \theta_c \cong \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - k \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right) \right\} \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-2/3} \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^{-1/3} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

と表わされる。〈3・1〉節で示したと同様に

$$r_a(\theta) \cong \xi_0 / (1 - v_0/v_0) \sin \theta \dots\dots\dots (53)$$

の近似を用いて積分項を計算して

$$\xi \cong 1.30 \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^{-1/3} - 0.87 \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-1/3} \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^{-2/3} + 0.05k \left(\frac{v_m}{v_0} \right)^{-1/3} \left(1 - \frac{v_0}{v_0} \right)^{1/3} \dots\dots\dots (54)$$

が得られる。 $r_{ac} < 1$ のときには

$$y_a^\infty \cong \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \sin 2\theta_1 + k \left(\frac{v_m}{v_0} \right) \theta_1 - \left(\frac{v_0}{v_0} \right) \sin \theta_1 \right] / [1 + (4k/5)(v_m/v_0)] \dots\dots\dots (55)$$

となるので、 $\partial y_a^\infty / \partial \theta_1 = 0$ から臨界角 θ_{1c} は

$$\cos \theta_{1c} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{v_0}{v_m} \right) + \sqrt{\left(\frac{v_0}{v_m} \right)^2 + 8(1-k)} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

と定められる。従って比捕獲半径は次式となる。

$$\xi \cong \left(\frac{v_m}{2v_0} \right) \frac{\{ \sin 2\theta_{1c} + 2k\theta_{1c} - 2(v_0/v_0) \sin \theta_{1c} \}}{\{ 1 + (4k/5)(v_m/v_0) \}} \dots\dots\dots (57)$$

4. 粘性流近似による捕獲半径

〈4・1〉 臨界定数と磁気速度の関係 粘性流近似では、円柱の周りの流れの場に対する厳密な解析表現は得られない。しかし、円柱からあまり遠くはない領域ではラムの解⁽⁷⁾⁽⁸⁾がよい近似式として広く用いられている。いま円柱(強磁性細線)がないときの流れの速度を v_0 、その向きは磁界と逆方向の場合を例として取上げると

$$v_{fr} = -C_L v_0 \left[\ln r_a - \frac{1}{2} (1 - r_a^{-2}) \right] \cos \theta \dots\dots\dots (58a)$$

$$v_{f\theta} = C_L v_0 \left[\ln r_a + \frac{1}{2} (1 - r_a^{-2}) \right] \sin \theta \dots\dots\dots (58b)$$

と与えられる。ここに、 C_L は定数で、円柱に関するレイノルズ数 R_s と次式で関係づけられる。

第4図 粘性流における粒子軌跡

Fig. 4. Particle trajectories in viscous flow approx.

$$C_L \equiv 1/\ln(7.4/R_e) \quad (59)$$

重力の効果は小さいとしてこれを無視すると、積分形式の粒子軌跡方程式は

$$U^*(r_a, \theta) \equiv C_L v_0 r_a \left\{ \ln r_a - \frac{1}{2}(1-r_a^{-2}) \right\} \sin \theta + \frac{1}{2} v_m r_a^{-2} \sin 2\theta + k v_m \int_0^{\theta_c} r_a^{-4} d\theta = K_{cl} \quad (60)$$

となる。臨界条件 $\partial U^*/\partial r_a = \partial U^*/\partial \theta = 0$ から

$$r_{ac}^3 \left\{ \ln r_{ac} + \frac{1}{2}(1-r_{ac}^{-2}) \right\} \ln r_{ac} - (v_m/C_L v_0)^2 (r_{ac}^2 - k) = 0 \quad (61)$$

$$\cos \theta_c = (C_L v_0 / 2 v_m) r_{ac}^3 \left\{ \ln r_{ac} + \frac{1}{2}(1-r_{ac}^{-2}) \right\} \quad (62)$$

として特異点の座標 r_{ac} , θ_c が求められる。

(61)式を解いて得られる r_{ac} の値は, v_m/v_0 の大きいかによらず常に1より大きいので, (61), (62)式の解を(60)式に代入して, 臨界条件に対する定数 $K_{cl}^{(c)}$ が定められる。しかし, ラムの解が $r_a \gg 1$ なる遠方では成立しないことが原因となって

$$y_a^\infty = \lim_{r_a \rightarrow \infty} r_a \sin \theta = \lim_{r_a \rightarrow \infty} (K_{cl}/C_L v_0) / \ln r_a \rightarrow 0$$

