有限要素法による二次元交流磁界解析のための アダプティブ分割法

正 員 齋 藤 義 則 (三菱電機コントロールソフトウェア)

非会員 上 田 泰 子 (三菱電機)

正 員 小 倉 新 三 (三菱電機)

Adaptive Mesh Generation for Two Dimensional AC Magnetic Field Analysis in Finite Element Method

Yoshinori Saito, Member (Mitsubishi Electric Control Software Corporation), Yasuko Ueda, Non-member, Shinzou Ogura, Member (Mitsubishi Electric Corporation)

Fine mesh divisions are essential to obtain accurate solutions of two dimensional AC magnetic field analysis. But it requires the technical know-how to find fine mesh divisions and moreover it is complicated to divide the analysis domain. So we have developed the adaptive mesh generator using equalization of energy variation of every element and applying the technical know-how to divide the conductor or magnetic material under consideration of the skin effect by the eddy current. And we have applied this adaptive mesh generator to the loss analysis of the infinite copper-plane, and we have obtained accurate solutions.

キーワード：有限要素法，自動分割，磁界解析

1. ま え が き

電気機器の開発設計において有限要素法による磁界解析は非常に有用であり，広く用いられている。しかしながら，この有限要素法においては解析領域を三角形や四角形などの要素に分割しなければならず，このために多くの労力を必要とする。また，分割の細さが解析結果の精度に影響するため，磁界解析特有の分割のノウハウにより要素配分の最適な粗密を与えてやらなければならない。従って，初心者が簡単に解析を行うことは困難であり，ベテランでもデータの入力ミスなどの間違いを起しやすいため。

そこで，これらを解決するため，今までに幾つかの自動分割プログラムが研究，開発されてきた。例えば，グラフィックスを用いて形状や分割の粗密を会話形で入力するものや⁽¹⁾，解析領域を幾何学的な分割で解析した後，場の汎関数が最小になるように節点の追

加，削除を行い再分割するもの⁽²⁾⁽³⁾がある。

今回，著者らは各有限要素の単位時間あたりのエネルギー変化（以下，エネルギー変化と記す）を均一にするエネルギー均一化分割法を用い，これに導体や磁性体の渦電流による表皮効果を考慮した分割のノウハウを取入れ，解析精度の向上を図った磁界解析用アダプティブ分割プログラムを開発した⁽⁴⁾。

本論文では，このプログラムにおける分割方法と，これを無限平板の損失解析に適用し誤差を検討した結果，および実機への適用例について述べる。

2. エネルギー均一化分割法

よく知られているように，有限要素法による磁界解析では，磁束の集中するところほど細かく分割することが計算精度を良くする一つの条件となる。そこで，このプログラムでは幾何学的分割に各要素のエネルギー変化が均一になるように節点の追加，削除を行うこ

図 1 一次三角形要素
Fig. 1. Triangular element.

とにより、前記の条件を満たす分割を行う。

〈2・1〉 要素のエネルギー変化 要素は一次三角形要素とし、要素内の交流磁界による磁気ベクトルポテンシャルの Z 方向成分を A (以下、ポテンシャル A と記す) とおいて次式のように仮定する。ただし、ここでポテンシャル A は、交流磁界中でベクトルポテンシャルが時間的に正弦波状に変化すると仮定し、複素数表示したものを表す。

$$A = a_0 + a_1x + a_2y \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 a_0, a_1, a_2 : 要素ごとに異なる定数
この(1)式に要素の各頂点の座標およびポテンシャル値(A_1, A_2, A_3)を代入し、 a_0, a_1, a_2 について解くと a_0, a_1, a_2 は次式のように求まる。

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

一方、磁界のエネルギー変化は次式で表される。

$$W_1 = \frac{f}{\mu} \iint \left\{ \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right)^2 \right\} dS \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 f : 周波数、 μ : 透磁率

従って、(1)、(2)式を用いると(3)式の磁界エネルギー変化は次式のようになる。

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{f}{\mu} \iint \{ (a_1)^2 + (a_2)^2 \} dS \\ &= \frac{f}{\mu} \iint \left\{ (a_0 a_1 a_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\} dS \\ &= \frac{f}{\mu} \iint \left\{ (A_1 A_2 A_3) \left[\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \right]^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \right\} dS \quad \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

次に、導体の損失は次式で表される。

$$W_2 = \frac{1}{2\sigma} \iint JJ^* dS \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 J : 電流密度、 $*$: 複素共役、 σ : 導電率

図 2 面積座標
Fig. 2. Area coordinate.

