既知解を重畳した表面電荷法による高速電界解析

正 員 坪 井 始 (福 山 大)

正 員 田 中 始 男 (福 山 大)

正 員 美 咲 隆 吉 (福 山 大)

正 員 八 束 健 (住友電工)

正 員 岸 幸 治 (住友電工)

Efficient Electric Field Analysis by the Surface Charge Simulation Method Superposing Known Field Distribution

Hajime Tsuboi, Member, Motoo Tanaka, Member, Takayoshi Misaki, Member (Fukuyama University), Ken Yatsuka, Member, Koji Kishi, Member (Sumitomo Electric Industries)

Numerical analysis of electric field is performed by several practical methods. The surface charge simulation method is used for three-dimensional analysis of static electric field in the medium with constant and homogeneous permittivity. The number of unknowns becomes large in practical problems, and large memory storage and long computation time are required. Therefore, when a computation model where the electric field distribution is known is given and a small conductor is added to the computation model, we propose an efficient method superposing the known electric field distribution. In the proposed method, the surface charges induced by the added small conductor are used as unknowns. By using the proposed method, the area to be analyzed becomes small and the number of unknowns is reduced. The formula for the proposed method and how the area to be analyzed is determined are shown. Furthermore, some numerical examples and an application for the power cable with defect are presented.

キーワード：表面電荷法，電界解析，高電圧機器，数値解析

1. ま え が き

電界の数値解析は，種々の実用的な手法によって行われている^{(1)~(3)}が，誘電率が一定で一様な場合の三次元静電界解析には表面電荷法がしばしば用いられている⁽⁴⁾⁽⁵⁾，電極形状や絶縁物形状の最適化にも用いられている⁽⁶⁾⁽⁷⁾。また，表面電荷法には，計算精度の向上のための曲面要素の導入⁽⁴⁾，数値積分法の改良⁽⁵⁾⁽⁸⁾⁽⁹⁾などの改良がなされている。しかし，実用問題の三次元電界解析では，未知数（未知表面電荷密度数）が多くなり，膨大な記憶容量と計算時間を必要とすることがある。この場合，最終の連立一次方程式の係数行列は密行列となるため，係数行列を格納する記憶容量とこれを作成する計算時間は未知数の二乗に比例し，連

立方程式をガウスの消去法で解く計算時間は未知数の三乗に比例する。

そこで，表面電荷法などの積分方程式法では重畳の理によって既知解を含む解析が容易にできる⁽¹⁾ことに着目し，解析解や数値解などの既知解がある形状に微小導体が付加された計算モデルの場合に，これらの既知解を用いることによって未知数を減らし，計算を高速化する手法を提案する。このとき，重畳の理を用いて既知の電荷分布に未知の電荷分布を重畳して解析を行い，未知数を減少させる。まず定式化を示し，次に適用法を検討し，軸対称問題と三次元問題の計算例を示す。更に，実用例として，提案手法を電力ケーブル内に微小異物が混入した場合の三次元電界解析に応用した例を示す。

2. 計算の原理と基本式

表面電荷法では、導体表面と誘電体境界面に定義された、見掛け電荷の電荷密度を未知変数として電界解析を行う。ここでは、図1(a)に示す簡単な二導体モデルを考える。(b)図のように導体Aに電位 V_A が印加された場合の解がある場合を考える。この場合には、導体A上の表面電荷密度は既知の値 σ_0 である。次に、導体Aと導体Bが存在する場合を考えると、導体Aの表面上の表面電荷密度 σ_A は、重畳の理により σ_0 と導体Bによる誘導電荷 σ_a の和となる。導体Bが導体Aに比べて相対的に微小であると、その影響は導体Bから離れたところにはほとんど及ばず、(c)図に示すように σ_a は近似的に導体Aの表面 S_A の一部の S_a にのみ誘導されることになる。 S_a は、 S_A から σ_a が零と見なせる部分を差し引いた範囲である。このとき、 σ_0 は既知であるので、 σ_a と導体B表面 S_B 上の表面電荷密度 σ_B を未知として(a)図の問題を解くことができる。