となり, ポテンシャル流近似のときのように初期値 x_{a1} を無限遠には選べない。そこで捕獲半径をどのように定義すべきかが問題となるが, この議論は次節に譲り, ここではまず臨界定数 $K_{cl}^{(c)}/C_L v_0$ と $v_m/C_L v_0$ の関係を求めることとする。

さて, (60)式の計算にあたって, 再び積分をどのように遂行するかが問題となる。ここでは, ポテンシャル流近似の場合のように積分可能な $r_a(\theta)$ の近似関数

第5図 粘性流における流速 (v_0) と定数 ($K_{cl}^{(c)}$) との関係

Fig. 5. Relation between v_0 and $K_{cl}^{(c)}$ in viscous flow approx.

は得られない。そこで, (60)式でまず $k=0$ と置いて, 第4図に示すように粒子軌跡を求め, 数値積分法により $\int_0^{\theta_c} r_a^{-4} d\theta$ を計算した。この結果を整理すると $v_m/C_L v_0 \geq 10^{-3}$ では

$$\int_0^{\theta_c} r_a^{-4} d\theta \approx 0.310 r_{ac}^{-4} \theta_c (v_m/C_L v_0)^{-0.172} \quad (63a)$$

$v_m/C_L v_0 \leq 10^{-3}$ では

$$\int_0^{\theta_c} r_a^{-4} d\theta \approx \theta_c \quad (63b)$$

と与えられることがわかる。(60)~(63)式から $K_{cl}^{(c)}/C_L v_0$ を計算することはそれほど複雑なものではなく, 計算結果を第5図に実線で示した。特定範囲の $(v_m/C_L v_0)$ 値に対しては, r_{ac} あるいは $K_{cl}^{(c)}/C_L v_0$ に対して近似式が得られるので, これらを次に示す。

r_{ac} に対する近似式

$$10 < v_m/C_L v_0 < 1,000$$

$$r_{ac} \approx 2^{1/2} (v_m/C_L v_0)^{1/4} - \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^{-7/2} (v_m/C_L v_0)^{-1/4} - (k/16) (v_m/C_L v_0)^{-1/2} \quad (64a)$$

$$v_m/C_L v_0 < 0.5 \text{ かつ } 0 \leq k < 0.8$$

$$r_{ac} \approx 1 + \left(\frac{1-k}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right) \left[1 - \frac{10(1-k)}{9} \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right)^{1/2} \right] \quad (64b)$$

$$v_m/C_L v_0 \leq 0.2 \text{ かつ } k=1$$

$$rac \cong 1 + \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right)^2 \left[1 - 8 \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right)^2 \right] \dots (64c)$$

臨界数に対する近似式

$$0.1 > v_m / C_L v_0 > 10^{-3}, \quad 0 \leq k \leq 0.8$$

$$\begin{aligned} K_{cH}^{(c)} / C_L v_0 &\cong \frac{1}{2} (1 - k^2)^{1/2} \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right) \\ &+ 0.310 k \left\{ \cos^{-1} \left(\frac{1-k}{2} \right)^{1/2} \right\} \\ &\times \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right)^{0.828} \left/ \left[1 + 2^{3/2} (1 \right. \right. \\ &\left. \left. - k)^{1/2} \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right) \right] \right\} \dots \dots (65a) \end{aligned}$$

$$0.1 > v_m / C_L v_0 > 10^{-3}, \quad k=1$$

$$\begin{aligned} K_{cH}^{(c)} / C_L v_0 &\cong \left(\frac{\pi}{2} - \frac{v_m}{C_L v_0} \right) \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right)^{0.828} \left/ \left[1 \right. \right. \\ &\left. \left. + 4 \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right)^2 \right] \right\} \dots \dots (65b) \end{aligned}$$

$$10^{-3} > v_m / C_L v_0$$

$$\begin{aligned} \frac{K_{cH}^{(c)}}{C_L v_0} &\cong \begin{cases} \left[\frac{1}{2} (1 - k^2)^{1/2} + k \cos^{-1} \left(\frac{1-k}{2} \right)^{1/2} \right] \\ \times \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right), & 0 \leq k \leq 0.8 \dots (65c) \\ \frac{\pi}{2} \left(\frac{v_m}{C_L v_0} \right), & k=1 \end{cases} \\ &\dots \dots (65d) \end{aligned}$$

