任意断面導体よりなる多導線系 インピーダンス近似計算法

正員 雨谷 昭 弘 (同志社大)

准員 布施 郁 子 (石田 衡器)

Approximate Method for Calculating Impedance of Multiconductor with Arbitrary Cross-Section

Akihiro Ametani, Member (Doshisha University), Ikuko Fuse, Associate Member (Ishida Khoki Co.)

This paper proposes an approximate impedance formula of a conductor with an arbitrary cross-section, and also a method of approximating the conductor by an equivalent circular conductor. Thus, a multiconductor system consisting of arbitrary cross-section conductors is represented by circular cross-section conductors of which the impedance and admittance are evaluated by the existing impedance and admittance formulas.

The calculated results by the proposed method agree satisfactorily with measured results and numerical results by a finite element method which is, at the present, only the way of calculating such the impedance, but requires a large computation time and memories. The proposed method might be very useful to evaluate the impedance and admittance of a multiconductor system consisting of arbitrary cross-section conductors.

キーワード：インピーダンス，アドミタンス，任意断面導体，円形断面導体，多導線系

1. 緒 言

電力線，通信ケーブルなどのインピーダンスおよびアドミタンスはその伝送特性の解析を行ううえで必要不可欠な要素である。導体断面が円形の場合，その内部インピーダンスは Schelkunoff⁽¹⁾，大地帰路インピーダンスは Carson⁽²⁾，Pollaczek⁽³⁾ により厳密解が与えられている。アドミタンスに関しては周知である。しかし，実状の架空線およびケーブル導体は必ずしも円形断面をしておらず，台形あるいは扇形など様々である。このような任意断面を有する導体の内部および大地帰路インピーダンス，更にアドミタンスに関する理論式はいまだ導出されておらず，現状では有限要素法に頼らざるを得ない。しかし，周知のように有限要素法は解析解に比べて極めて不経済で実用には供し難い。そこで，本論文では任意断面導体内部インピーダンスの近似式および任意断面導体より構成される多導線系のインピーダンスおよびアドミタンスの近似計算

法について報告する⁽⁴⁾。

2. 任意断面導体内部インピーダンスの導出

周波数 $f=0$ すなわち直流に対する図1のような導体の内部インピーダンスは，導体断面の形状に無関係に次式で与えられる。

$$Z_{DC} = \rho_c / S = R_{DC} \quad (\Omega \cdot m) \dots\dots\dots (1)$$

ここに， S ：導体断面積(m^2)， ρ_c ：導体抵抗率($\Omega \cdot m$)

(a) 任意断面導体 (b) 中空円筒導体

図1 任意断面導体と等価円筒導体
Fig.1. Arbitrary cross-section conductor and its equivalent circular conductor.

高周波領域において導体中の電流は表皮効果により導体表面近傍にのみ分布する。このとき、電流分布の導体表面よりの深さ(透過深度) h_c は、次式で定義される。

$$h_c = \sqrt{\rho_c / j\omega\mu_c} \quad (\text{m}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\omega: 2\pi f$ (角周波数), $\mu_c = \mu_{cr}\mu_0$:

導体透磁率(H/m)

上記透過深度は複素数であるが、複素距離が定義できるものとし、かつこの複素距離領域内において電流は平等に分布しているものとする。このとき、導体内部インピーダンスは直流抵抗と同様に考え、近似的に次式で与えられる。

$$Z_{hf} \doteq \rho_c / S_{hf} = \rho_c / (l \times h_c) \quad (\Omega \cdot \text{m}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 l : 導体断面外周の長さ(m), S_{hf} :

高周波領域での電流通路断面積(m^2)

厳密には電流通路断面積 S_{hf} 内で電流は平等には分布していないので、その分布特性を考慮しなければならないが、近似式の観点からは平等分布を仮定した上式で十分であると考えられる。

上記(3)式に(2)式の透過深度を代入して、次の高周波領域インピーダンス近似式が得られる。

$$Z_{hf} \doteq \sqrt{j\omega\mu_c\rho_c/l^2} \quad (\Omega \cdot \text{m}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

いま、区間 $[0, \infty]$ で定義可能な関数 $f(x)$ が $f(x) \neq 0$ であり、かつ $f(0), f(x \rightarrow \infty)$ が既知の場合、区間 $[0, \infty]$ での内挿式として2乗和の平方根を用いると良好な精度が得られることが知られている⁽⁵⁾⁽⁶⁾ (付録参照)。

$$f(x) \doteq \sqrt{\{f(0)\}^2 + \{f(x \rightarrow \infty)\}^2}; 0 \leq x \leq \infty \quad \dots\dots\dots (5)$$