表面電荷法では、 ϵ_0 の媒質で満たされた空間の任意の計算点 i の電位 V_i は、次式で計算される。

$$V_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_S \sigma \phi dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 ϵ_0 ：真空の誘電率、 S ：導体表面と誘電体境界面を合わせた全境界面、 ϕ ：基本解

図1の計算モデルを考えると、(1)式の S と σ は次式で表される。

(a) 計算モデル

(b) 既知表面電荷密度

(c) 既知表面電荷密度と未知表面電荷密度の重畳

図1 計算の原理

Fig. 1. Principle of the calculation.

$$S = S_A + S_B \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\sigma = \sigma_A \quad (S_A \text{ 上}) \quad \dots\dots\dots (3a)$$

$$\sigma = \sigma_B \quad (S_B \text{ 上}) \quad \dots\dots\dots (3b)$$

また

$$\sigma_A = \sigma_0 + \sigma_a \quad \dots\dots\dots (4)$$

そこで、(2)～(4)式を用いて(1)式を書き換えると、次のようになる。

$$V_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_A} \sigma_0 \phi dS + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_A} \sigma_a \phi dS + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_B} \sigma_B \phi dS \quad \dots\dots\dots (5)$$

上式の右辺第1項は、既知の電荷密度 σ_0 による電位であるから既知電位 V_{0i} とおける。また、 σ_a が誘導される表面を S_a で近似すると、(5)式は次のように書き換えられる。

$$V_i = V_{0i} + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_a} \sigma_a \phi dS + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_B} \sigma_B \phi dS \quad \dots\dots\dots (6)$$

同様に、任意の点 i の電界 E_i は、次式で与えられる。

$$E_i = E_{0i} - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_a} \sigma_a \nabla \phi dS - \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_B} \sigma_B \nabla \phi dS \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 E_{0i} ： σ_0 による既知電界

(6)、(7)式を用いて、次のように与えられる導体表面の電位条件と誘電体境界面の電束の連続条件とから表面電荷法の最終の連立方程式が作成される。

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_a} \sigma_a \phi dS + \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{S_B} \sigma_B \phi dS = V_i - V_{0i} \quad \text{(導体表面の電位条件)} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_0} \left(- \iint_{S_a} \sigma_a \nabla \phi dS - \iint_{S_B} \sigma_B \nabla \phi dS \right) + \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1}{2\epsilon_0} \sigma_i = -(\epsilon_2 - \epsilon_1) E_{0i} \quad \text{(誘電体境界面の電束の連続条件)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 ϵ_1, ϵ_2 ：それぞれ境界面に接する二つの誘電体の誘電率

(8)、(9)式を用いて解く問題の計算規模は、 S_a と S_B 上の未知表面電荷を求める表面電荷法と同等になるため、誘導電荷が定義される S_a が狭いほど従来法に比べて計算が高速化されることになる。

(6)、(7)式の既知電位と既知電界は、解析解、数値解など、都合の良い方法で求められる。従って、従来の表面電荷法の解析プログラムのわずかな修正のみで提案手法の解析プログラムが作成可能である。

3. 誘導電荷定義範囲の決定法

誘導電荷が定義される S_a が狭いほど計算が高速化されるが、適切な範囲を用いないと計算精度の低下をまねくことになる。すなわち、 S_a は近似的に σ_a が零ではないとみなせる範囲を用いるため、範囲が狭すぎると計算精度の低下をまねき、広すぎると計算時間が長くなり非能率的である。

実用モデルでは、複雑な形状、複雑な配置を扱う必要があるが、単純化したモデルで S_a の範囲を検討する。図2に示す球-平板導体モデルを用い、球導体を付加される微小導体、平板導体を微小導体による誘導を受ける比較的大きな導体と仮定した。 $E = \sigma/\epsilon_0$ の関係があるから、平板上の電界 E を求めて、次式で表される導体球直下 ($x=0$) の電界 E_0 に対する減少率 η から S_a の範囲を検討した。

$$\eta = \frac{E}{E_0} \times 100 (\%) \dots\dots\dots (10)$$

実用計算では、最大電界の計算誤差を1%以内と考え、微小導体によって誘導される電荷の全電荷に占める割合は小さいと考えて、 $\eta=1\%$ 以上となる S_a を考える。