〈4・2〉 捕獲半径 前節で触れたように、捕獲半径を決めるには初期座標 r_i が有限でなければならない。実用の磁気フィルタ中には多数の磁性線が含まれるので、この平均線間距離の半分を r_i と選ぶのが最も妥当であろう。フィルタ中の磁性線は規則正しく配列しているものとして、その充てん率を F と書くと

$$r_{ai} \cong (1/2)(\pi/F)^{1/2} \dots \dots \dots (66)$$

なる関係が容易に得られる。実用機では F は $0.1 \sim 0.01$ であるから、 $r_{ai} \cong 3 \sim 9$ となる。

次にラムの近似式の有効範囲を考えてみよう。流速 v_0 のような流れの中に円柱の障害物を入れたのであるから、 $v_f < v_0$ となるべきはずである。しかるに(58)式によると r_a の大きい所では $v_f > v_0$ となり、明らかに矛盾を生じる。そこで $v_f = v_0$ となる境界を種々のレイノルズ数 Re に対して示したのが第6図である。上で考察した $r_{ai} \leq 10$ とこの図から、 $Re \leq 1$ ならばこれまでの理論、つまり第5図の結果から捕獲半径を計算してもよいと考えられる。

そこで、簡単のためにやや近似が粗くなるが r_a^{-2} 以上の項を省略して

第6図 粘性流におけるレイノルズ数 (Re) と境界値との関係

Fig. 6. Relation between Re and boundary coordinates in viscous flow approx.

$$\begin{aligned} \zeta = r_{ai} |\sin \theta_i| &\cong (K_{cH}^{(c)} / C_L v_0) \left/ \left(\ln r_{ai} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\dots \dots \dots (67) \end{aligned}$$

が得られる。シミュレーションの場合には、 $x_{ai} = r_{ai} |\cos \theta_i|$ を一定として ζ を求めていると考えられるので、比較を容易にするために、ここでも x_{ai} を一定としよう。すると(67)式は

$$\begin{aligned} K_{cH}^{(c)} / C_L v_0 &= (r_{ai}^2 - x_{ai}^2)^{1/2} \left(\ln r_{ai} - \frac{1}{2} \right) \\ &\dots \dots \dots (68) \end{aligned}$$

と書かれるので、 x_{ai} を与えるとき、 $K_{cH}^{(c)} / C_L v_0$ と r_{ai} の関係が求められる。この r_{ai} から $(\ln r_{ai} - 1/2)$ を計算し、 $K_{cH}^{(c)} / C_L v_0$ の関数として示したのが第7図である。最後に第5図と第7図を用い、レイノルズ数 Re 、流入点の座標 x_{ai} をパラメータとして ζ と v_m / v_0 の関係を求めたのが第8図に実線で示す曲線である。

〈4・3〉 シミュレーション結果との比較 これまで粘性流近似を用いて捕獲半径を計算した例は、Cumming 氏⁽³⁾のものだけであろう。この計算結果には、 Re や k の値は示されているが、 x_{ai} の値は不明

第7図 $K_{cH}^{(c)} / C_L v_0$ と $\ln r_{ai} - 0.5$ との関係

Fig. 7. Relation between $K_{cH}^{(c)} / C_L v_0$ and $\ln r_{ai} - 0.5$

第 8 図 粘性流における捕獲半径

Fig. 8. Relative capture radius in viscous flow approx.

である。しかし第 8 図に一点鎖線で示す彼らの結果と本研究の結果を比べると、 $x_{ai} \approx 10$ であると推定できる。彼らは $Re=3$, $x_{ai} \sim 10$ の曲線と、図中に破線で示すポテンシャル流近似の結果を比べ、粘性流近似の捕獲半径はポテンシャル流近似のその $1/2 \sim 1/3$ となると結論しているが、本研究の結果からこの結論をそのまま認めるには難点がある。それは $Re=3$ ともなると、ラムの近似式の有効範囲は磁性線の近傍に ($r_a < 2 \sim 4$) 限られるからである。 $Re=0.2 \sim 1$, $x_{ai} \approx 5$, ($F=0.03$) とすると、二つの近似による捕獲半径の違いはほとんどなく、 $v_m/v_0 < 1$ とすると、粘性流近似の結果の方がむしろ大きい捕獲半径を与える場合の生ずるのがわかる。