(1)式の直流抵抗は $f(0)$ にあたり、(4)式のインピーダンスは $f(x \rightarrow \infty)$ に相当するので、(5)式を用いて次の任意断面導体内部インピーダンス近似式が得られる。

$$Z_c \doteq \sqrt{Z_{DC}^2 + Z_{hf}^2} \quad (\Omega \cdot \text{m}) \\ \doteq R_{DC} \sqrt{1 + j\omega\mu_c \cdot S / (R_{DC} \ell^2)} \quad \dots\dots\dots (6)$$

3. 任意断面導体よりなる多導線系のインピーダンス・アドミタンス近似計算法

〈3・1〉 中空円筒導体インピーダンス近似式

(1) 周波数 $f \rightarrow 0$ のインピーダンス 周波数 f が零に近づくとき、Schelkunoff の円筒導体インピーダンス厳密式に含まれるベッセル関数の変数 x は零に収束する。各ベッセル関数の $x \rightarrow 0$ での収束値は次式で与えられる⁽⁷⁾。

$$I_0(0) = 1, x^{-1}I_1(x) \rightarrow 1/2, K_1(x) \rightarrow 1/x \\ \dots\dots\dots (7)$$

上式を考慮して Schelkunoff のインピーダンス厳密式を変形すると、次の形となる。

$$Z_c(f \rightarrow 0) = \lim_{f \rightarrow 0} \left\{ \frac{j\omega\mu_c}{2\pi x_0} \right. \\ \times \frac{I_0(x_0)K_1(x_i) + K_0(x_0)I_1(x_i)}{I_1(x_0)K_1(x_i) - K_1(x_0)I_1(x_i)} \Big\} \\ = \lim_{f \rightarrow 0} \left\{ \frac{j\omega\mu_c}{2\pi x_0^2} \right. \\ \times \frac{1}{x_0^{-1}I_1(x_0) - x_i^{-1}I_1(x_i)(x_i/x_0)^2} \Big\} \\ = \lim_{f \rightarrow 0} \left\{ \frac{j\omega\mu_c}{\pi x_0^2} \frac{1}{1 - (x_i/x_0)^2} \right\} \\ = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{j\omega\mu_c}{\pi(x_0^2 - x_i^2)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $x_i = r_i/h_c, x_0 = r_0/h_c$

$$h_c = \sqrt{\rho_c / j\omega\mu_c} = (2) \text{式}$$

従って、次の結果が得られる。

$$Z_c(f \rightarrow 0) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{j\omega\mu_c}{\pi(r_0^2 - r_i^2)} \cdot \frac{\rho_c}{j\omega\mu_c} \\ = \frac{\rho_c}{\pi(r_0^2 - r_i^2)} = R_{DC} \quad \dots\dots\dots (9)$$

上式は円筒断面導体の直流抵抗に一致している。

(2) 周波数 $f \rightarrow \infty$ でのインピーダンス 周波数 $f \rightarrow \infty$ では、変数 $x_0, x_i \rightarrow \infty$ となる。このとき、各ベッセル関数は次の値に収束する⁽⁷⁾。

$$x \rightarrow \infty: I_n(x) \rightarrow e^x / \sqrt{2\pi x}, \\ K_n(x) \rightarrow \sqrt{(n/2x)} / e \quad \dots\dots\dots (10)$$

上式を用いて、Schelkunoff のインピーダンスの $f \rightarrow \infty$ における値を求めると次の結果となる。

$$Z_c(f \rightarrow \infty) \\ = \lim_{f \rightarrow \infty} \left\{ \frac{j\omega\mu_c}{2\pi x_0} \right. \\ \times \frac{e^{(x_0-x_i)/2\sqrt{x_0x_i}} + e^{(x_i-x_0)/2\sqrt{x_0x_i}}}{e^{(x_0-x_i)/2\sqrt{x_0x_i}} - e^{(x_i-x_0)/2\sqrt{x_0x_i}}} \Big\} \\ = \lim_{f \rightarrow \infty} \left\{ \frac{j\omega\mu_c}{2\pi x_0} \frac{e^{(x_0-x_i)} + e^{-(x_0-x_i)}}{e^{(x_0-x_i)} - e^{-(x_0-x_i)}} \right\} \\ = \lim_{f \rightarrow \infty} \left\{ \frac{j\omega\mu_c}{2\pi x_0} \coth(x_0 - x_i) \right\} \\ = \lim_{f \rightarrow \infty} \frac{j\omega\mu_c}{2\pi x_0} \quad \dots\dots\dots (11)$$