また、電界強度は解析解⁽¹⁰⁾を用いて計算した。図2(a)において、 a は平板から球面までの距離、 b は平板から球の中心までの距離、 U は球導体の電位、 r は球の半径である。ここで、(導体間の電位差)/(導体間の距離) = 1 となるように、球導体の電位 U は a (V)、平板の電位は0 Vとした。

図3(a)に示すように球導体が平板から離れると、 $U=a$ としているので球面上の最大電界値 $E_{\max}$ は増大して平面上の最大電界値 E_0 は減少しているが、(b)図に示すように b/r が3以上では、 x/b の値が一

図2 球-平板導体モデル
Fig. 2. Conducting sphere-plate model.

(a) 電界強度

(b) 電界分布

図3 球-平板導体モデルの電界分布の変化
Fig. 3. Changes of the electric field distributions of the conducting sphere-plate model.

図4 平板上の電界分布
Fig. 4. Distribution of the electric field on the plate.

定値になっている。すなわち、球導体がその半径の約3倍以上平板から離れると、 η が1%以上の電界（電荷）が誘導される範囲は平板と球の距離 b の約4.5倍以内の範囲に限られることを示している。従って、正規化した電界分布は、(b)図から b/r が3以上で同形となることがわかり、図4に示す1本のグラフで表される。

図3(b)から、誘導電荷が定義される S_a を円形の領域で近似すると、その半径は、付加される導体が微小で平均半径の3倍以上距離が離れていれば、微小導体と誘導を受ける導体との距離の4.5倍以上の範囲にとればよいことがわかる。

また、以上は導体のみの計算モデルについて検討してきたが、導体の代わりに誘電体が付加された場合にも以上述べた考え方を拡張できると考えられる。

4. 計算例

〈4・1〉 二球導体モデル 大きさの異なる二つの球導体の計算モデルを図5に示す。AB間は、提案手法における大球表面上の誘導電荷の定義範囲で、この部分のみを要素分割する。この場合、AB間の距離は、図3(b)の結果から0.45 m程度でよいと考えられるが、小球によって誘導される電界分布を確認するために0.8 mとしている。また、従来法では AB_0 間をすべて要素分割する必要がある。

この計算モデルは軸対称問題または三次元問題として解析できるが、ここでは計算モデルを従来法で解く場合と提案手法を用いる場合の比較を軸対称解析と三次元解析の両解析手法で検討する。AB間または AB_0 間は、軸対称問題では形状を三次関数で近似する曲線要素⁽⁶⁾で分割され、三次元問題では球面となるので、図6に示すように形状を五次関数で近似する曲面三角形要素⁽⁶⁾で分割される。ここで、小球と

図5 二球導体モデル

Fig. 5. Two-conducting sphere model.

AB間の要素分割は、従来法、提案手法とも同じである。表面電荷密度は、曲線要素、曲面三角形要素とも座標の一次関数で近似している⁽⁶⁾。要素分割数、未知節点数などの計算条件と計算結果を表1に示す。既知解としては弧立球の解析解を用いた。軸対称解析の計算結果のほうが計算精度が高くなっているのは、分割が細かいためであるが、軸対称解析と三次元解析において、どちらの場合も従来法と提案手法の計算結果はよく一致している。表1より、提案手法により約20～30%に計算時間が短縮されていることがわかる。図7に、大球表面の電界分布の計算値を示す。 l が0.45付近より近い電界はほぼ零となり、前述したようにAB間の距離は0.45 m程度でよいことがわかる。

〈4・2〉 同心球導体モデル 図8(a)に同心球導体間に小球が入れられた計算モデルを示す。内球と外

図6 二球導体モデルの三次元解析用分割図
Fig. 6. Arrangement of the curved surface triangular element for the two conducting sphere model.

表1 二球導体モデルの計算結果

Table 1. Computation results of the two conducting sphere model.

