Gershgorin 定理を用いた S 行列法における 写像変換パラメータの決定法

正員 菅 野 純 弥 (東京電力)

正員 森 啓 之 (明治大)

正員 都 築 旋 二 (明治大)

A Method for Determining a Mapping Parameter of the S -matrix Method Using the Gershgorin's Theorem

Junya Kanno Member (Tokyo Electric Power Co.), Hiroyuki Mori, Member, Senji Tsuzuki,
Member (Meiji University)

This paper proposes a method for determining a parameter to calculate the most critical eigenvalue in the S -matrix method. The QR method has been widely utilized due to the high efficiency. Since it needs calculating all the eigenvalue to judge if power systems are stable or not, it is not easily applicable to real-sized systems for lack of storage. In recent years, the S -matrix method was developed to make the calculation easier. The method utilizes mapping the eigenvalue from s -plane to z -plane. Thus, the method enables us to focus on the most critical eigenvalue. However, it has a problem that a mapping parameter is determined by trials and errors. This paper presents a guideline for determining the parameter. The method is based on the Gershgorin's theorem that specifies the eigenvalue region. The proposed method has been applied to sample systems such as 3-unit 9-bus and 10-unit 39-bus systems. The effectiveness of the method is demonstrated.

キーワード：動態安定度， S 行列法，Gershgorin 定理

1. ま え が き

電力系統における負荷は、種々の要目で変動するため電力系統の動的振舞いを理解することが重要である。電力系統の安定度の種類として、過渡安定度、動態安定度、長周期動的安定度、電圧安定度などがある。この中で、発電機の制御機を考慮した場合の電力系統の定常状態における有効電力の安定度を、動態安定度と呼んでいる。電力系統の動態安定度を解析する手法は、固有値解法、根軌跡法、Nyquist 線図法、周波数応答法などがある。近年、これらの手法の中で、計算時間、精度の面で良好な結果が得られる固有値解法の研究が盛んに行われている。従来の固有値解法で動態安定度を評価する場合、すべての固有値、固有ベ

クトルを求めることができる信頼性の高い QR 法が幅広く用いられてきた。実際問題として、固有値の実数部分の正負が、安定か不安定かを定める要因となるので、安定度判別を行う際、すべての固有値を求める必要がある。しかし、電力系統の大規模化・大容量化および系統構成の複雑化に伴い、計算時間、記憶容量が膨大となり、効率的な手法が要望されている。そこで提案された s 行列法は、 s 領域から z 領域に固有値を写像する固有値変換法である。この写像により、従来法のようにすべての固有値を求める必要がなく、絶対値最大の固有値の一つを求めることで安定度判別を行うことができる。しかし、 S 行列法は安定か不安定かを判断することはできるが、支配固有値を求める保証はない。それは写像変換パラメータの選択により、 s 領

域の支配固有値が z 領域の絶対値最大の固有値に必ずしも対応しない場合があるからである。 S 行列法の写像変換を利用して支配固有値を効率良く評価することは重要なことであるので、 S 行列法で正確な支配固有値を求めるには適切な写像変換パラメータを選択することが重要である。そこで、固有値の存在範囲を求めることができる Gershgorin 定理を用いて、 S 行列法における写像変換パラメータの選択法を示す。これにより、 s 領域の支配固有値を正確に求めることができることを示す。

以上より、本論文では、例題系統として 3 機 9 母線系統、10 機 39 母線系統を用いて、 S 行列法における写像変換パラメータによる計算時間、収束特性の面から検討し、本手法を用いたときの有効性を示す。

2. S 行列法の問題点

〈2・1〉 S 行列法 ここでは S 行列法の写像変換式について述べる。文献(1)によって提案された S 行列法は s 領域の固有値を z 領域の絶対値最大の固有値に写像する固有値変換法である。

いま、電力系統の動特性が次式によって与えられるとする。

$$\dot{x} = A_s x \quad \dots\dots\dots (1)$$

上式において、電力系統の動態安定度を論じる場合、行列 A_s の固有値 λ_s の実数部分 $\text{Re}(\lambda_s)$ によって次のように判断される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}(\lambda_s) < 0 \text{ ならば 安定} \\ \text{Re}(\lambda_s) = 0 \text{ ならば 安定限界} \\ \text{Re}(\lambda_s) > 0 \text{ ならば 不安定} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