上式に(8)式の x_0 を代入すると $f \rightarrow \infty$ のインピーダンスとして次式が得られる。

$$Z_c(f \rightarrow \infty) = Z_{hf} \doteq \frac{\sqrt{j\omega\mu_c\rho_c}}{2\pi r_0} \quad \dots\dots\dots (12)$$

(3) 全周波数領域での近似式 (9)式および

(12)式で与えた周波数 $f \rightarrow 0$ および $f \rightarrow \infty$ でのインピーダンス近似式を用いて前章と同様に2乗と平方根による近似式を作成すると次式となる。

$$\begin{aligned} Z_c &\approx \sqrt{Z_{DC}^2 + Z_{HJ}^2} \\ &= R_{DC} \sqrt{1 + (j\omega\mu_c\rho_c)/(R_{DC}2\pi r_0)^2} \\ &= R_{DC} \sqrt{1 + j\omega\mu_c(r_0^2 - r_i^2)/4\pi R_{DC}r_0^2} \\ &= R_{DC} \sqrt{1 + j\omega\mu_c[1 - (r_i/r_0)^2]/4\pi R_{DC}} \end{aligned} \quad \dots\dots(13)$$

〈3・2〉 任意断面導体に対する等価円筒導体

第2章で導出した周波数 $f \rightarrow 0$ および $f \rightarrow \infty$ での任意断面導体インピーダンス近似式と、前節で導出した円筒導体インピーダンス近似式とは同一形式であることが明らかである。すなわち、(9)、(12)式において

$$\left. \begin{aligned} S &= \pi(r_0^2 - r_i^2) : \text{導体断面積}(\text{m}^2) \\ l &= 2\pi r_0 : \text{導体断面外周}(\text{m}) \end{aligned} \right\} \quad \dots(14)$$

とすると、(1)式=(9)式、(4)式=(12)式となる。このことより逆に(14)式を用いて任意断面導体に対する等価円筒断面導体が得られる。すなわち、図1(b)の等価円筒導体の外半径および内半径は次式で与えられる。

等価円筒導体

$$\left. \begin{aligned} \text{外半径 } r_0 &= l/2\pi \quad (\text{m}) \\ \text{内半径 } r_i &= \sqrt{(l/2\pi)^2 - S/\pi} \quad (\text{m}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(15)$$

前式より任意断面導体に等価な円筒導体の外半径および内半径が与えられる。この等価円筒導体に対しては従来の円形断面導体に対する内部インピーダンスあるいは外部媒質(大地帰路)インピーダンスを適用することが可能である。

〈3・3〉 多相任意断面導体のインピーダンス・アドミタンス 多相の任意断面導体系の場合にも、各導体に(15)式を適用し、各等価円筒導体を求めればよい。このとき、厳密にはもとの導体系と等価円筒導体系とで各導体間の電位および電流分布が相似であることが必要であるが、近似的には導体間の距離として各導体の重心間の距離(GMDで定まる距離)をとればよい。ただし、二つの任意断面導体の外周が大で、かつ両者が近接している場合、両導体が物理的に重ならないように導体間距離を設定せねばならず、誤差が生じることがある。

4. 近似計算法の精度

〈4・1〉 実測例1: ケースA 図2に文献(8)で

図2 ケースA ケーブル断面および測定回路

Fig. 2. Cross-section of case A cable and test circuit.

取上げられている扇形断面導体系の(a)図インピーダンス測定回路、(b)図実ケーブル断面を示す。これを前章で説明した方法により円筒導体近似した時の断面図を(c)図に示す。(c)図のケーブルは中性線を含めて四相の同軸ケーブルを内部に有するパイプタイプケーブルであるので、汎用回路解析プログラム EMTP/9/の線路定数計算サブルーチン、CABLE CONSTANTS/10/により直ちに定数計算が行える。その定数に基づき図 2(a)の測定回路を π 形回路で模擬し、実測のシミュレーションを行い、その電圧、電流計算結果の比より測定結果に対応するインピーダンスの計算値が得られる。これを測定結果と合せて表 1 に示す。

表 1 より中性線の接地、非接地にかかわらず周波数 $f=50\text{ Hz}$ ではインピーダンス絶対値の計算結果は実測結果にほぼ良好な一致を示していることが知られる。位相角に関しては誤差が 17.7%とやや大きい。 $f=5\text{ kHz}$ では中性線非接地とした場合、絶対値は実測結果に良好に一致しているが、接地の場合誤差が 15%程度となっている。 $f=10\text{ kHz}$ では中性線接地、非接地にかかわらずインピーダンスの絶対値は約 10%程度の誤差であり、位相角は接地時で 3%、非接地時で 7%程度の誤差となっており、実測値とほぼ良

表 1 インピーダンス実測および計算結果
(ケース A : 実測例 1)

Table 1. Measured and calculated results of impedance for case A.