		軸対称解析		三次元解析	
		従来法	提案手法	従来法	提案手法
要素数	大球	128	32	512	144
	小球	64	64	512	512
未知節点数		194	98	516	340
電界(V/m) 〔誤差(%)〕	A点	1.191 〔0.3〕	1.192 〔0.3〕	1.194 〔0.5〕	1.200 〔1.0〕
	C点	-914.7 〔0.0〕	-914.7 〔0.0〕	-910.7 〔0.5〕	-910.4 〔0.5〕
計算時間 (s)	係数行列作成	91	23	162	70
	ガウスの消去法	28	4	276	78
	計	119	27	438	148

使用計算機：SONY NEWS 3860 (R 3000, 20 MHz, 20 MIPS)

図 7 大球表面の誘導電界の分布
Fig. 7. Distribution of the induced electric field on the surface of the large sphere.

図 8 同心球モデル

Fig. 8. Concentric sphere model.

球表面には、(b)図に示すように誘導電荷を定義し、軸対称解析を行った。既知解としては同心球導体の解析解を用いた。

小球は絶縁されているため、全電荷が零で、電位が未知のいわゆる浮遊導体である。ここでは、小球の電位として適当な値を仮定して解析し、求められた表面電荷密度より小球の全電荷を計算してこれが零になるように、二分法を用いて繰り返し計算を行い、最終的な小球の電位を求めた。このことにより、解析プログラムの変更なしに浮遊導体の解析が可能である。図 8 の計算モデルでは、小球の電位は 33.33 V となった。

導体表面の電界分布の計算結果を図 9 に示す。図 3 (b)の基準では、 $A_i B_i$ 間および $A_0 B_0$ 間の距離は 2.3 m 程度とる必要があるが、その約 1/4 の $l_1, l_2 = 0.6$ m 程度で誘導電界は零となっている。これは、図 3 の

(a) 同心球表面に誘導される電界

(b) 小球表面の電界分布

図 9 導体表面の電界分布
Fig. 9. Distributions of the electric field on the surface of the conductor.

結果は開領域の場合であり、本モデルは閉領域の問題であるので、相対する導体により誘導電界の生じる範囲が狭められていると考えられる。すなわち、外部導体のない開領域問題の場合には小球から出た電気力線は点 B_i より遠くまで達するが、外部導体のある閉領域問題の場合には外部導体から直接内部導体に達する電気力線が多数あり（外部導体による誘導電界が大きく）、小球から出た電気力線は遠くまで広がらないためである。従って、図 3 (b)の結果は誘導電界の生じる最大範囲を示すと考えられ、本モデルのような閉領域の問題では範囲は狭められる。

〈4・3〉 電力ケーブルモデル 実用問題として電力ケーブル内に微小異物が混入した場合の計算モデルを図 10 に示す。本モデルは三次元モデルであり、絶縁厚 2 mm のケーブルに直径 0.2 mm (200 μ m) の球状の金属異物が混入した場合の電界解析例である。その要素の分割を図 11 に示す。球導体表面は 288 の曲面三角形要素に分割している。前節の結果から円筒面

図 10 電力ケーブルモデル
Fig. 10. Power cable model.

図 11 電力ケーブルモデルの分割図
Fig. 11. Arrangement of the curved surface triangular elements for the power cable model.

図 12 球導体表面の電界分布
Fig. 12. Distribution of the electric field on the surface of the conducting sphere.

は半径 1 mm の範囲を分割すればよいが、分割の容易さから内円筒面は $2\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ 、外円筒面は $2\text{ mm} \times 2.48\text{ mm}$ の円筒面上の長方形領域をそれぞれ 200 分割している。未知節点数は 388 で、計算時間は 190 s であった。図 12 に小球表面の電界分布の計算結果を示す。内円筒面に対向する A 点と外円筒面に対向する B 点の電界は、それぞれ $1.500 \times 10^2 \text{ V/mm}$ と $1.511 \times 10^2 \text{ V/mm}$ であった。