これは、図 1(a)に示すように、すべての固有値の実数部分が負にならないと安定であると判断されないため、すべての固有値を求める必要がある。一方、 S 行列法は、行列 A_s を(3)式で A_z に変換する固有値変換法である。

$$A_z = (A_s + hI)(A_s - hI)^{-1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 h : 正の実数、 I : 単位行列

この行列 A_z は、 s 領域の固有値を z 領域の固有値に写像する行列である。この行列 A_z を用いて電力系統の動態安定度評価を行うと、行列 A_s の支配固有値は行列 A_z の絶対値最大の固有値に写像されるので、行列 A_z の絶対値最大の固有値 $|\lambda_{\max}|$ を用いて

$$\left. \begin{array}{l} |\lambda_{\max}| < 1 \text{ のとき 安定} \\ |\lambda_{\max}| = 1 \text{ のとき 安定限界} \\ |\lambda_{\max}| > 1 \text{ のとき 不安定} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

と判断できる。この関係を図 1(b)に示した。図 1 か

図 1 s 領域と z 領域の安定領域の違い
Fig. 1. Difference between stable areas in s -plane and z -plane.

図 2 パラメータ h の選択による S 行列法の問題点
Fig. 2. Problem of S -matrix method with respect to parameter h .

らもわかるように s 領域では安定領域に固有値が存在するか否かは、前述の(2)式のようにすべての固有値を求める必要がある。しかし、 S 行列法を用いることにより単位円内に安定領域が写像されるため、(4)式のように、絶対値最大の固有値の一つを求めるだけで、安定か不安定かを判断することができる。これにより、従来法などに比べ計算時間、記憶容量の面で短縮することができる。しかし、 S 行列法は安定か不安定かを判断することはできるが、写像変換パラメータ h の値により必ずしも z 領域の絶対値最大の固有値が s 領域の支配固有値に対応するわけではない。換言すると、問題によって h を適切に選択すれば、効率良く正確に支配固有値を求めることができる。次に、 s 領域の支配固有値が z 領域絶対値最大の固有値に写像されない場合の例を述べる。

〈2・2〉 パラメータ h 選択の問題点 いま、図 2 のように、 s 領域において A 点 ($\lambda_A = 3 + j4$) と B 点 ($\lambda_B = 2 + j1$) の固有値が存在しているとする。ここで、変数 h を 1 として S 行列法を用いると、 λ_A 、 λ_B はそれぞれ A' 点 ($\lambda_{Az} = 1.2 - j0.4$)、 B' 点 ($\lambda_{Bz} = 2 - j1$) に写像される。ここで、絶対値最大の固有値を求めると A 点の固有値が支配固有値にもかかわらず、 $|\lambda_{Az}| < |\lambda_{Bz}|$ となり、 B 点の固有値が求まってしまう。

図 3 λ_s の実部・虚部と $|\lambda_z|$ の関係Fig. 3. Relationship between real and imaginary parts of λ_s and $|\lambda_z|$.

いま, s 領域における固有値の実数部分 $\text{Re}(\lambda_s)$, 虚数部分 $\text{Im}(\lambda_s)$ が以下のような範囲の中にあるとする。

$$-2 \leq \text{Re}(\lambda_s) \leq 2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$-2 \leq \text{Im}(\lambda_s) \leq 2 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで, 変数 h を変化させたときの z 領域における絶対値最大の固有値 $|\lambda_z|$ の値の変化を図 3 に示す。

図 3(a) はパラメータ h を 0.1 と小さくしたときの $|\lambda_z|$ の値を示した。いま, 同図に a_1 点, a_2 点, a_3 点が存在しているとすると a_1 点, a_2 点, と a_3 点とははっきり区別されているので安定か否かを区別することはできるが, a_1 点と a_2 点に対する $|\lambda_z|$ の値の差は顕著ではない。このようなパラメータ h を選択すると S 行列法に用いるべき乗法の収束が遅く, 収束しない場合が出てくる。べき乗法は絶対値最大の固有値 $\lambda_{\max}$ と, 2 番目に大きい固有値 $\lambda_{n\max}$ との比 $|\lambda_{n\max}/\lambda_{\max}|$ が 1 より小さいほど収束が速く, 1 に近く