中性点	周波数 f (Hz)	50	5000	100000
	実測値 Z (m Ω)	0.36	10.13	18.28
	θ (deg)	20.30	68.50	74.20
接地	計算値 Z (m Ω)	0.35	8.62	16.38
	θ (deg)	16.70	79.20	76.40
	誤差 ΔZ (%)	-2.78	-14.91	-10.39
	誤差 $\Delta \theta$ (%)	-17.73	15.62	2.96
非接地	計算値 Z (m Ω)	0.35	10.41	16.15
	θ (deg)	19.70	79.80	79.30
	誤差 ΔZ (%)	-2.78	2.76	-11.65
	誤差 $\Delta \theta$ (%)	-2.96	16.50	6.87

好に一致していると考えられる。実際の測定に際して中性線の取扱い是不明であったが、いずれにしても本論文提案方法による計算結果は目的にもよるが、サージ計算などでは十分満足できる計算精度を有していると考えられる。

〈4・2〉 実測例 2 : ケース B 図 3(a)に 5 分割導体よりなる 275 kV 2,500 mm² CSZV ケーブル断面を示す。5 分割心線導体を(b)図のように円筒断面の 5 導体系で等価する。このとき、5 導体全体の外周がワイヤシールドと重なってしまうが、本例の測定周波数は 100 Hz 以下の電力周波数領域であることより、心線インピーダンスに対するワイヤシールドの影響は小であり、これを無視する。なお、高周波領域でのインピーダンス計算に際してはワイヤシールドを無視し得ないと考えられるので、この場合には心線導体の抵抗率および比透磁率を修正することで円筒 5 導体系がワイヤシールド内に収まるように設定する必要がある。

図 3 275 kV/2,500 mm²CSZV ケーブル
Fig. 3. 275 kV/2,500 mm²CSZV cable.

表 2 インピーダンス実測および計算結果(ケース B : 実測例 2)
Table 2. Measured and calculated results of impedance for case B.

周波数	f (Hz)	30	50	60	75	100
実測値	Z (m Ω)	0.3293	0.5385	0.6420	0.7945	1.0430
	θ (deg)	77.56	80.84	81.55	82.12	82.57
計算値	Z (m Ω)	0.2933	0.4834	0.5789	0.7224	0.9616
	θ (deg)	76.50	83.40	84.45	85.52	86.56
誤差	ΔZ (%)	-10.93	-10.23	-9.83	-9.07	-7.80
誤差	$\Delta \theta$ (%)	-1.37	3.17	3.56	4.14	4.83

図 4 三相パイプタイプケーブル
 Fig. 4. Three-phase pipe-type cable.

(a) 自己インピーダンス $Z_s = R_s + j\omega L_s$

(b) 相互インピーダンス $Z_m = R_m + j\omega L_m$

図 5 FEM および提案手法による計算結果 (ケース C)

Fig. 5. Calculated results by FEM and proposed method for case C cable.

表2に実測結果⁽¹¹⁾と計算結果の比較を示す。表より、実測値に比して本近似計算法による計算結果の誤差はインピーダンス絶対値に関して10%程度以内、位相角で5%以内となっており、本近似計算法はサージ計算などの目的では実用上十分な計算精度を有していると考えられる。

〈4・3〉 有限要素法による計算例：ケースC 図4(a)に三相の各心線が扇形断面よりなるパイプタイプケーブルを示す。心線を円筒導体で近似したときの断面を(b)図に示す。(a)図のケーブルインピーダンスを有限要素法による数値計算で求めた結果⁽¹²⁾および図3(b)を用いて本論文の近似計算法により計算した結果を図5に示す。ただし、有限要素法ではケーブル外部には磁束の漏れがないと仮定しているため、近似計算においてはパイプ厚無限大として計算した。

図より、本近似計算法による計算結果は有限要素法による計算結果とほぼ良好に一致しており、本計算法の精度は有限要素法と同程度であると考えられる。なお、提案計算法は第2章(4)、(5)式が成立するための仮定(近似)および〈3・3〉節の2導体間の距離の設定に関する近似に基づいている。これらが、本節の例を含め実測値などに対する本計算法の誤差の原因であると考えられる。