ただし、

$$JJ^* = \omega^2 \sigma^2 QQ^* + 2\sigma\omega(Q_I J_{SR} - Q_R J_{SI}) + J_S J_S^* \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 Q : $A - \bar{A}$ 、 $\bar{A}$: 平均ベクトルポテンシャル、 Q_R : Q の実数部、 Q_I : Q の虚数部、 J_S : 印加電流、 J_{SR} : J_S の実数部、 J_{SI} : J_S の虚数部、 ω : 角周波数

である。また、要素内のポテンシャル A は、面積座標 ξ_1, ξ_2, ξ_3 と各頂点のポテンシャル A_1, A_2, A_3 を用いると次式で表せる。

$$A = \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2 + \xi_3 A_3 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、ここで用いた面積座標は図2のように、三角形 $P_1 P_2 P_3$ を考えたとき、点 P を頂点とした三角形 $PP_2 P_3$, $PP_3 P_1$, $PP_1 P_2$ の面積を $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ 、三角形 P_1, P_2, P_3 の面積を Δ とすると、面積座標 ξ_1, ξ_2, ξ_3 は次式で定義される。

$$\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \xi_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad \dots\dots\dots (8)$$

(7)式と次式に示す積分公式を用いると、導体の損失は(10)式のようになる。

$$\iint \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dS = 2\Delta \frac{a! b! c!}{(a+b+c+2)!} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 Δ : 要素の面積、 a, b, c : ξ_1, ξ_2, ξ_3 にかかる指数

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{\Delta \omega^2 \sigma}{2} (|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 \\ &\quad + A_{1R} A_{2R} + A_{1I} A_{2I} + A_{2R} A_{3R} + A_{2I} A_{3I} \\ &\quad + A_{3R} A_{1R} + A_{3I} A_{1I}) \\ &\quad - \frac{\Delta \omega^2 \sigma}{3} \{ (A_{1R} + A_{2R} + A_{3R}) \bar{A}_R \\ &\quad + (A_{1I} + A_{2I} + A_{3I}) \bar{A}_I \} + \frac{\Delta \omega^2 \sigma}{2} \bar{A} \bar{A}^* \\ &\quad + \frac{\Delta \omega}{3} \{ (A_{1I} + A_{2I} + A_{3I} - 3\bar{A}_I) J_{SR} \\ &\quad - (A_{1R} + A_{2R} + A_{3R} - 3\bar{A}_R) J_{SI} \} \\ &\quad + \frac{\Delta}{2\sigma} J_S J_S^* \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 A_{iR} : A_i の実数部、 A_{iI} : A_i の虚数部、 $\bar{A}_R$: $\bar{A}$ の実数部、 $\bar{A}_I$: $\bar{A}$ の虚数部

要素のエネルギー変化は磁界のエネルギー変化と導体の損失の和で近似でき、次式のようになる。

$$W = W_1 + W_2 \dots\dots\dots (11)$$

〈2・2〉 節点の追加 節点の追加は、線分の両側の要素からなる四辺形のエネルギー変化の値の大きい領域から行う。ただし、境界上の線分で両側に要素がない場合は、片側の要素のエネルギー変化の2倍の値で比較を行う。

追加節点は次の二つのケースに分かれる。

(1) 着目する線分が物体の輪郭または境界を表す辺の一部

(2) (1)以外

(1)の場合、節点は線分の中点に追加する。そして
(2)の場合、節点は四辺形の重心に追加する。

〈2・3〉 節点の削除 節点の削除はエネルギー変化の小さい要素から、要素の頂点の一つを辺に沿って

移動させることにより行う。

このとき、頂点の移動の仕方は1-2, 2-1, 2-3, 3-2, 3-1, 1-3の六通りがあるが、移動した後の領域のエネルギー変化が一番小さくなるものを選ぶようにする。ただし、移動させる頂点が物体や境界の形状を決める点のとき、または移動させる頂点が物体や境界の形状を表す辺上にあり、移動先の頂点とその辺上がないときは選択の対象から除く。