なると収束しないという性質があるからである。そこで, 今度は h を 1 として同様に行ってみる。(b) 図のような h の値をとると $|\lambda_{n\max}/\lambda_{\max}|$ が 1 よりもかなり小さくなり, べき乗法を用いたとき収束は速いが, 支配固有値は求めることができない。それは, b_1 点が支配固有値とすると b_2 点に固有値が存在しているならば b_2 点のほうが $|\lambda_z|$ の値が大きいのので, b_2 点に収束してしまう。そこで今後は, h の値を大きくとってみる。(c) 図に h の値を 20 としたときの $|\lambda_z|$ の値を示した。この図からも (a) 図のときと同様に不安定領域に固有値が一つしか存在していないならばよいが, 複数存在しているならば, 収束しない場合が出てくる。次に, h の値を 6 にして同様に行った場合が (d) 図である。 s 領域の支配固有値が, z 領域の絶対値最大の固有値に対応しているので, べき乗法で求めると収束特性も良く, 正確な固有値を求めることができる。このように最適な h の選択によって, 固

有値計算の効率が左右される。すなわち、(a)図のように h の値を小さくしすぎたり、(c)図のように大きくしすぎたりすると収束特性が悪くなり、収束しない場合がでてくる。そこで、(d)図のような固有値の存在範囲の外側で適切な正の実数 h を選択する必要がある。換言すると、固有値の存在範囲を知ることが重要である (付録2参照)。 h の値は複素数にすることも可能ではあるが、文献(1)に従い、本論文では h の値を実数とした。そこで本論文では、Gershgorin 定理 (付録1参照) を用いたパラメータ h の選択の指針を以下に示す。すなわち、Gershgorin 定理によって得られる固有値の絶対値最大の上限より大きく h をとれば、正確で効率良く支配固有値を求めることができる。固有値の絶対値最大の上限には以下の2通りの場合がある。

$$|\lambda_{\max}| > |\lambda_{\min}| \dots\dots\dots (7)$$

$$|\lambda_{\min}| > |\lambda_{\max}| \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\lambda_{\min} \leq \lambda_s \leq \lambda_{\max}$

(7)式のときは $|\lambda_{\max}|$ を写像変換パラメータ h として用い、(8)式のときは $|\lambda_{\min}|$ を写像変換パラメータ h として用いる。

〈2・3〉 Gershgorin 定理を用いた S 行列法

S 行列法は、 s 領域の実数部分最大の固有値を z 領域の絶対値最大の固有値に写像する手法である。 S 行列法の写像変換パラメータの値は固有値の実数部分に依存するので、Gershgorin 定理によって実数部分の固有値の存在範囲だけを求める。それにはまず、行列 A_s の行要素を用いて、実数部分最大と最小を求める。次に、行列 A_s の列要素を用いて同様に実数部分最大と最小を求める。その後、行要素、列要素の実数部分の絶対値最大の固有値を求める。この得られた値が写像変換パラメータ h の値となる。以下に、固有値の存在範囲を求めることができる Gershgorin 定理を用いた S 行列法の計算手順を示す。

[step 1] 初期値 x_0 の選定

[step 2] 行列 A_s の Gershgorin 定理を用いてパラメータ h を選択

[step 3] 行列 $(A_s - hI)$ の不完全 LU 分解
 $(A_s - hI) = LU + R$

[step 4] ベクトル x の正規化

[step 5] 次式を解いて $x^{(k+1)}$, $x^{(k+2)}$ を求める。

$$y^{(k+1)} = (A_s + hI)x^{(k)} \dots\dots\dots (9)$$

$$(LU)^{-1}(A_s + hI)x^{(k+1)} = (LU)^{-1}y^{(k)}$$

を CR 法を用いて解く

[step 6] $x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$, $x^{(k+2)}$ の一次従属性を調

べる。すなわち、 $ax^{(k+2)} + bx^{(k+1)} + cx^{(k)} = 0$ になるような a , b , c を最小二乗法により求める。

[step 7] $\max |ax^{(k+2)} + bx^{(k+1)} + cx^{(k)}| < \varepsilon$ ならば、 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ を解いて支配固有値 λ を求め終了する。満足しないならば、[step 8]に進む。

[step 8] $x^{(k)} = x^{(k+2)}$ として [step 4] に戻る。

提案法の特徴は、以下ようになる。

(i) 適切なパラメータ h の選択により正確な支配固有値を求めることができる。

(ii) スパース性を用いた場合、計算過程に割込み要素が生じないので、係数行列 A_n が疎になればなるほど (9) 式における内部反復 1 回に要する計算量は減少する。