電力ケーブルモデルの三次元解析では、一般に端部の影響がなくなるように z 方向に十分長い計算モデルを作成して解析を行う必要があり、計算規模が大きくなる傾向がある。すなわち、同様の計算を従来法で行う場合、外円筒の直径の約 6 倍の範囲の円筒面を要素分割する必要があるため、内外円筒上の曲面三角形要素数は 1,976 となり、全未知節点数は 1,186 となった。計算時間は約 70 分で、提案手法の約 23 倍の計算時間を要した。このように、提案手法を用いれば、円筒面の誘導電荷が生じる部分のみを要素分割すればよく、計算規模を著しく縮小できることがわかった。

5. む す び

以上、表面電荷法による電界解析において、既知解を用いた計算の高速化手法を提案し、その定式化を示すとともに、計算結果について検討した。得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 解析解や数値解などの既知解のある形状に微小導体が付加された計算モデルでは、既知解を用いて、これに重畳される付加導体による誘導表面電荷密度のみを未知変数とすれば未知数が減少し、計算が高速化できる。この場合、係数行列の作成時間は未知数の二乗に比例し、ガウスの消去法の計算時間は未知数の三乗に比例するので、付加導体による誘導電荷の生じる範囲が全体に占める割合で提案手法による高速化の効果が決まる。

(2) 付加導体によって表面電荷が誘導される範囲

は、付加導体の大きさと誘導を受ける導体との距離で決まる。すなわち、付加導体形状を球で近似したときの平均半径の3倍以上、付加導体が誘導を受ける導体から離れている場合に、誘導される範囲を円形領域で近似すると、その半径は距離の4.5倍以内である。ただし、これは誘導される範囲の最大値で、付加導体は他の導体に囲まれた閉領域の場合には、誘導される範囲は狭くなる。

(3) 提案手法の解析プログラムは、従来法の解析プログラムに対して既知解に関する部分の修正のみで作成することができ、提案手法の適用は容易である。

(4) 実用例として電力ケーブル内に球状の微小金属異物が混入した場合の電界解析を行い、提案手法の有効性を示した。

(平成5年3月29日受付、同5年6月14日再受付)

文 献

- (1) 河野・宅間：数値電界計算法(昭55) コロナ社
- (2) 宅間：電学誌, 108, 209 (昭63-3)
- (3) 大久保：同上, 110, 523 (平2-9)
- (4) 美咲・坪井・位高・原：電学論A, 101, 499 (昭56-10)
- (5) 花井・小山・青柳・村瀬・大島：同上B, 111, 1044 (平3-10)
- (6) 坪井・美咲：同上A, 103, 675 (昭58-12)
- (7) 坪井・美咲：同上A, 106, 307 (昭61-7)
- (8) 坪井・美咲・矢野：同上A, 107, 201 (昭62-4)
- (9) 坪井・石井：同上A, 109, 399 (平元-9)
- (10) プリンツ(増田・河野共訳)：電界計算法(昭49) 朝倉書店

坪 井 始 (正員)

昭和27年4月23日生。53年3月岡山大学大学院修士課程修了。同大学工学部電気工学科助手、同助教授、福山大学工学部情報処理工学科助教授を経て、平成3年4月同教授となり、現在に至る。工学博士。主として、電磁界の数値解析とその電気・電子機器の最適設計への応用に関する研究に従事。

田 中 始 男 (正員)

昭和39年8月11日生。平成元年3月岡山大学大学院修士課程修了。同年4月福山大学工学部情報処理工学科助手、5年10月同講師となり、現在に至る。工学博士。主として、境界要素法による電磁界解析に関する研究に従事。

美 咲 隆 吉 (正員)

大正11年10月2日生。昭和21年9月京都大学工学部電気工学科卒業。38年岡山大学工学部電気工学科教授、63年4月同大学名誉教授。63年4月福山大学工学部情報処理工学科教授となり、現在に至る。工学博士。主として、電界および電磁界の数値解析に関する研究に従事。

八 束 健 (正員)

昭和24年9月7日生。50年3月大阪工業大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年住友電気工業(株)入社。現在、電力システム技術研究所主任研究員。主として、電力ケーブルの研究に従事。

岸 幸 治 (正員)

昭和40年8月1日生。平成2年3月東京農工大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年住友電気工業(株)入社。現在、電力システム技術研究所勤務。主として、電力ケーブルの研究に従事。