〈2・4〉 終了条件 エネルギー均一化分割は節点の追加、削除の繰返し過程において、要素のエネルギー変化の最大値が大きく変化しなくなったときに終了する(例えば、変化率が0.1以下)。

3. 表皮効果の考慮

解析領域内に導体や磁性体が存在し、それらに渦電流が流れる場合、それらの分割は表皮効果を考慮して物体の表面を細かく分割する必要がある。

そこで、まず導体および磁性体の表面を表皮効果の大きさを表す表皮厚に応じて縁どり、先に示したエネルギー均一化分割を行うことにより、表皮効果も考慮した導体および磁性体の最適分割を行う。

〈3・1〉 縁どり方法 導体表面の縁どりは、図7に示すように表皮厚の2分の1の厚みで四層に縁どる。このとき、幾つかの物体の形状に対しては、特にルールを設けている。以下にその基本的なルールを示す。

(1) 物体の厚みが薄く、各層の縁どりの段階で縁どりができなくなる場合、表面の縁どりは一つ前の層で終了する。

(2) 自然境界で区切られた面は縁どりしない。

(3) 物体の内部に空洞があり、その内外の両表面を縁どったときに、それらが交わってしまう場合は縁どりを結合する。

図3 線分の両側の要素からなる四辺形
Fig. 3. Quadrangle consisting of two elements.

図4 節点の追加
Fig. 4. Additional node.

図5 節点の削除
Fig. 5. Erased node.

図6 移動できない場合
Fig. 6. Unmovable case.

図7 物体表面の縁どり
Fig. 7. Hemmed surface.

図8 縁どりのルール1
Fig. 8. Rule of hemming (No. 1).

図 9 縁どりのルール 2
Fig. 9. Rule of hemming (No. 2).

図 10 縁どりのルール 3
Fig. 10. Rule of hemming (No. 3).

図 11 縁どりのルール 4
Fig. 11. Rule of hemming (No. 4).

(4) 物体の一部に(1)で示したような縁どる層の厚みより薄くなる部分がある場合は、その部分をとばして縁どる。

4. 偏平な要素の処理

上記のように導体や磁性体の表面の縁どりを行うと、表皮効果の大きさによっては非常に偏平な要素が導体表面に沿ってできる可能性がある。このような場

図 12 偏平な要素 図 13 節点の追加
Fig. 12. Flat element. Fig. 13. Additional node.

合、要素に対して適当な節点の追加を行う。

まず、要素の偏平度を次式のように決める。

$$\text{要素の偏平度} = \frac{h}{l}$$

ここに、 l : 物体の表面に平行な辺の長さ、

h : l を底辺とした高さ

また、要素のポテンシャルの変化の割合を次式のように決める。

要素のポテンシャルの変化の割合

$$= (|A_1 - A_2|) / (A_H - A_L)$$

ここに、 A_1, A_2 : 物体の表面に平行な辺の両

端 (図 12, P_1, P_2) のポテンシャル, A_H ,

A_L : 物体の表面のポテンシャルの大きさの最大値と最小値

そして、

$$\text{要素の偏平度} \leq \epsilon_1$$

かつ

$$\text{要素のポテンシャルの変化の割合} \geq \epsilon_2$$

ここに、 ϵ_1, ϵ_2 : 任意の定数

のとき、節点を物体の表面に平行な辺の中点に追加する (例えば、 $\epsilon_1 = 0.1, \epsilon_2 = 0.4^{(5)}$)。

5. 全体の処理の流れ

本プログラムの処理手順を以下に示す (図 14)。

- (1) 導体および磁性体の表面の縁どり
- (2) 解析領域の幾何学的な分割
- (3) ポテンシャル計算
- (4) エネルギー均一化分割
- (5) 導体および磁性体の表面の偏平な要素の処理

6. 誤差の検討

本プログラムを無限平板の損失解析 (図 15 に電流方向に垂直な断面図を示す) に適用し、その結果を理論式⁽⁶⁾による計算値と比較し誤差を調べた。図 16 に分割図の 1 例を示す。

図 14 処理フロー
Fig. 14. Processing flow.

図 17 損失の変化
Fig. 17. Variation of loss.

図 15 無限平板の解析モデル
Fig. 15. Analyzed model.

図 16 分割図
Fig. 16. Finite element mesh.

表皮効果を考慮

表皮効果を考慮しない

図 18 導体の分割
Fig. 18. Deviding of conductor.