3. シミュレーション

〈3・1〉 シミュレーション条件 本論文では、例題系統として、まず図4の3機9母線系統を用い、動態安定度評価のための固有値解法を行った。制御器は、図5、図6の AVR、調速機を用いた。次に、図7の制御器に図8の New England 10 機 39 母線を用いて同様に行った。すべての結果は、初期値 x_0 を -1 から $+1$ までの一様乱数として 20 通りのシミュレーションを行い、その平均を用いた。

また、本手法のシミュレーションはすべて FACOM VP 2200 において行った。誤差 ε は QR 法で求めた s 領域における支配固有値 λ_q と S 行列法、提案法で求めた z 領域における絶対値最大の固有値 λ_z を用いて以下の式より求めた。

$$\varepsilon = \frac{|\lambda_q - \lambda_z|}{|\lambda_q|} \times 100 (\%) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、 λ_s は以下の式で与えられる。

$$\lambda_s = \frac{\lambda_z + 1}{\lambda_z - 1} h \dots\dots\dots (11)$$

〈3・2〉 シミュレーション結果 まず、図9に

図4 3機9母線系統
 Fig. 4. 3-unit 9-bus system.

図 5 AVR の伝達関数
Fig. 5. AVR model.

図 6 调速機の伝達関数
Fig. 6. Governor model.

図 7 励磁系モデル
Fig. 7. Excitation model.

図 9 発電機数によるパラメータ h の計算時間
Fig. 9. CPU time of parameter h vs. No of units.

図 8 10機 39 母線
Fig. 8. 10-unit 39-bus system.

Gershgorin 定理によりパラメータ h を決定するのに要する計算時間を示す。図 9 より、21 機（行列のサイズ 336×336 ）で 11.901 ms と事前にシミュレーションを行ってもさほど影響がないと思われる。次に、3 機 9 母線システムを用いたときの結果を示す。図 10 に h の値における誤差 (%) を示した。 h の値が 6 近くで最も誤差がよく、6 を挟んで誤差は悪くなっている。また、 h の値が 0.24 以下の場合収束しないことがあり、収束しても支配固有値ではない固有値に収束したので省略した。すなわち、 h の値を 0.24 以下にすると、S 行列法の写像変換パラメータが不適切であり、支配固有値を求めることはできない。また、 h の値を大きくしていくとべき乗法での収束が影響し、計算時間が

図 10 3機9母線系統における誤差
Fig. 10. Errors vs. parameter h in 3-unit 9-bus system.

図 13 10機39母線系統における誤差率
Fig. 13. Errors vs. parameter h in 10-unit 39-bus system.

図 11 3機9母線系統における計算時間
Fig. 11. CPU time vs. parameter h in 3-unit 9-bus system.

図 14 10機39母線系統における計算時間
Fig. 14. CPU time vs. parameter h in 10-unit 39-bus system.

図 12 3機9母線系統における反復回数
Fig. 12. Iteration counts vs. parameter h in 3-unit 9-bus system.

図 15 10機39母線系統における反復回数
Fig. 15. Iteration counts vs. parameter h in 10-unit 39-bus system.

行列 A の固有値は三つの円板の和集合の中にある。

E_1 : 中心 10 半径 7

E_2 : 中心 2 半径 3

E_3 : 中心 6 半径 2

また、行列 A^T も行列 A の固有値と等しいことから、同様に求めると以下ようになる。

F_1 : 中心 10 半径 3

F_2 : 中心 2 半径 3

F_3 : 中心 6 半径 6

これらを付図 1 に示すと、同図の斜線の部分となる。

2. 支配固有値と写像変換パラメータ h との関係

s 領域の固有値から z 領域の固有値の変換は、次式で与えられる。

$$\lambda_s = \frac{\lambda_z + h}{\lambda_z - h} \quad (\text{付 3})$$

z 領域では、固有値の大きさに注目するので、上式より、

$$\rho = |\lambda_z| = \frac{|\lambda_s + h|}{|\lambda_s - h|} \quad (\text{付 4})$$