ところで、外部に磁界がないと考える有限要素法では、その考え方から当然大地の影響を考慮することができない。理論的には外部媒質を含めて計算すればよいわけだが、実際にはそのような計算を行うのはほぼ不可能であり、計算の煩雑さからしても非実用的である。従って、本近似計算法が上記のように良好な精度を有していることからすると、大地を考慮した一般的な場合、本近似計算法は有限要素法よりもはるかに実用的であると考えられる。

5. 結 言

本論文では、任意断面導体の内部インピーダンス近似式および任意断面導体を円形断面導体により近似する方法を提案した。これにより、任意断面導体よりなる多導線系を円形導体よりなる多導線系で模擬でき、既存のインピーダンスおよびアドミタンス理論式を適用して、任意断面導体系のインピーダンスおよびアドミタンスの近似計算が可能となった。

本論文提案手法による各種ケーブルインピーダンス計算結果を実測値および有限要素法による数値計算結果と比較したところ、実用上満足し得る計算精度を有していることが確認された。

任意断面導体のインピーダンスおよびアドミタンス

計算は、現状では有限要素法に頼らざるを得ないが、大地を含む多導体系に関して有限要素法は計算所用時間およびメモリの面で実用に難がある。従って、本論文で提案した近似計算法は実用的な計算法として極めて有用であると考えられる。

(平成2年10月8日受付)

文 献

- (1) S. A. Schelkunoff: "The electromagnetic theory of coaxial transmission line and cylindrical shields", *Bell Syst. Tech. J.*, 13, 532 (1934)
- (2) J. R. Carson: "Wave propagation in overhead wire with ground return", *ibid.*, 5, 539 (1926)
- (3) F. Pollaczek: "Über das Feld einer unendlich langen wechsellängend durchflossenen Einfachleitung", *ENT.*, 3, 339 (1926)
- (4) 布施, 雨谷: 「任意断面導体およびケーブルインピーダンス近似式」, 平元電学産業応用部門大全, No.149
- (5) H. W. Dommel: "Overhead line parameters from handbook formulas and computer programs", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-104 366 (1985)
- (6) A. Semlyen & Deri: "Time domain modeling of frequency dependent three-phase transmission line impedance", *ibid.*, PAS-104, 1549 (1985)
- (7) M. Abramowitz & I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*, p.374 (1964)
- (8) G. Vandesompele: "EMTP and low voltage cables", *EMTP News*, 2 19 (1989)
- (9) W. Scott-Meyer: *EMTP Rule Book*, B. P. A., 1984. 4
- (10) A. Ametani: "A general formulation of impedance and admittance of cables", *IEEE Trans Power Apparatus Syst.*, PAS-99, 902 (1980)
- (11) 高岡, 他: 「素線絶縁分割導体の開発」, 藤倉電線技報, 67, 17, (昭59)
- (12) H. W. Dommel: 私信(1989)

付 録

(5)式の導出

Rolleの平均値定理より領域 $[0, x]$ において次式が成立する。

$$g(x) = g(0) + xg'(\theta x); 0 < \theta < 1 \quad \cdots \cdots (付1)$$

なお、任意定数 θ を1に設定すると、上式は周知のMaclaurin展開の第2項までの近似式に一致する。

ここで、

$$g(x) = \{f(x)\}^2 \quad \cdots \cdots (付2)$$

にとると

$$g(0) = f^2(0) \quad \cdots \cdots (付3)$$

$$g'(\theta x) = \{f^2(\theta x)\}' \quad \cdots \cdots (付4)$$

本例の場合、 x の大なる領域で関数 $f(x)$ は(4)式に示されるように

$$f(x \rightarrow \infty) = \sqrt{kx}; x = j\omega, k = \mu_c \rho_c / l^2 \quad \cdots \cdots (付5)$$

で近似される。このとき、(付4)式は

$$g'(x) = (kx)' = k, g'(\theta x) = k$$

$$\therefore xg'(\theta x) \doteq kx = \{f(x \rightarrow \infty)\}^2$$

.....(付 6)

以上より,

$$f^2(x) \doteq f^2(0) + f^2(x \rightarrow \infty) \dots\dots\dots(\text{付 7})$$

上式より本文(5)式が得られる。

学教授, 現在に至る。Ph. D.。主として, 分布定数回路, 過渡現象, 数値解析法等の研究に従事。51年電気学会論文賞受賞。IEE フェロー, IEEE, CIGRE 会員。

雨 谷 昭 弘 (正員)

昭和19年2月14日生。43年3月同志社大学大学院修士課程修了。48年9月マンチェスタ大学大学院博士課程修了。60年4月同志社大

布 施 郁 子 (准員)

昭和41年12月17日生。平成2年3月同志社大学工学部電子工学科卒業。同年4月(株)石田衡器製作所入社。