5. むすび

大こう配磁気分離機の性能を理論的に評価するにあたって、第 1 に重要な量は捕獲半径である。これまで、計算機シミュレーションによって捕獲半径が計算されてきたが、本論文は、HGMS の実用されるほとんどすべての場合に対し、シミュレーションなしで解析的に捕獲半径が計算できることを示したものである。

まず第 2 章では、磁性粒子を運ぶ媒質が水などの非圧縮性流体（液体）の場合には、粒子軌跡が解析表現でもしくは捕獲半径の計算に便利な積分形式で与えられることを示した。つづいて、これらの粒子軌跡方程式より、捕獲半径を決定する一般的方法を明らかにした。

第 3 章では、第 2 章の一般論をポテンシャル流近似の流れの場合に適用し、具体的に粒子軌跡方程式 ((23) 式および (38) 式) を求め、これを用いて捕獲半径を計算し、流れが磁界に平行か垂直か、流速が磁気速

度に比べ小さいか大きいかに依存して、(32), (37), (45), (47) 式の各近似式を得た。これらの結果は従来のシミュレーション結果と非常によく一致するものである。更に、これまで計算のほとんどない場合への本理論の適用例として、重力の捕獲半径への影響を〈3・3〉節で調べた。

第 4 章では、流れの場に粘性流近似を用いた場合の捕獲半径の計算方法および計算結果を示した。ここでは、流れの場に対するラムの近似式 (58) 式の適用範囲に限界があり、捕獲半径を一義的に定義できない。そこでまず〈4・1〉節では、このような制限と関係なく、捕獲半径 $K_{eff}^{(c)}/C_L v_0$ と、レイノルズ数と流速に関係する量 $v_m/C_L v_0$ の関係を求め、これを第 5 図に示すと共に、特別の場合に対しては近似式を与えた。次に、捕獲半径が隣接磁性線との距離、換言すれば磁気フィルタ中の磁性線の充てん率といかに関係するかを示し、他方ではこの理論が適用できる限界を磁性線のレイノルズ数および充てん率に関連して明らかにした。この適用可能範囲に関し、捕獲半径を計算した結果を第 8 図に実線で示した。この結果、実用的フィルタで本理論の近似が許される場合に対しては、粘性流近似によって計算された捕獲半径はポテンシャル流近似のそれと同程度であり、場合によっては大きくもなることもあることを示した。

以前 Cumming 氏はシミュレーション計算から、粘性流近似で計算した捕獲半径はポテンシャル流近似の場合の $1/2 \sim 1/3$ となると結論しているが、これはレイノルズ数と粒子初期座標に関して現実とやや異なった値を採用したためである。

(昭和 53 年 9 月 21 日受付)

文 献

- (1) J.H.P. Watson: "Magnetic Filtration" *J. Appl. Phys.* 44, 4209 (1973)
- (2) F. E. Luborsky & B. J. Drummond: "High Gradient Magnetic Separation: Theory Versus Experiment", *IEEE Trans. Magnetics* MAG-11, 1696 (1975)
- (3) D.L. Cummings et al.: "The Motion of Small Paramagnetic Particles in a High Gradient Magnetic Separator", *IEEE Trans. Magnetics* MAG-12, 471 (1976)
- (4) 内山・高安・栗延: "大こう配磁気分離用並流磁気フィルタの性能" 電学論 B, 97-B, 459 (1977)
- (5) G. Zebel: "Deposition of Aerosol Flowing Past a Cylindrical Fiber in a Uniform Electric Field" *J. Colloid Science* 20, 522 (1965)
- (6) J.H.P. Watson: "Theory of Capture of Particles in Magnetic High-Intensity Filters" *IEEE Trans. Magnetics* MAG-11, 1597 (1975)
- (7) H. Lamb: "Hydrodynamics" 6th edition, Cambridge Univ. Press, 613 (1932)
- (8) C.N. Davies: "Viscous Flow Transverse to a Circular Cylinder" *Proc. Phys. Soc.* 63, 288 (1950)