上式は、 s 領域における固有値 λ_s のそれぞれの点 $\lambda_s = +h$ および $\lambda_s = -h$ からの距離の比を表す。いま、 S 行列法では絶対値最大の固有値が問題なので、固有値を $\lambda_s = a + jb$ とし、以下のような z 領域における固有値の絶対値の二乗 q を考える。

$$q = \rho^2 = \frac{(a+h)^2 + b^2}{(a-h)^2 + b^2} \quad (\text{付 5})$$

ここで、固有値の実数部分 a と q の関係を調べるために、(付 5) 式を a で微分すると(付 7)式となる。

$$\frac{\partial q}{\partial a} = \frac{2(a+h)\{(a-h)^2 + b^2\}}{\{(a-h)^2 + b^2\}^2} * \\ * \frac{-2(a-h)\{(a+h)^2 + b^2\}}{\{(a-h)^2 + b^2\}^2} \quad (\text{付 6})$$

$$= \frac{-4h\{a^2 - (b^2 + h^2)\}}{\{(a-h)^2 + b^2\}^2} \quad (\text{付 7})$$

(付 7) 式より、付表 1 に示される a と q の関係が得られる。

ただし、 $0 < a < 1$, $1 < \beta$

付表 1 に示すように、固有値の絶対値の二乗 q の値が固有値の実数部分 a と単調増加の関係にあるための条件は(付 8)式の範囲のときである。

$$-\sqrt{h^2 + b^2} \leq a \leq \sqrt{h^2 + b^2} \quad (\text{付 8})$$

すなわち、

$$|a| \leq \sqrt{h^2 + b^2} \quad (\text{付 9})$$

となる。

更に、支配固有値の値が得られる写像変換パラメー

付表 1 a と q の関係

app. Table 1. Relationship between parameters a and q .

a	$-\infty$	$\dots$	$\sqrt{h^2 + b^2}$	$\dots$	0	$\dots$	$-\sqrt{h^2 + b^2}$	$\dots$	$+\infty$
q'		$-$	0	$+$	0	$+$		$-$	
q	1	$\searrow$	a	$\nearrow$	1	$\nearrow$	β	$\searrow$	1

タ h の範囲を調べる。(付 9) 式より、以下の四つの場合が考えられる。

(1) $a \neq 0$ のとき

(I) $b \neq 0$

(i) $|a| > |b|$ の場合 (付 9) 式は(付 10)式、(付 11)式のように変換できる。

$$a^2 < h^2 + b^2 \quad (\text{付 10})$$

$$h^2 > a^2 - b^2 \quad (\text{付 11})$$

すなわち、(付 12) 式の関係が得られる。

$$h > \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{付 12})$$

(ii) $|a| \leq |b|$ の場合 (付 9) 式はいつでも成立するが、 h の値は正なので以下の式が得られる。

$$h > 0 \quad (\text{付 13})$$

(II) $b = 0$ このときは λ_s が実数固有値の場合で、(付 9) 式の b に 0 を代入することにより、以下の関係式が得られる。

$$h > |a| \quad (\text{付 14})$$

(2) $a = 0$ のとき 固有値が虚数の場合で h の値によらず(付 9) 式は成立する。よって、(1) 項 (I)-(ii) のときと同様に

$$h > 0 \quad (\text{付 15})$$

が得られる。

上記の四つの場合を事前に選択することはできない。そこで支配固有値を求める場合、すべての条件を満足する(付 14) 式を用いればよいことがわかる。換言すれば、写像変換パラメータ h の値を(付 14) 式のようにすれば正確な支配固有値を求めることができる。

菅野 純 弥 (正員)

昭和 42 年 10 月 15 日生。平成 4 年 3 月明治大学大学院博士前期課程修了。主として、電力系統安定度、電力潮流計算、状態推定に関する研究に従事。同年 4 月東京電力(株)入社。

森 啓之 (正員)

昭和29年11月10日生。60年3月早稲田大学大学院博士課程修了。59年4月同大学理工学部電気工学科助手，60年4月明治大学工学部電気工学科助手，平成元年4月同大学理工学部電気工学科助手を経て，平成2年10月同助教授，現在に至る。工学博士。電力システムの潮流計算，状態推定，安定度，高調波，ニューラルネットの研究に従事。IEEE，INNS，AAAI 会員。

都築 旋二 (正員)

昭和5年1月3日生。31年3月早稲田大学大学院修士課程修了。同年～52年電力中央研究所勤務。52年明治大学工学部電気工学科教授，平成元年4月同理工学部電気工学科教授，現在に至る。工学博士。電力システムの高調波，負荷周波数制御，経済負荷配分，信頼度制御問題の研究に従事。IEEE 会員。