〈6・1〉 電流源の位置の違いによる損失の変化

電流源の平板からの距離 (h) を変えたときの各損失を、平板の厚み $t=5 \text{ mm}$, 10 mm の 2 ケースで計算し、理論値と比較した。その結果、いずれの場合も誤差は 5% 以内に収まった (図 17)。

〈6・2〉 周波数の違いによる損失誤差の変化

電流源の平板からの距離 $h=100 \text{ mm}$ 、平板の厚み $t=100 \text{ mm}$ で周波数をパラメータとして各損失誤差を求めた。また同時に、エネルギー均一化分割のみ (表皮効果を考慮しない分割) による各損失誤差も計

図 19 損失誤差の変化
Fig. 19. Variation of loss-error.

図 20 解析モデル
Fig. 20. Analyzed model.

算し比較した（分割の違いを図18に示す）。その結果，エネルギー均一化分割のみでは周波数が高くなり，表皮効果が大きくなると誤差が大きくなっているが，表皮効果を考慮した本プログラムではいずれの場合も誤差は5%以内に収まっている（図19）。

7. 適用例

ガス絶縁開閉装置などに用いられる三相一括母線（図20に母線方向に垂直な断面図を示す）の電磁力解析に本プログラムを適用した例を示す。

- (1) 三相短絡状態における母線間の電磁力解析を行う場合の分割図（図21）
- (2) 母線 U, V が相间短絡したときの相間の電磁力解析を行う場合の分割図（図22）
- (3) タンクと母線 U 相が一線地絡したときのタンクと母線の電磁力解析を行う場合の分割図（図23）

U 相, V 相, W 相 70 kA

図 21 分割図 1
Fig. 21. Finite element mesh (No. 1).

U 相 70 kA, V 相 -70 kA

図 22 分割図 2
Fig. 22. Finite element mesh (No. 2).

U 相 70 kA, タンク -70 kA

図 23 分割図 3
Fig. 23. Finite element mesh (No. 3).

本プログラムでは，同じ三相一括母線の輪郭形状を入力してもそれぞれの電磁現象に応じた分割を行うことができる。

8. む す び

今回、開発したプログラムでは、エネルギー均一化分割法に表皮効果を考慮した分割のノウハウを取入れた。その結果、導体や磁性体の渦電流による表皮効果が大きくなるような解析に対しても妥当な分割を得ることができた。また、本プログラムでは輪郭形状のみの入力で電磁現象に応じた分割が行えるので、入力作業を大幅に軽減できるようになった。

(平成元年 11 月 30 日受付, 同 2 年 8 月 20 日再受付)

文 献

- (1) 中田・藤原・吉岡・金島: 「二次元有限要素法のためのプリ・ポストシステムの開発」, 平元電気学会会誌, No. 772
- (2) 山名・武・藤田: 「有限要素解析における自動要素分割法」, 電気学会回転機・静止器合同研資, RM-82-47 (昭 57)
- (3) 山名・武・藤田: 「交番界有限要素法での最適自動分割法」, 昭 60 電気学会会誌, No. 707
- (4) 齊藤・上田・小倉: 「有限要素法のための磁界解析用アダプティブ分割法」, 平元同上, No. 770
- (5) 齊藤・上田・小倉: 「有限要素法のためのアダプティブ分割法—導体表面の自動分割—」, 平 2 同上, No. 805
- (6) M. V. K. Chari: *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-93, 62 (1974)

齋 藤 義 則 (正員)

昭和 38 年 10 月 24 日生。62 年 3 月立命館大学理工学部卒業。同年 4 月三菱電機コントロールソフトウェア(株)入社。主として、電磁界解析システムの開発に従事。

上 田 泰 子 (非会員)

昭和 34 年 1 月 23 日生。56 年 3 月奈良女子大理工学部数学科卒業。同年 4 月三菱電機(株)入社。情報システム部に所属。主として、CAE システムの環境整備および電磁界解析システムの開発に従事。

小 倉 新 三 (正員)

昭和 18 年 11 月 23 日生。37 年 3 月神戸工業高等学校電気科卒業。同年 4 月三菱電機(株)入社。中央研究所に勤務。49 年 10 月以来伊丹製作所に勤務。主として、渦電流損などの磁界現象解析および開閉機器などの開発に従事。